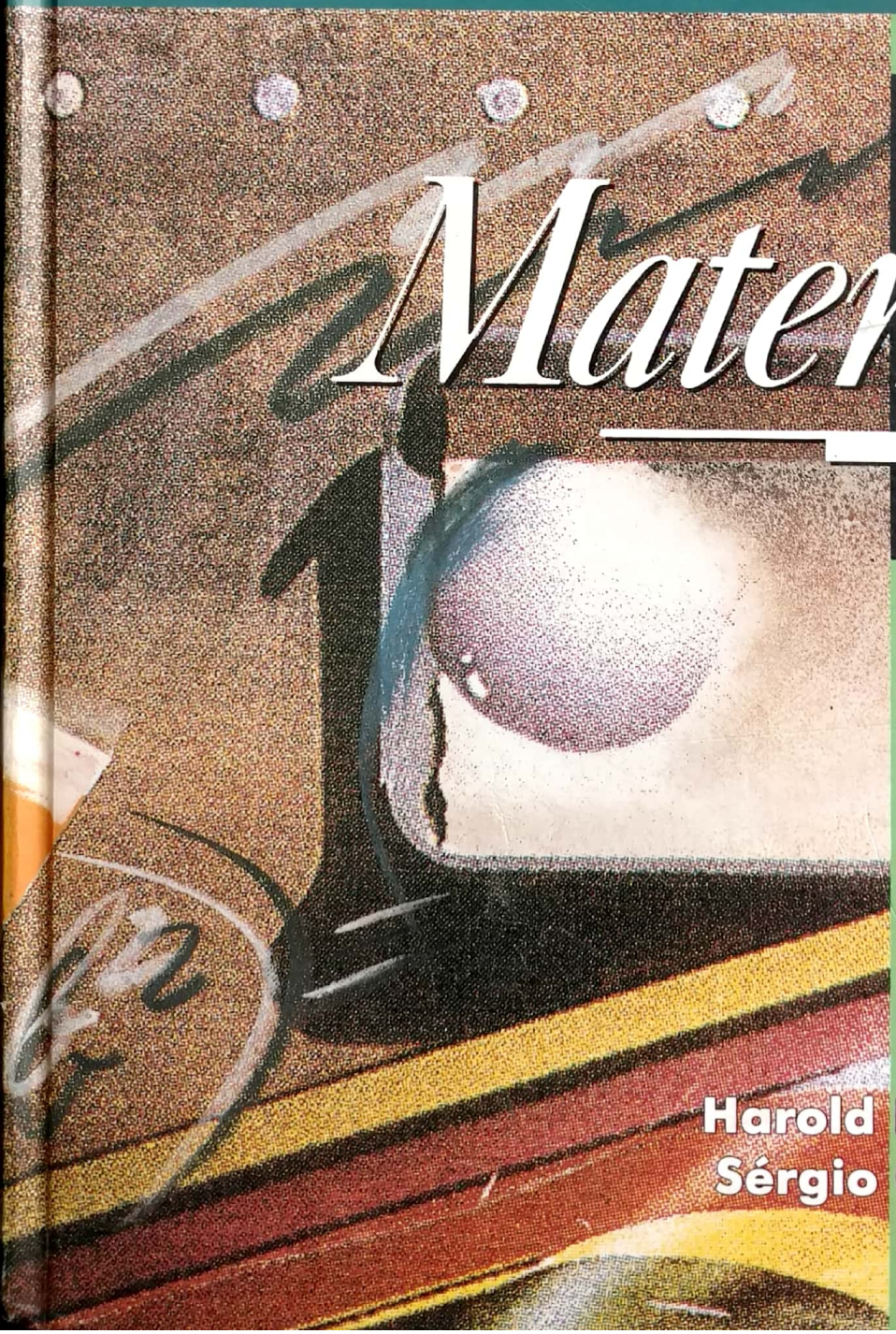
TUDO PARA O VESTIBULAR



Matemática

Harold H. Zöld
Sérgio Côrrea

Scanned by CamScanner

CÍRCULO DO LIVRO LTDA.
Caixa postal 7413 - 01065-970 São Paulo, Brasil

Edição integral
Copyright © 1993 Editora Nova Cultural Ltda.
Organização: Editora Nova Cultural Ltda.

Licença editorial para o Círculo do Livro
por cortesia da Editora Nova Cultural Ltda.

Venda permitida apenas aos sócios do Círculo
Composto pela Editora Nova Cultural Ltda.
Impressão e acabamento. Gráfica Círculo

ISBN 85-332-0334-9 Obra completa
ISBN 85-332-0336-5 Vol. 1

4 6 8 10 9 7 5 3

95 97 94 96

Scanned by CamScanner

SUMÁRIO

ÁLGEBRA ELEMENTAR 2
Conjuntos 2
Potenciação 9
Radiciação 10
Produtos Notáveis 12
Fatoração 13
Expressões algébricas 15
Equações de 1º grau 16
Equações de 2º grau 17
Equações biquadradas —
Equações irracionais 20
Sistemas de equações 21
GEOMETRIA PLANA 33
Ângulos 24
Paralelismo de retas 26
Polígonos 27
Triângulos 30
Quadriláteros 34
Tangências 37
Teorema de Tales
Semelhança de triângulos 39
Triângulos retângulos 43
Polígonos regulares inscritos 45
Áreas das figuras planas 47
ÁLGEBRA 49
Funções 49
Relações binárias 49
Estudo da função 51
Principais funções 56
Sinal de funções de
1º e 2º grau 64
Função composta 72
TRIGONOMETRIA 73
Medidas de arcos e ângulos 73
Trigonometria de triângulo 75
Relações trigonométricas 80
Seno, cosseno e tangente
no ciclo trigonométrico 82
Transformações de arcos 88
Arcos côngruos 92
Equações trigométricas 93
ÁLGEBRA 97
Função exponencial 97
Função logarítmica 100
Seqüências 108
Números complexos 117
Polinômios 123
Equações algébricas 128
GEOMETRIA ESPACIAL 132
Esfera 132
Cilindro 133
Cone 135
Prisma 138
Paralelepípedo retângulo 139
Pirâmide 142
ÁLGEBRA 145
Matrizes 145
Determinantes 150
Sistemas de equações lineares 156
Análise combinatória 160
Binômio de Newton 164
GEOMETRIA ANALÍTICA 170
Coordenadas de um ponto 170
Equação da reta 176
Equação da circunferência 187

RESUMOS E EXERCÍCIOS

Páginas 02 a 48 193
Páginas 49 a 96 209
Páginas 97 a 144 225
Páginas 145 a 192 241

Scanned by CamScanner

Scanned by CamScanner

MATEMÁTICA

A Matemática é geralmente considerada como uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete, num gabinete fechado, onde não entram ruídos do mundo exterior, nem o Sol, nem os clamores dos homens. Isto só em parte é verdadeiro (Bento de Jesus Caraça, 1901 - 1948).

Pode parecer que alguns assuntos desta obra não têm aplicação clara e imediata nos problemas cotidianos, e isso talvez crie um certo desapontamento. Mas, na verdade, a aplicação ocorre como resultado da evolução e desenvolvimento desses conceitos.

É fácil perceber a aplicação quase imediata de conceitos como porcentagem, juros e funções na economia, por exemplo; análise combinatória e probabilidade são o instrumento básico da estatística — que, por sua vez, é fundamental na sociologia, na psicologia, na pesquisa de mercado... Geometria e trigonometria têm aplicação clara em topografia e engenharia. Estes são apenas alguns exemplos.

A Matemática está presente em nossas vidas desde um simples troco feito no ônibus, passando pelo cálculo dos reajustes do nosso salário, até o uso de computadores.

Para entender um pouco a Matemática e suas aplicações é preciso um longo processo de estudo e dedicação. As linhas mestras desse processo estão apresentadas nesta obra.

ÁLGEBRA ELEMENTAR E GEOMETRIA PLANA

Sob o título álgebra elementar englobamos as noções de conjuntos e conjuntos numéricos com as técnicas de operações de expressões algébricas utilizando os produtos notáveis e a fatoração; usando essas técnicas você poderá resolver equações de primeiro e segundo graus e também aquelas que são redutíveis a essas, tais como as equações irracionais e biquadradas.

Com a geometria plana apresentamos os conceitos primitivos (ponto, reta e plano) a partir dos quais definimos os conceitos de segmentos, ângulos e figuras planas. Numa primeira etapa, fazemos o estudo dos elementos e das propriedades angulares dos triângulos, quadriláteros e polígonos em geral, sem levar em conta o "tamanho" dessas figuras. A partir do teorema de Tales, e usando a semelhança de triângulos, reestudamos as figuras geométricas sob o ponto de vista do "tamanho" dos seus elementos e de suas áreas.

TEORIA DE FUNÇÕES E TRIGONOMETRIA

A partir de pares ordenados e relações binárias estabelecemos o conceito de função e fazemos o estudo das funções elementares, tais como: função constante, linear, quadrática e modular. A seguir, como uma conseqüência do estudo das funções, introduzimos a resolução das respectivas inequações de primeiro e segundo graus e as modulares. Completando esse estudo inicial de funções apresentamos os conceitos de função inversa e função composta.

Na segunda parte desse livro apresentamos a trigonometria: principais funções trigonométricas, relações entre elas e aplicação da trigonometria nos triângulos.

FUNÇÕES EXPONENCIAIS, LOGARÍTMICAS E POLINOMIAIS, SEQÜÊNCIAS E GEOMETRIA MÉTRICA ESPACIAL

Neste livro complementamos o estudo das funções com as funções exponencial e logarítmica, incluindo a resolução das respectivas equações e inequações. A seguir fazemos o tratamento das seqüências numéricas, particularmente as progressões aritméticas e geométricas. Numa terceira etapa, ampliamos o conjunto dos números reais fazendo o estudo dos números complexos e estudamos nesse novo contexto as funções polinomiais e as equações algébricas. Por fim, explicamos a geometria métrica espacial, com o estudo da área e do volume dos principais sólidos geométricos.

MATRIZES, DETERMINANTES, SISTEMAS LINEARES, GEOMETRIA ANALÍTICA, ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

O livro começa com o estudo das matrizes, dos determinantes e dos sistemas lineares. Em seguida passa-se à geometria analítica, estudando o ponto, a reta e a circunferência sob o ponto de vista algébrico; para isso, utilizamos o plano cartesiano como elo de ligação entre a geometria e a álgebra. Para encerrar, apresentamos a análise combinatória e sua aplicação no cálculo de probabilidade e o binômio de Newton.

Scanned by CamScanner

ÁLGEBRA ELEMENTAR

CONJUNTOS
Noções

Conceitos iniciais

Conjunto A noção de conjunto, em Matemática, é a mesma da linguagem corrente, ou seja, conjunto é sinônimo de agrupamento, coleção, classe etc.

Elemento Os objetos que constituem determinado conjunto são chamados de elementos do conjunto.

Pertinência Se um elemento é constituinte de um conjunto significa que ele pertence ao conjunto. Este fato é indicado pelo símbolo $\in$. Por exemplo, chamando de P o conjunto dos números pares, escrevemos: $2 \in P$ (2 pertence a P) e $3 \notin P$ (3 não pertence a P).

Embora os elementos de um conjunto possam ser quaisquer objetos (inclusive outros conjuntos), é costume representar os conjuntos com as letras maiúsculas e os elementos com as letras minúsculas.

Representação dos conjuntos

Por enumeração Podemos representar um conjunto enumerando seus elementos.

Exemplos

1. O conjunto dos números pares positivos menores que 10 é: $\{2, 4, 6, 8\}$.

2. O conjunto dos números ímpares positivos é: $\{1, 3, 5, 7, ...\}$.

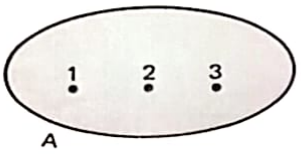
Por propriedade Quando todos os elementos de um conjunto A, e somente eles, satisfazem a uma certa propriedade, podemos descrever o conjunto A especificando essa propriedade. Para isso, usamos o símbolo $|$ (lê-se: "tal que").

Exemplos

1. $A = \{x \mid x \text{ é ímpar e } 3 < x < 11\}$ é o conjunto $\{5, 7, 9\}$. ($3 < x < 11$ significa que x está compreendido entre 3 e 11; o sinal $<$ lê-se: "menor").

2. $B = \{x \mid x \text{ é par e } 0 < x < 8\}$ é o conjunto $\{2, 4, 6\}$.

Por diagrama Para a visualização geométrica dos conjuntos usam-se os chamados diagramas de Venn. O diagrama de Venn do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ está representado ao lado.



Conjunto vazio

Chama-se vazio e indica-se por $\varnothing$ o conjunto que não possui elemento algum.

Exemplos

1. O conjunto dos meses do ano que começam pela letra c (na língua portuguesa).

2. O conjunto dos números pares maiores que 4 e menores que 6.

Igualdade de conjuntos

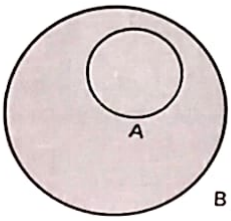
Dois conjuntos, A e B, são iguais quando têm os mesmos elementos.

ATENÇÃO Na definição de igualdade de conjuntos não há qualquer referência à ordem segundo a qual os elementos de um conjunto são escritos. Assim: $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$ e $\{b, c, a\}$, por exemplo, são o mesmo conjunto. E mais: $\{a, b, b, c, c, c\}$ e $\{a, b, c\}$, por exemplo, são um único conjunto, pois ambos têm os mesmos elementos, apesar de b constar duas vezes e c três vezes no primeiro conjunto.

Subconjuntos de um conjunto

Se A e B são dois conjuntos, pode ocorrer que todo elemento de A seja também elemento de B. Quando isso ocorre, dizemos que *A é subconjunto de B* ou que A é parte de B ou, ainda, que A está contido em B. Indicamos esse fato por $A \subset B$ (leia: "A está contido em B") ou por $B \supset A$ (leia: "B contém A").

Scanned by CamScanner



$A \subset B$
todo elemento de A é também elemento de B

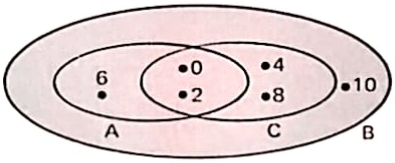
Se existir pelo menos um elemento de A que não pertença a B, então A não é subconjunto de B, fato este que se indica por $A \not\subset B$ (lê-se: "A não está contido em B").

Exemplos

1. O conjunto $A = \{2, 4, 6, 8, ...\}$, dos números pares positivos, é subconjunto do conjunto $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$, formado por todos os números naturais ($A \subset B$).

2. O conjunto dos gaúchos é um subconjunto do conjunto de todos os brasileiros.

3. Para os conjuntos $A = \{0, 2, 6\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $C = \{0, 2, 4, 8\}$.



Temos: $A \subset B$; $C \subset B$;
$A \not\subset C$ (pois $6 \in A$ e $6 \notin C$)
$C \not\subset A$ (pois $4 \in C$ e $4 \notin A$)

A definição de subconjunto induz a admitir que cada conjunto está incluído em si próprio: $A \subset A$.

OBSERVAÇÃO O conjunto vazio está contido em todo conjunto; simbolicamente: $\varnothing \subset A$, para todo conjunto A.

EXERCÍCIOS

1. Reescreva cada sentença abaixo usando as notações da teoria dos conjuntos:

a) x não é elemento do conjunto A.
b) O conjunto A não é subconjunto do conjunto B.
c) x é um elemento do conjunto B.
d) O conjunto A é parte do conjunto B.

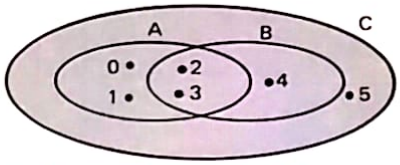
Solução

a) Se x não é elemento do conjunto A escrevemos $x \notin A$.
b) A não é subconjunto de B quando A não está contido em B. Escrevemos, então: $A \not\subset B$.
c) Se x é elemento do conjunto B, escrevemos $x \in B$.
d) O conjunto A é parte do conjunto B quando A está contido em B. Escrevemos, então: $A \subset B$.

2. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ e $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, faça um diagrama de Venn e assinale verdadeiro (V) ou falso (F) para cada item abaixo:

a) ( ) $A \subset B$ b) ( ) $B \subset A$ c) ( ) $A \subset C$
d) ( ) $\{0; 3\} \subset A$ e) ( ) $C \supset B$

Solução



a) (F) $A \not\subset B$, pois $0 \in A$ e $0 \notin B$.
b) (F) $B \not\subset A$, pois $4 \in B$ e $4 \notin A$.
c) (V) $A \subset C$, pois todo elemento de A é também elemento de C.
d) (V) Como $0 \in A$ e também $3 \in A$, o conjunto $\{0; 3\} \subset A$.
e) (V) $C \supset B$, pois todo elemento de B é também elemento de C.

Operações com conjuntos

Intersecção

Se A e B são dois conjuntos quaisquer, sua intersecção é o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a A e B.

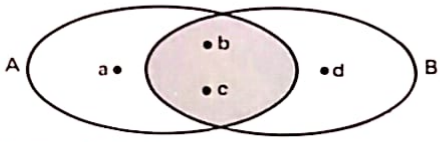
Indica-se a intersecção dos conjuntos A e B por $A \cap B$ (lê-se: "A inter B").

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

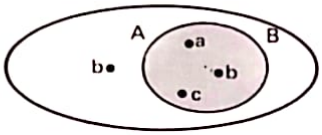
Se $A \cap B = \varnothing$, ou seja, se A e B não têm elemento em comum, dizemos que A e B são disjuntos.

Exemplos

1. Sendo $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, d\}$, então $A \cap B = \{b, c\}$.



2. Sendo $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, então $A \cap B = \{a, b, c\} = A$.



3. Sendo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$, então $A \cap B = \varnothing$.

Da definição de intersecção de conjuntos concluímos facilmente as seguintes propriedades, válidas para todo o conjunto A e B:

$$A \cap A = A; \quad A \cap \varnothing = \varnothing; \quad A \cap B = B \cap A$$

União

Se A e B são dois conjuntos quaisquer, sua união é o conjunto dos elementos que pertencem a A ou a B.

Scanned by CamScanner

Indica-se a união dos conjuntos A e B por $A \cup B$ (lê-se: "A união B").

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemplos

1. Sendo $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{d, e\}$, então $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.
2. Sendo $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, d\}$ então $A \cup B = \{a, b, c, d\}$.
3. Sendo $A = \{a, b\}$, então $A \cup \varnothing = \{a, b\} = A$.

Da definição de união de conjuntos concluímos as seguintes propriedades, válidas para todo conjunto A e B:

$$A \cup A = A; \quad A \cup \varnothing = A; \quad A \cup B = B \cup A$$

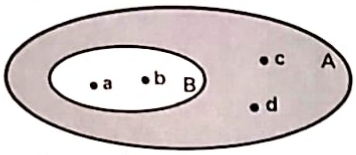
Diferença

A diferença $A - B$ é o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.

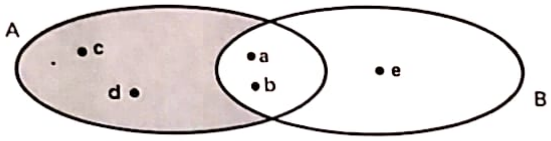
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exemplos

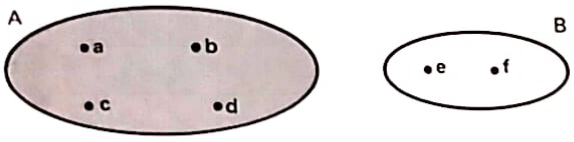
1. Sendo $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{a, b\}$, então $A - B = \{c, d\}$.



2. Sendo $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{a, b, e\}$ então $A - B = \{c, d\}$.



3. Sendo $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{e, f\}$ então $A - B = \{a, b, c, d\}$.



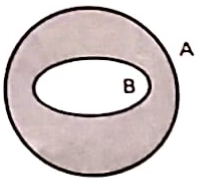
OBSERVAÇÃO Quando $B \subset A$, a diferença $A - B$ chama-se conjunto complementar de B em relação a A. Indica-se o complementar de B em relação a A por C_A^B

Assim, simbolicamente, temos:

$$C_A^B = A - B, \text{ com } B \subset A$$

Exemplo

Se $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1\}$ (note que $B \subset A$), então $C_A^B = A - B = \{2, 3\}$.



Propriedade Representamos por n(X) o número de elementos de um conjunto finito X qualquer; assim sendo n(A), n(B), $n(A \cup B)$ e $n(A \cap B)$ representam o número de elementos dos conjuntos A, B, $A \cup B$ e $A \cap B$, respectivamente.

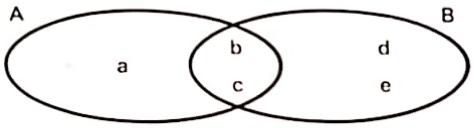
Utilizando esta notação, podemos enunciar a seguinte propriedade, válida para todo conjunto A e B:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Acompanhe a explicação desta propriedade pelo exemplo seguinte. Sendo:

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{b, c, d, e\}$



temos: $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$

$A \cap B = \{b, c\}$

e, portanto:

$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 3 + 4 - 2 = 5 = n(A \cup B)$.

E, assim, verificamos numericamente por este exemplo a propriedade:

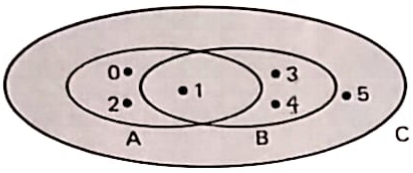
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

EXERCÍCIOS

1. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 3, 4\}$ e $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, determinar:

a) $A \cap B$ e) $(A \cap B) \cup C$
b) $A \cup B$ d) $A \cap (B \cup C)$

Solução



a) $A \cap B = \{0, 1, 2\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1\}$
b) $A \cup B = \{0, 1, 2\} \cup \{1, 3, 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
c) $(A \cap B) \cup C = \{1\} \cup \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
d) $A \cap (B \cup C) = \{0, 1, 2\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{0, 1, 2\}$

2. Sendo $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, e, f\}$ e $C = \{c, d, e, g\}$, determinar:

a) $A - B$ b) $B - A$ c) $A - C$
d) $(A \cup B) - C$ e) $(A \cap B) \cup (A - C)$

Solução

a) $A - B = \{a, b, c, d\} - \{b, d, e, f\} = \{a, c\}$
b) $B - A = \{b, d, e, f\} - \{a, b, c, d\} = \{e, f\}$
c) $A - C = \{a, b, c, d\} - \{c, d, e, g\} = \{a, b\}$
d) $(A \cup B) - C = \{a, b, c, d, e, f\} - \{c, d, e, g\} = \{a, b, f\}$
e) $(A \cap B) \cup (A - C) = \{b, d\} \cup \{a, b\} = \{a, b, d\}$

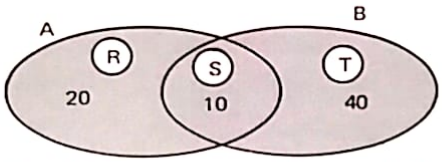
Scanned by CamScanner

3. Se o conjunto A tem 30 elementos, o conjunto B tem 50 elementos e há 10 elementos que pertencem a A e B simultaneamente, quantos elementos pertencem:

a) somente a A (e não a B)?
b) somente a B (e não a A)?
c) a $A \cup B$?

Solução

Chamando de n(X) o número de elementos de um conjunto finito qualquer X, os dados são: $n(A) = 30$, $n(B) = 50$ e



$n(A \cap B) = 10$. Observe agora o diagrama de Venn:

a) A região R do diagrama tem $30 - 10 = 20$ elementos. Esse número foi obtido pela diferença entre o número de elementos de A e o número de elementos de $A \cap B$, ou seja: o número de elementos que pertencem somente a A (e não a B) é 20.

b) A região T tem $50 - 10 = 40$ elementos. Esse número foi obtido pela diferença entre o número de elementos de B e o número de elementos de $A \cap B$, ou seja: o número de elementos que pertencem somente a B (e não a A) é 40.

c) Para o número de elementos de $A \cup B$, temos: $n(A \cup B) = n(R) + n(S) + n(T) = 20 + 10 + 40 = 70$. Esse número poderia ser obtido diretamente pela fórmula: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 30 + 50 - 10 = 70$.

Conjuntos numéricos

Os números, cujas propriedades e cujas interações são o objetivo da álgebra elementar, são classificados da seguinte forma:

Conjunto dos números naturais

Números naturais são aqueles que são utilizados na contagem dos elementos de um conjunto. Temos então:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Conjunto dos números inteiros

Números inteiros são todos os números naturais e também os opostos dos naturais; os opostos dos naturais são os números $-1, -2, -3, -4, ...$ Representando o conjunto dos números inteiros por $\mathbb{Z}$, temos:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Vamos ver agora alguns conceitos importantes aplicáveis aos números inteiros.

Múltiplos e divisores Sendo a e b números inteiros, a é *múltiplo* de b, se a é o produto de b por um outro número inteiro c.

Exemplos

15 é múltiplo de 3, pois $15 = 3 \cdot 5$
15 é múltiplo de 5, pois $15 = 5 \cdot 3$
-8 é múltiplo de 4, pois $-8 = 4 \cdot (-2)$
Zero é múltiplo de 5, pois $0 = 5 \cdot 0$

Repare que zero é múltiplo de qualquer número inteiro, pois $0 = a \cdot 0$, para qualquer número inteiro a.

Sendo a, b e c números inteiros, definimos que a é múltiplo de b ou de c se $a = b \cdot c$; nestas condições os números b e c são chamados de divisores de a.

Exemplos

3 é divisor de 15, pois $15 = 3 \cdot 5$
-2 é divisor de 10, pois $10 = (-2) \cdot (-5)$
1 é divisor de 7, pois $7 = 1 \cdot 7$
-1 é divisor de 7, pois $7 = (-1) \cdot (-7)$

Repare que 1 e -1 são divisores de todos os números inteiros.

OBSERVAÇÃO Indica-se por D(a) o conjunto dos divisores de a e por M(a) o conjunto dos múltiplos de a.

$$D(a) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é divisor de } a\}$$
$$M(a) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é múltiplo de } a\}$$

Exemplos

$D(8) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é divisor de } 8\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$
$D(-5) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é divisor de } -5\} = \{\pm 1, \pm 5\}$
$M(3) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é múltiplo de } 3\} = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, ...\}$
$M(-2) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é múltiplo de } -2\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, ...\}$

Números primos

Um número inteiro p, $p \neq 0$, $p \neq -1$, $p \neq 1$, é primo se, e somente se, seus únicos divisores são $1, -1, p, -p$.

Por esta definição, repare que:

- os números 1 e -1 não são primos;
- os únicos números primos e pares são 2 e -2.

Deste modo, a seqüência dos primeiros números naturais primos é: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

Máximo divisor comum

Dados dois inteiros a e b, não nulos, seu máximo divisor comum, que se indica por m.d.c. (a, b), é o maior elemento do conjunto $D(a) \cap D(b)$.

Exemplo

Para os inteiros 6 e 15, temos:

Scanned by CamScanner

$D(6) = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$
$D(15) = \{-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15\}$
$D(6) \cap D(15) = \{-3, -1, 1, 3\}$ é o conjunto dos divisores comuns de 6 e 15.

O maior elemento de $D(6) \cap D(15)$ é 3. Então: m.d.c. (6, 15) = 3.

Números primos entre si
Diz-se que dois inteiros a e b são primos entre si, ou que a é primo com b, quando m.d.c. (a, b) = 1.

Exemplo
5 e 8 são primos entre si, pois m.d.c. (5, 8) = 1

Os conceitos de número primo e números primos entre si são absolutamente distintos: dizemos que um número é primo e que dois ou mais números são primos entre si.

Quando dois números distintos são ambos primos e de mesmo sinal (ambos negativos ou ambos positivos), então os dois números são também primos entre si (por exemplo: 3 e 5 são ambos primos positivos e são também primos entre si, pois m.d.c. (3, 5) = 1). Mas, se dois números são primos entre si, não podemos concluir que sejam ambos primos e nem mesmo que um deles seja primo (por exemplo: os números 8 e 9 são primos entre si, pois m.d.c. (8, 9) = 1, e, no entanto nenhum dos dois é primo).

Mínimo múltiplo comum
Dados dois inteiros a e b, não nulos, seu mínimo múltiplo comum, que se indica por m.m.c. (a, b), é o menor elemento positivo do conjunto $M(a) \cap M(b)$.

Exemplo
Para os inteiros 10 e 12, temos:
$M(10) = \{..., -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, ...\}$
$M(12) = \{..., -24, -12, 0, 12, 24, 36, 48, 60, ...\}$
$M(10) \cap M(12) = \{..., -60, 0, 60, ...\}$ é o conjunto dos múltiplos comuns de 10 e 12. O menor elemento positivo de $M(10) \cap M(12)$ é 60. Então: m.m.c. (10, 12) = 60.

O m.d.c. e o m.m.c. de dois ou mais números podem ser obtidos a partir da decomposição dos números em seus fatores primos.

Exemplo
Para os números 20 e 36, temos:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \boxed{20 = 2^2 \cdot 5}$$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \boxed{36 = 2^2 \cdot 3^2}$$

O m.d.c. de 20 e 36 é igual ao produto dos fatores primos comuns a 20 e 36, tomados com seus menores expoentes, ou seja: $\boxed{\text{m.d.c. } (20; 36) = 2^2 = 4}$

O m.m.c. de 20 e 36 é igual ao produto dos fatores primos comuns e não comuns a 20 e 36, tomados com seus maiores expoentes, ou seja:

$$\boxed{\text{m.m.c. } (20; 36) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180}$$

Conjunto dos números racionais

Chama-se racional todo número que é o quociente entre dois números inteiros.

Vamos agora apresentar alguns exemplos de números racionais:

- Os números inteiros.

Exemplo
O inteiro 2 é o quociente entre os inteiros 2 e 1 ou 4 e 2 ou −10 e −5 etc.; portanto, $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{-10}{-5}$

- Os decimais exatos.

Exemplos
$1{,}3 = \frac{13}{10}$; $0{,}243 = \frac{243}{1000}$; $3{,}17 = \frac{317}{100}$

- Os decimais não exatos e periódicos (dízimas).

Exemplos
$0{,}222... = 0{,}\overline{2} = \frac{2}{9}$

$1{,}444... = 1{,}\overline{4} = 1 + 0{,}\overline{4} = 1 + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$

$0{,}999... = 0{,}\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$

Agora vamos apresentar a definição formal de número racional, indicando por $\mathbb{Q}$ o conjunto formado por eles:

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}}$$

Pela definição dos inteiros e dos racionais, concluímos facilmente que: $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}}$

Conjunto dos números reais

Números irracionais Facilmente podemos construir números decimais não exatos e não periódicos. Veja, por exemplo: 0,101001000100001..., onde o número de "zeros" aumenta de uma unidade após cada algarismo 1.

Números como esse, cuja representação contém infinitas casas decimais após a vírgula e onde não ocorre repetição de período como nas dízimas, não são números racionais; esses números são chamados de irracionais.

Veja agora mais alguns exemplos de números irracionais:
$\pi = 3{,}1415926...$ $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$
$\sqrt{3} = 1{,}7320508...$

Representaremos o conjunto dos números irracionais por I.

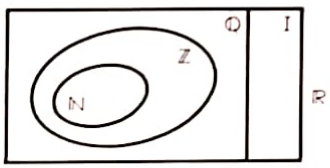
Números reais A união do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais com o conjunto I dos números irracionais chama-se conjunto dos números reais e representa-se por $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I}$$

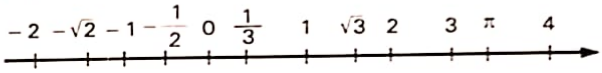
Pela definição dos racionais e dos reais, concluímos facilmente que: $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$

Scanned by CamScanner

Podemos portanto fazer a seguinte representação:



Os números reais podem ser representados numa reta de tal modo que a todo número real corresponde um ponto na reta e a todo ponto da reta corresponde um número real.



OBSERVAÇÃO Adotam-se as seguintes convenções:
- O sinal * (asterisco) elimina o número zero de um conjunto.
- O sinal + (mais) elimina os números negativos de um conjunto.
- O sinal − (menos) elimina os números positivos de um conjunto.

EXERCÍCIOS

1. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):
a) $\mathbb{Z}_+$ é o conjunto dos números inteiros positivos ( )
b) $\mathbb{Z}_-$ é o conjunto dos números inteiros negativos ( )
c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, ou seja, todo número inteiro é racional ( )
d) $\exists\, x \in \mathbb{Q} \mid x \notin \mathbb{R}$ (o símbolo $\exists$ significa "existe") ( )
e) $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_-^* = \{0\}$ ( )
f) $0{,}341341... \notin \mathbb{Q}$ ( )

Solução

a) (F) $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ é o conjunto dos números inteiros não negativos. Não negativo não é sinônimo de positivo, pois o número 0 (zero) é não negativo sem ser positivo.
b) (F) Comentário análogo ao do item a.
c) (V) Se $p \in \mathbb{Z}$, então p é um quociente entre dois inteiros, bastando escrever $p = \frac{p}{1}$.
d) (F) Como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, segue-se que todo número racional é real.
e) (F) $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_-^* = \{0, 1, 2, 3, ...\} \cap \{..., -3, -2, -1\} = \varnothing$.
f) (F) $0{,}341341... = 0{,}\overline{341} = \frac{341}{999} \in \mathbb{Q}$.

2. Pergunta-se:
a) Quaisquer que sejam os números irracionais α e β, pode-se concluir que $\alpha + \beta$ é irracional? Usando símbolos lógicos, a implicação $\alpha, \beta \in I \Rightarrow (\alpha + \beta) \in I$ é verdadeira?
b) Mesma pergunta para a implicação $\alpha, \beta \in I \Rightarrow (\alpha \cdot \beta) \in I$.

Solução

a) Não. A soma de irracionais pode ser racional.

Exemplo: $\underbrace{\sqrt{3}}_{\in I} + \underbrace{(-\sqrt{3})}_{\in I} = \underbrace{0}_{\in \mathbb{Q}}$

b) Não. O produto de irracionais pode ser racional.

Exemplo: $\underbrace{\sqrt{3}}_{\in I} \cdot \underbrace{\sqrt{3}}_{\in I} = (\sqrt{3})^2 = \underbrace{3}_{\in \mathbb{Q}}$

3. Determinar os conjuntos: D(12), D(0), M(0) e M(2).

Solução

$D(12) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ divide } 12\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$.
$D(0) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ divide } 0\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\} = \mathbb{Z}$ (lembrar que qualquer inteiro divide zero).
$M(0) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é múltiplo de } 0\} = \{0\}$ (o único múltiplo de zero é zero).
$M(2) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é múltiplo de } 2\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\}$ (conjunto dos inteiros pares).

4. Calcular:
a) m.d.c. (18; 42)

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{18 = 2 \cdot 3^2}$ $\boxed{42 = 2 \cdot 3 \cdot 7}$

m.d.c. (18; 42) = $2 \cdot 3 = 6$

b) m.m.c. (54; 64)

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{54 = 2 \cdot 3^3}$ $\boxed{64 = 2^6}$

m.m.c. (54; 64) = $2^6 \cdot 3^3 = 64 \cdot 27 = 1728$

5. Assinale (V) ou (F):
a) todo número primo é ímpar ( )
b) m.d.c. (13, 26) = 26 ( )
c) m.m.c. (13, 26) = 13 ( )
d) 5 e 12 são primos entre si ( )
e) se a e b são primos entre si, então a e b são primos ( )

Solução

a) (F) 2 é primo e par. −2 também.
b) (F) m.d.c. (13, 26) = 13.
c) (F) m.m.c. (13, 26) = 26.
d) (V) Basta observar que m.d.c. (5, 12) = 1.
e) (F) Os conceitos são independentes. Por exemplo: 4 e 9 são primos entre si (m.d.c. (4, 9) = 1) e, no entanto, nenhum dos dois é primo.

6. (FUVEST) Duas composições de metrô partem simultaneamente de um mesmo terminal fazendo itinerários diferentes. Uma torna a partir do terminal a cada 80 minutos; a outra a cada hora e meia. Determine o tempo decorrido entre duas partidas simultâneas consecutivas do terminal.

Solução

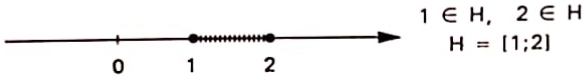
A primeira composição passa por um terminal a cada 80 minutos. A segunda composição passa pelo mesmo terminal a cada hora e meia, ou seja, a cada 90 minutos.
Se as duas composições passarem simultaneamente pelo mesmo terminal num certo instante t, tal fato voltará a ocorrer no instante t + 720 minutos. Observe que 720 = m.m.c. (80, 90). A cada 720 minutos (12 horas) as duas composições estarão juntas no mesmo terminal.

Scanned by CamScanner

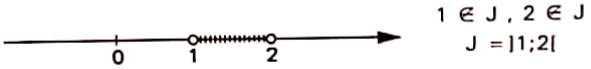
Intervalos lineares

Intervalos finitos Alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$, por aparecerem freqüentemente, têm nomes e notações especiais.

Por exemplo, o conjunto $H = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$, formado por todos os números reais entre 1 e 2, incluindo os extremos 1 e 2, recebe o nome de *intervalo fechado de extremos 1 e 2* e passa a ser representado por $[1; 2]$.

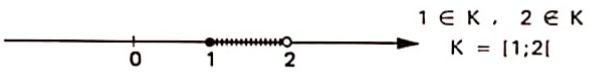


Já o conjunto $J = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$ chama-se *intervalo aberto de extremos 1 e 2* e é representado por $]1;2[$.

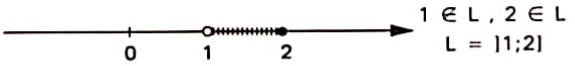


Outros casos possíveis:

$K = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x < 2\}$ é o *intervalo fechado à esquerda e aberto à direita de extremos 1 e 2*. É representado por $[1;2[$.



$L = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 2\}$ é o *intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de extremos 1 e 2*. É representado por $]1;2]$.



Exemplos

1. O conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ é o intervalo fechado de extremos 0 e 1.

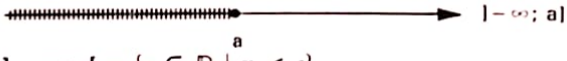
2. O conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$ é o intervalo aberto à esquerda e fechado à direita, de extremos -2 e 1.

3. O conjunto $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$ é o intervalo aberto de extremos 1 e 3.

4. O conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 0\}$ é o intervalo fechado à esquerda e aberto à direita, de extremos -1 e 0.

Intervalos infinitos Sendo a um número real qualquer, os intervalos infinitos são conjuntos da forma:

a) $]-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$



b) $]-\infty; a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

c) $[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$

d) $]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

e) $]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

Por exemplo, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$ é o intervalo infinito $[1; +\infty[$.

EXERCÍCIOS

1. Escreva com a notação de conjunto e represente sobre a reta real os intervalos $]-1; 2]$, $[0; 3[$, $]-1; 1[$ e $[-1; 1]$.

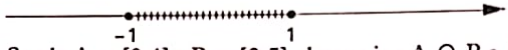
Solução

$]-1; 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 2\}$: intervalo aberto à esquerda e fechado à direita, de extremos -1 e 2.

$[0; 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 3\}$: intervalo fechado à esquerda e aberto à direita, de extremos 0 e 3.

$]-1; 1[= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$: intervalo aberto de extremos -1 e 1.

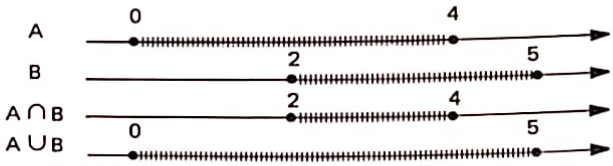
$[-1; 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$: intervalo fechado de extremos -1 e 1.



2. Sendo $A = [0;4]$ e $B = [2;5]$, determine $A \cap B$ e $A \cup B$.

Solução

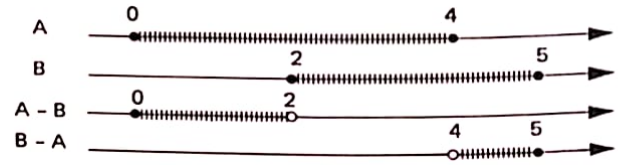
Basta representar A e B na reta:



obtendo-se $A \cap B = [2;4]$ e $A \cup B = [0; 5]$.

3. Para os mesmos intervalos do exercício anterior, determinar $A - B$ e $B - A$.

Solução



$A - B = [0;2[$ (observe que o extremo direito $2 \notin (A - B)$, pois $2 \in B$).

$B - A =]4;5]$ (observe que o extremo esquerdo $4 \notin (B - A)$, pois $4 \in A$).

Scanned by CamScanner

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO
Potenciação

Potência de expoente natural

Dados um número real a e um número natural $n > 1$, chama-se potência enésima de a, e indica-se por a^n, o produto de n fatores iguais a a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Na potência a^n, o número real a chama-se base e o número natural n, expoente. Há dois casos particulares que foram excluídos da definição anterior: os casos de expoente 1 e expoente 0. Colocamos, então, por definição:

$$a^1 = a \text{ e } a^0 = 1$$

Exemplos

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$
$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
$123^0 = 1$
$0^5 = 0$

O próximo passo consiste em considerar expoentes inteiros quaisquer e não apenas naturais.

Potência de expoente inteiro

Inicialmente, você deve observar que, se o expoente da potência for inteiro e não negativo, então você estará no caso anterior.

Caso o expoente seja negativo e a base seja não nula, colocamos, por definição:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \ a \neq 0$$

Exemplos

$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$; $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

$4 - 2 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$; $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$

Propriedades operatórias das potências

Para operar com potências, é muito importante que você conheça uma série de propriedades que passamos a expor. O domínio dessas propriedades é fundamental, principalmente em termos de rapidez de operação. Vamos a elas:

Produto de potências de mesma base Conserva-se a base e somam-se os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Divisão de potências de mesma base Conserva-se a base e subtraem-se os expoentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Potência de potência Conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Potência de um produto Distribui-se o expoente para os fatores e multiplicam-se as potências assim obtidas.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Potência de um quociente Distribui-se o expoente para o dividendo e o divisor e dividem-se as potências assim obtidas.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Potência de base fracionária e expoente negativo Inverte-se a base e troca-se o sinal do expoente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Exemplos

a) $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$ b) $3^5 : 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$
c) $(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$ d) $(3 \cdot 5)^4 = 3^4 \cdot 5^4$
e) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4}$ f) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{5^4}{3^4}$

OBSERVAÇÃO $(5^2)^3$ não é o mesmo que 5^{2^3} já que em 5^{2^3} efetua-se, antes, $2^3 = 8$ obtendo-se $5^{2^3} = 5^8$.

EXERCÍCIOS

1. Assinale (V) ou (F). (Não esqueça as propriedades que você acabou de estudar.)

a) $2^3 \cdot 2^{20} = 2^{60}$ ( ) d) $(2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2$ ( )
b) $\frac{2^{10}}{2^2} = 2^5$ ( ) e) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} = -\frac{3}{2}$ ( )
c) $(3^2)^4 = 3^{2^4}$ ( )

Solução

a) (F) $2^3 \cdot 2^{20} = 2^{3+20} = 2^{23} \neq 2^{60}$ (não esqueça: no produto de potências de mesma base somam-se os expoentes, conservando-se a base).

b) (F) $\frac{2^{10}}{2^2} = 2^{10-2} = 2^8 \neq 2^5$ (na divisão de potências

Scanned by CamScanner

de mesma base subtraem-se os expoentes, conservando-se a base).

c) (F) $\begin{cases} (3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8 \\ 3^{2^4} = 3^{16} \text{ (efetua-se antes } 2^4 = 16) \end{cases}$

d) (F) $\begin{cases} (2 + 3)^2 = 5^2 = 25 \\ 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \end{cases}$

e) (V) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(-\frac{3}{2}\right)^1 = -\frac{3}{2}$

2. Calcule:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ b) $(-2)^{-3}$

Solução

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = \frac{3^2}{1^2} = \frac{9}{1} = 9$

b) $(-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{(-1)^3}{2^3} = -\frac{1}{8}$

3. Simplifique:

$$\frac{(a \cdot b)^5 \cdot (a \cdot c)^4}{(a \cdot b \cdot c)^2}$$

Solução

$$\frac{(a \cdot b)^5 \cdot (a \cdot c)^4}{(a \cdot b \cdot c)^2} = \frac{a^5 \cdot b^5 \cdot a^4 \cdot c^4}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} =$$

$$= \frac{\cancel{a^2} \cdot a^3 \cdot \cancel{b^2} \cdot b^3 \cdot a^4 \cdot \cancel{c^2} \cdot c^2}{\cancel{a^2} \cdot \cancel{b^2} \cdot \cancel{c^2}} = a^7b^3c^2$$

4. Calcule:

a) $(0, 3)^{-1} + (0, 1)^{-2} - (-1)^5$

b) $(-0, 3)^{-2} + (3^{-2})^{-1} + 3^{-2}$

c) $\left(\frac{7}{10}\right)^{-1} - \left(\frac{10}{7}\right)^2$

Solução

a) $(0, 3)^{-1} + (0, 1)^{-2} - (-1)^5 = \left(\frac{3}{10}\right)^{-1} +$

$+ \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} - (-1) = \frac{10}{3} + 10^2 + 1 =$

$= \frac{10}{3} + 100 + 1 = \frac{10}{3} + \frac{300}{3} + \frac{3}{3} = \frac{313}{3}$

b) $(-0, 3)^{-2} + (3^{-2})^{-1} + 3^{-2} = \left(-\frac{3}{10}\right)^{-2} +$

$+ 3^{(-2) \cdot (-1)} + \frac{1}{3^2} = \left(-\frac{10}{3}\right)^2 + 3^2 + \frac{1}{9} =$

$= \frac{100}{9} + 9 + \frac{1}{9} = \frac{100}{9} + \frac{81}{9} + \frac{1}{9} = \frac{182}{9}$

c) $\left(\frac{7}{10}\right)^{-1} - \left(\frac{10}{7}\right)^2 = \left(\frac{10}{7}\right)^1 - \left(\frac{10}{7}\right)^2 =$

$= \frac{10}{7} - \frac{100}{49} = \frac{70}{49} - \frac{100}{49} = -\frac{30}{49}$

RADICIAÇÃO

Vamos definir, agora, o símbolo $\sqrt[n]{a}$, onde a é um número real qualquer e n um número natural maior que 1. Antes da definição é bom lembrar a terminologia usada: o símbolo $\sqrt[n]{a}$ lê-se "raiz enésima de a". O número real a chama-se radicando, o número n, índice da raiz e o sinal $\sqrt{\ }$, radical.

O símbolo $\sqrt[n]{a}$ é definido nos seguintes casos:

Para a real qualquer e n ímpar

$\sqrt[n]{a}$ é o número real b tal que $b^n = a$

$a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, n ímpar
$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

Exemplos

$\sqrt[3]{27} = 3$ pois $3^3 = 27$

$\sqrt[3]{8} = 2$ pois $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{-8} = -2$ pois $(-2)^3 = -8$

$\sqrt[5]{-1} = -1$ pois $(-1)^5 = -1$

Para a real não negativo e n par

$\sqrt[n]{a}$ é o número real não negativo b tal que $b^n = a$

$a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, n par
$\sqrt[n]{a} = b \geqslant 0 \Leftrightarrow b^n = a$

Exemplos

$\sqrt[4]{16} = 2$ pois $2^4 = 16$

$\sqrt{9} = 3$ pois $3^2 = 9$

$\sqrt[6]{1} = 1$ pois $1^6 = 1$

ATENÇÃO $\sqrt{9} = 3$ e não $\sqrt{9} = \pm 3$. A definição, para o caso de índice n par, exige radicando a não negativo e resultado b não negativo. No caso específico de $\sqrt{9}$, por exemplo, não estamos procurando todos os números reais cujos quadrados resultem em 9, mas sim o número real não negativo cujo quadrado seja 9 (e este número é 3).

Finalmente, observe que, para $a < 0$ e n par, o símbolo $\sqrt[n]{a}$ não é definido em $\mathbb{R}$. Por exemplo: $\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$, pois não existe número real cujo quadrado seja -9 (lembre-se de que toda potência de expoente par é não negativa).

Scanned by CamScanner

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}, \text{ se } a < 0 \text{ e } n \text{ é par}}$$

Propriedades operatórias dos radicais

Para os cálculos com radicais, use as propriedades seguintes:

Propriedades
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Exemplos

$\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6 \cdot 2]{2^{4 \cdot 2}} = \sqrt[3]{2^2}$

$\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2^1} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 2^1} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

$\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2$

$(\sqrt[3]{3})^2 = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[3 \cdot 4]{2} = \sqrt[12]{2}$

Potências de expoente racional

Você já sabe calcular potências de expoente inteiro. Agora vamos aprender mais um caso de potenciação: as potências de expoente racional como, por exemplo, $2^{1/2}$, $9^{1/2}$, $5^{4/3}$ etc. Para isso, basta você guardar que as potências de expoente racional podem ser escritas como radicais, através da igualdade:

$$\boxed{a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ com } a > 0,\ n \in \mathbb{N}^*,\ m \in \mathbb{Z}}$$

Exemplos

$25^{1/2} = \sqrt[2]{25^1} = \sqrt{25} = 5$

$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

$16^{0,25} = 16^{1/4} = \sqrt[4]{16} = 2$

$2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$

EXERCÍCIOS

1. Assinale (V) ou (F)

a) $\sqrt[3]{-1} = -1$ ( ) b) $\sqrt{-16} \in \mathbb{R}$ ( )

c) $\sqrt{(-3)^2} = -3$ ( )

Solução

a) (V) $(-1)^3 = -1$, logo $\sqrt[3]{-1} = -1$

b) (V) Índice par e radicando negativo.

c) (F) $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

2. Calcule:

a) $\sqrt{576}$ b) $\sqrt{2025}$ c) $\sqrt[3]{0,001}$

Solução

a)

576	2
288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$576 = 2^6 \cdot 3^2 \Rightarrow \sqrt{576} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2} = \sqrt{2^6} \cdot \sqrt{3^2} = 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$

b)

2025	3
675	3
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$2025 = 3^4 \cdot 5^2 \Rightarrow \sqrt{2025} = \sqrt{3^4 \cdot 5^2} = \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{5^2} = 3^2 \cdot 5 = 9 \cdot 5 = 45$

c) $\sqrt[3]{0,001} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1000}} = \dfrac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{1000}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{10^3}} = \dfrac{1}{10} = 0,1$

3. Simplifique:

a) $\sqrt{8}$

b) $\sqrt{243}$

c) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{147}$

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

Solução

a) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2^1} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{243} = \sqrt{3^5} = \sqrt{3^4 \cdot 3^1} = \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{3} = 3^2 \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

c) como: $\begin{cases} \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{27} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \\ \sqrt{147} = \sqrt{7^2 \cdot 3} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{3} = 7\sqrt{3} \end{cases}$

obtemos: $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{147} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = (2 + 3 - 7)\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$

4. Colocar em ordem crescente os números $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{5}$.

Solução

Comparamos radicais, reduzindo-os ao mesmo índice. O índice comum é o m.m.c. dos índices dados. Neste caso, o índice comum é 12 = m.m.c. (2, 3, 4). Temos, então:

$\sqrt{2} = \sqrt{2^1} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$

$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^1} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$

$\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5^1} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$

Como $\sqrt[12]{64} < \sqrt[12]{81} < \sqrt[12]{125}$, obtemos:

$$\boxed{\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}}$$

Scanned by CamScanner

PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO

Quadrado da soma

O quadrado da soma de dois termos é igual à soma de três parcelas: *O quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do 1.º pelo 2.º termo, mais o quadrado do segundo termo*; isto é:

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}$$

Exemplos

1. $(x + 7)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = x^2 + 14 \cdot x + 49$
2. $(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

Quadrado da diferença

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao *quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do 1.º pelo 2.º termo, mais o quadrado do segundo termo*; isto é:

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}$$

Exemplos

1. $(x - 4)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
2. $(3x - 5)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2 = 9x^2 - 30x + 25$

Produto da soma pela diferença

O produto da soma de dois termos pela diferença dos mesmos dois termos é igual ao *quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo:*

$$\boxed{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$$

Exemplos

1. $(x + 7) \cdot (x - 7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$
2. $(2x + 3) \cdot (2x - 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$

EXERCÍCIOS

1. Desenvolver os seguintes produtos notáveis:

a) $(3x + 1)^2$ b) $(a + \sqrt{a})^2$

c) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

Solução

São três aplicações do produto:

$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$. Acompanhe:

a) $(3x + 1)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 1 + 1^2 = 9x^2 + 6x + 1$

b) $(a + \sqrt{a})^2 = a^2 + 2a\sqrt{a} + (\sqrt{a})^2 = a^2 + 2a\sqrt{a} + a$

c) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

2. Desenvolver $(a + b + c)^2$

Solução

Para não decorar mais uma regra de produto notável, aplicamos a *propriedade distributiva*:

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c) \cdot (a + b + c)$$

$(a + b + c)^2 = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$

Somando os termos semelhantes e ordenando-os, temos:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

3. Se $a + \frac{1}{a} = b$, determine $a^2 + \frac{1}{a^2}$, em função de b.

Solução

Elevando ambos os membros da igualdade $a + \frac{1}{a} = b$ ao quadrado, obtemos: $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = b^2$. Desenvolvendo o quadrado no primeiro membro, obtemos:

$a^2 + 2 \cdot \cancel{a} \cdot \frac{1}{\cancel{a}} + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = b^2$, ou: $a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} = b^2$.

"Passando" o número 2 para o 2º membro, vem:

$$\boxed{a^2 + \frac{1}{a^2} = b^2 - 2}$$

4. Desenvolver os seguintes produtos notáveis:

a) $(2x - x^2)^2$ b) $(\sqrt{x} - x)^2$

Solução

São aplicações da identidade:

$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$; acompanhe:

a) $(2x - x^2)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot x^2 + (x^2)^2 =$
$= 4x^2 - 4x^3 + x^4$

b) $(\sqrt{x} - x)^2 = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} \cdot x + x^2 =$
$= x - 2x\sqrt{x} + x^2$

5. Demonstre a identidade:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Solução

Lembrando que $(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b)$, temos:
$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b)$; agora, distribuímos:
$(a + b)^3 = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Scanned by CamScanner

FATORAÇÃO

Quando escrevemos $a \cdot (x + y)$ no lugar de $a \cdot x + a \cdot y$, estamos fatorando a expressão $a \cdot x + a \cdot y$, ou seja, estamos transformando-a na forma de produto de dois fatores, que, neste caso, são a e $(x + y)$.

Fator comum

Quando uma expressão algébrica é formada de parcelas, sendo que um mesmo fator aparece em todas elas, colocamos este fator (chamado fator comum) em evidência.

Por exemplo, na expressão $E = a \cdot x + a \cdot y + a \cdot z$, as três parcelas são compostas de produtos, onde o fator a é comum. O fator comum a é colocado em "evidência", isto é, na frente de um par de parênteses. Ficamos, então, com $E = a \cdot (...?...)$. Nos parênteses colocamos a soma dos quocientes da divisão de cada parcela de E pelo fator comum a. Esses quocientes são: $\frac{ax}{a} = x$, $\frac{a \cdot y}{a} = y$ e $\frac{a \cdot z}{a} = z$. A forma fatorada da expressão E é, então: $E = a(x + y + z)$.

Exemplos

1. Fatorar: $3a^4x^2 - 9a^3x^3 + 3a^2x^4$.

Os fatores comuns são: 3, para a parte numérica e a^2x^2 para a parte literal ("pegue", sempre, cada "letra" elevada ao menor expoente com o qual ela aparece na expressão). Assim, o fator comum que vai em "evidência" é $3a^2x^2$.
Dividindo cada parcela da expressão dada, pelo fator comum, obtemos:

$$\frac{3a^4x^2}{3a^2x^2} = a^2,\ \frac{9a^3x^3}{3a^2x^2} = 3ax \text{ e } \frac{3a^2x^4}{3a^2x^2} = x^2; \text{ logo:}$$

$$3a^4x^2 - 9a^3x^3 + 3a^2x^4 = 3a^2x^2(a^2 - 3ax + x^2)$$

2. Fatorar: $12x^2 + 8x + 4$.

O fator comum, agora, é só o número 4. Observe que 4 = m.d.c. (12, 8, 4); não há fator comum para a parte literal, pois a terceira parcela é só numérica. Feitas as divisões de cada parcela da expressão por 4 (isso, agora, você já faz mentalmente), obtemos: $12x^2 + 8x + 4 = 4(3x^2 + 2x + 1)$

Agrupamento

Este método se aplica quando:

a) não existe um fator comum para todas as parcelas;
b) partes da expressão (grupos) possuem fator comum. Por exemplo, na expressão: $E = a \cdot x + a \cdot y + b \cdot x + b \cdot y$ as duas primeiras parcelas ax e ay possuem o fator comum a, ou seja: $ax + ay = a \cdot (x + y)$; as duas últimas parcelas bx e by possuem o fator comum b; ou seja: $bx + by = b(x + y)$; logo:

$$E = \underbrace{a \cdot x + a \cdot y} + \overbrace{b \cdot x + b \cdot y} = \underbrace{a(x + y)} + \overbrace{b(x + y)}$$

Agora o termo $(x + y)$ é fator comum: pondo-o em evidência, temos: $E = (x + y) \cdot (a + b)$.

Exemplos

1. $2x^3 + x^2 + 8x + 4 = x^2(2x + 1) + 4(2x + 1) =$
$= (2x + 1)(x^2 + 4)$

2. $15x^2y - 3y + 2 - 10x^2 = 3y(5x^2 - 1) + 2(1 - 5x^2)$.

Repare que os parênteses são iguais com sinais contrários; então, trocamos todos os sinais dentro de um dos parênteses e também na frente dele; por exemplo, no segundo parêntese:
$+2 \cdot (1 - 5x^2) = -2 \cdot (-1 + 5x^2) = -2(5x^2 - 1)$

Logo, $3y(5x^2 - 1) + 2(1 - 5x^2) =$
$= 3y(5x^2 - 1) - 2(5x^2 - 1) = (5x^2 - 1)(3y - 2)$

Diferença de quadrados

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$$

Essa identidade passa, então, a ser usada para escrever qualquer diferença de quadrados:

$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$
$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

E assim sucessivamente.

Exemplos

1. $4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x + 5)(2x - 5)$

2. $9x^2 - 625y^2 = (3x)^2 - (25y)^2 = (3x + 25y)(3x - 25y)$

Diferença e soma de cubos

As identidades seguintes servirão para fatorarmos soma e diferença de cubos:

$$\boxed{\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}}$$

Exemplos

1. $x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x + 3)(x^2 - x \cdot 3 + 3^2) =$
$= (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

2. $64x^3 - 125y^3 = (4x)^3 - (5y)^3 =$
$= (4x - 5y)[(4x)^2 + 4x \cdot 5y +$
$+ (5y)^2] = (4x - 5y)(16x^2 +$
$+ 20xy + 25y^2)$

Trinômio quadrado perfeito

Aplicam-se as identidades:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 &= (a + b)^2 \\ a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 &= (a - b)^2 \end{aligned}}$$

Scanned by CamScanner

Esse caso de fatoração se aplica quando temos três termos sendo que dois deles são quadrados (a^2 e b^2) e o terceiro é o duplo produto das raízes quadradas dos dois primeiros ($2 \cdot a \cdot b$)

Exemplos

1. $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$
2. $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$
3. $9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 =$
   $= (3x + 2y)^2$
4. $16 + 8x^2 + x^4 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot x^2 + (x^2)^2 =$
   $= (4 + x^2)^2$

EXERCÍCIO

Fatorar as expressões:

a) $2ab^3 - 6a^2b^2$
b) $ax + a - bx - b$
c) $(a - b)^2 - (b - c)^2$
d) $x^6 - 1$

Solução

a) $2ab^3 - 6a^2b^2 = 2ab^2 (b - 3a)$
b) $ax + a - bx - b = a(x + 1) - b(x + 1) =$
$= (x + 1) \cdot (a - b)$
c) $(a - b)^2 - (b - c)^2 =$
$= [(a - b) + (b - c)] \cdot [(a - b) - (b - c)] =$
$= [a - \cancel{b} + \cancel{b} - c] [a - b - b + c] =$
$= [a - c] [a - 2b + c]$
d) $x^6 - 1 = (x^3 - 1) \cdot (x^3 + 1) =$
$= (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) =$
$= (x^2 - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$

Racionalização de denominadores

Quando se escreve uma fração, costuma-se fazer com que seu denominador seja, sempre que possível, um número racional. Existem, portanto, técnicas para transformar frações de denominador irracional (como, por exemplo, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{3}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{2+1}}$ etc.) em outras frações equivalentes, onde o denominador seja um número racional. Essa transformação chama-se racionalização de denominadores. Estudaremos os casos mais freqüentes.

Frações do tipo $\frac{a}{\sqrt{b}}$. Racionaliza-se o denominador desse tipo de fração, multiplicando-se numerador e denominador por $\sqrt{b}$, lembrando que $\boxed{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = b}$, para todo b não negativo.

Exemplos

1. $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. $\frac{3}{5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5 \cdot (\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{5 \cdot 2} =$
$= \frac{3\sqrt{2}}{10}$

Frações do tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ Veja como as seguintes propriedades dos radicais:

$$\boxed{\sqrt[n]{b^r} \cdot \sqrt[n]{b^s} = \sqrt[n]{b^{r+s}} \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{b^n} = b,\ b > 0}$$

são aplicadas nas racionalizações a seguir.

Exemplos

1. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^1} \cdot \sqrt[3]{7^2}} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^1 \cdot 7^2}} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{7}$

2. $\frac{9}{\sqrt[5]{4}} = \frac{9}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{9 \cdot \sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3}} = \frac{9\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{9\sqrt[5]{8}}{2}$

Frações do tipo $\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$ ou $\frac{a}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}$. Nestes casos utilizamos a seguinte identidade:

$$\boxed{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c}) = (\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2 = b - c}$$

Exemplos

1. $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} =$
$= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$

2. $\frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} =$
$= \frac{\cancel{2}(\sqrt{3} + 1)}{\cancel{2}} = \sqrt{3} + 1$

EXERCÍCIO

Racionalize o denominador de:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
b) $\frac{5}{\sqrt[4]{3}}$
c) $\frac{3}{2\sqrt{3} + 1}$

Solução

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{5}{\sqrt[4]{3}} = \frac{5\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3^3}} = \frac{5\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{5\sqrt[4]{27}}{3}$

c) $\frac{3}{2\sqrt{3} + 1} = \frac{3(2\sqrt{3} - 1)}{(2\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 1)} =$
$= \frac{3(2\sqrt{3} - 1)}{(2\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{3(2\sqrt{3} - 1)}{12 - 1} = \frac{3(2\sqrt{3} - 1)}{11}$

Scanned by CamScanner

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Mínimo múltiplo comum

Dadas duas ou mais expressões algébricas, seu mínimo múltiplo comum é a expressão algébrica de menor grau que é divisível simultaneamente por todas as expressões dadas.

Obtém-se o m.m.c.:

- fatorando cada expressão dada;
- formando o produto dos fatores comuns e não comuns a todas as expressões tomados com seus maiores expoentes.

Exemplos

1. Para obter o m.m.c. de $15xy^2$, $25x^3y$ e $10x^5y^4$, temos:

$$\begin{cases} 15xy^2 = 3 \cdot 5 \cdot x \cdot y^2 \\ 25x^3y = 5^2 \cdot x^3 \cdot y \\ 10x^5y^4 = 2 \cdot 5 \cdot x^5 \cdot y^4 \end{cases}$$

Os fatores , comuns ou não às três expressões, com seus maiores expoentes, são: 2, 3, 5^2, x^5 e y^4. O produto deles é o m.m.c. procurado, ou seja, m.m.c. $(15xy^2, 25x^3y, 10x^5y^4) = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot x^5 \cdot y^4 = 150x^5y^4$.

2. Para obter o m.m.c. de $12x + 3y$ e $16x + 4y$, temos:

$$\begin{cases} 12x + 3y = 3(4x + y) \\ 16x + 4y = 4(4x + y) \end{cases}$$

Os fatores, agora, são: 3, 4 e $4x + y$. O m.m.c. procurado é: $3 \cdot 4 \cdot (4x + y) = 12(4x + y)$.

3. Para obter o m.m.c. de $1 + 10a + 25a^2$, $1 - 25a^2$ e $1 + 5a$, temos:

$$\begin{cases} 1 + 10a + 25a^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 5a + (5a)^2 = (1 + 5a)^2 \\ 1 - 25a^2 = 1^2 - (5a)^2 = (1 + 5a)(1 - 5a) \\ 1 + 5a \text{ não é fatorável.} \end{cases}$$

Os fatores que compõem o m.m.c. são, então: $(1 + 5a)^2$ e $(1 - 5a)$ e o m.m.c. é o produto deles, ou seja, é: $(1 + 5a)^2 (1 - 5a)$.

Frações algébricas

Chamam-se frações algébricas aquelas onde o numerador e o denominador são expressões algébricas. Alguns exemplos de frações algébricas:

$$\frac{x^2 + x + 1}{x + 1}, \quad \frac{x^2 - 4 + y^2}{x + y}, \quad \frac{x^4 - 1}{3x^2 + 3} \text{ etc.}$$

Você vai operar com as frações algébricas, exatamente da mesma maneira como você opera com as frações numéricas. Vamos recordar:

Simplificação: Fatoram-se o numerador e o denominador e cancelam-se os fatores comuns.

Exemplos

1. $$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x + y)\cancel{(x - y)}}{\cancel{x - y}} = x + y$$

2. $$\frac{x^2 + 10x + 25}{5x^2 - 125} = \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2}{5 \cdot (x^2 - 25)} = \frac{(x + 5)^2}{5 \cdot (x^2 - 5^2)} = \frac{(x + 5)\cancel{(x + 5)}}{5 \cdot \cancel{(x + 5)}(x - 5)} = \frac{x + 5}{5(x - 5)}$$

Adição e subtração Tira-se o m.m.c. dos denominadores, reduzindo-se as frações ao mesmo denominador; efetuam-se as operações indicadas no numerador e simplifica-se, se possível a fração algébrica resultante.

Exemplo

Efetuar: $\dfrac{2x}{x^2 - 1} + \dfrac{x - 1}{x + 1}$

M.m.c. dos denominadores:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x + 1)(x - 1) \\ x + 1 \text{ não é fatorável} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{m.m.c.} = (x+1)(x - 1)$$

Logo: $$\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{2x + (x - 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{2x + (x - 1)^2}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{2x + x^2 - 2x + 1}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Multiplicação Multiplica-se numerador por numerador e denominador por denominador; a seguir, simplifica-se a fração algébrica resultante.

Exemplos

1. $$\frac{3x^2}{2x + 4} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{2x} = \frac{3x^2 \cdot (x^2 + 4x + 4)}{(2x + 4) \cdot 2x} = \frac{3x^{\cancel{2}} \cdot (x + 2)^{\cancel{2}}}{2 \cdot \cancel{(x + 2)} \cdot \cancel{2x}} = \frac{3x \cdot (x + 2)}{2 \cdot 2} = \frac{3x(x + 2)}{4}$$

2. $$\frac{9x^2 - 4y^2}{9x^2 - 12xy + 4y^2} \cdot \frac{12x - 8y}{3xy + 2y^2} = \frac{(3x)^2 - (2y)^2}{(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2} \cdot \frac{4(3x - 2y)}{y(3x + 2y)} = \frac{(3x + 2y)\cancel{(3x - 2y)}}{(3x - 2y)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{4(3x - 2y)}{y(3x + 2y)} = \frac{\cancel{(3x + 2y)}}{\cancel{(3x - 2y)}} \cdot \frac{4 \cdot \cancel{(3x - 2y)}}{y \cdot \cancel{(3x + 2y)}} = \frac{4}{y}$$

Divisão Conserva-se a primeira fração e multiplica-se pelo inverso da segunda; a seguir, simplifica-se a fração algébrica resultante.

Exemplos

1. $$\frac{8x^3}{15y^2} : \frac{4x^2}{5y} = \frac{8x^3}{15y^2} \cdot \frac{5y}{4x^2} = \frac{40x^3y}{60x^2y^2} = \frac{4x}{6y} = \frac{2x}{3y}$$

2. $$\frac{(x + y)^2}{x - y} : \frac{x + y}{(x - y)^2} = \frac{(x + y)^{\cancel{2}}}{\cancel{x - y}} \cdot \frac{(x - y)^{\cancel{2}}}{\cancel{x + y}} = \frac{(x + y)(x - y)}{1 \cdot 1} = x^2 - y^2$$

Scanned by CamScanner

EQUAÇÕES

EQUAÇÕES DE 1º GRAU

Equação de 1º grau em $\mathbb{R}$, na incógnita x, é toda igualdade do tipo:

$$\boxed{a \cdot x + b = 0}$$

ou redutível a esse tipo, onde a e b são números reais e a é não nulo.

Observe que a equação é de 1º grau pois a incógnita x tem maior expoente igual a 1.

O valor da incógnita x, se existir, chama-se raiz ou solução da equação; é o número que, substituído "no lugar de x", transforma a equação numa igualdade numérica; o conjunto formado pelas raízes de uma equação chama-se conjunto-solução da equação e será indicado por S.

Por exemplo, a solução ou raiz da equação $3x - 12 = 0$ é $x = 4$ (pois $3 \cdot 4 - 12 = 0$) e seu conjunto-solução é, então, $S = \{4\}$.

Para a resolução das equações de 1º grau, proceda da seguinte maneira:

- isole os termos que contêm x de um "lado" da igualdade e os demais no outro "lado"; termos que estão somando ou subtraindo "passam para o outro lado" subtraindo ou somando, respectivamente;
- reduza todos os termos com x a um só;
- termos que estão multiplicando ou dividindo a incógnita x "passam para o outro lado" dividindo ou multiplicando, respectivamente.

Exemplos

1. Para resolver a equação

$$4 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (4x + 1) = 31$$

abrimos os parênteses, usando a propriedade distributiva:

$$4x - 4 + 12x + 3 = 31$$

isolamos os termos em x, passando o -4 e o $+3$ para o segundo membro como $+4$ e -3:

$$4x + 12x = 31 + 4 - 3$$

reduzimos os termos em x no primeiro membro a um só, e efetuamos as operações no segundo membro:

$$16x = 32$$

passamos 16 para o segundo membro, dividindo o 32:

$$x = \frac{32}{16} = 2.$$

Então, o conjunto-solução da equação é:

$$S = \{2\}$$

2. Para resolver a equação:

$$\frac{2x - 1}{2} - \frac{3x - 2}{3} = \frac{4x - 3}{4}$$

"tiramos" o m.m.c. dos denominadores, que neste caso é 12, e reduzimos todas as frações ao mesmo denominador:

$$\frac{6(2x - 1)}{12} - \frac{4(3x - 2)}{12} = \frac{3(4x - 3)}{12}$$

"cortamos" o denominador comum:

$$6(2x - 1) - 4(3x - 2) = 3(4x - 3)$$

abrimos os parênteses:

$$\cancel{12x} - 6 - \cancel{12x} + 8 = 12x - 9$$

isolamos o termo em x no segundo membro:

$$-6 + 8 + 9 = 12x \quad \text{ou} \quad 11 = 12x$$

passamos 12 para o primeiro membro, dividindo 11 e obtendo: $\frac{11}{12} = x$.

Então, o conjunto-solução da equação é:

$$S = \left\{\frac{11}{12}\right\}$$

3. Para resolver a equação

$$3x + 2 - 3(x + 1) = 0$$

abrimos os parênteses:

$$\cancel{3x} + 2 - \cancel{3x} - 3 = 0 \quad \text{ou:} \quad -1 = 0.$$

A conclusão absurda a que chegamos tem um significado muito simples: não existe valor algum da incógnita x que satisfaça a equação proposta. Em outras palavras, a equação é impossível e seu conjunto-solução S é vazio, ou seja,

$$S = 0$$

4. Para resolver a equação, em $\mathbb{R}$,

$$2(x + 1) - 3x + 2 - (4 - x) = 0$$

abrimos os parênteses:

$$2x + 2 - 3x + 2 - 4 + x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x - 3x + x = -2 - 2 + 4$$

ou:

$$0 = 0$$

Na verdade, essa igualdade é equivalente a:

$$0 \cdot x = 0$$

que é verdadeira para qualquer valor de x; portanto o conjunto-solução é: $S = \mathbb{R}$.

EXERCÍCIOS

1. Resolver a equação: $3x - 2 + 4(x + 3) = x$.

Solução

$3x - 2 + 4(x + 3) = x$
$3x - 2 + 4x + 12 = x$
$3x + 4x - x = 2 - 12$
$6x = -10 \Rightarrow x = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$; logo, $S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$

2. Resolver a equação: $\frac{2x - 1}{3} + \frac{4x}{5} = \frac{x}{3}$

Solução

$$\frac{2x - 1}{3} + \frac{4x}{5} = \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{5(2x - 1)}{\cancel{15}} + \frac{3 \cdot 4x}{\cancel{15}} =$$
$$= \frac{5x}{\cancel{15}} \Rightarrow 5(2x - 1) + 12x = 5x$$

Scanned by CamScanner

$10x - 5 + 12x = 5x$
$10x + 12x - 5x = 5 \Rightarrow 17x = 5 \Rightarrow x =$
$= \frac{5}{17} \Rightarrow S = \left\{\frac{5}{17}\right\}$

3. Resolver a equação:

$$(x + 1)(x - 3) = (x + 2)(x - 1)$$

Solução

$(x + 1)(x - 3) = (x + 2)(x - 1)$
$x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - x + 2x - 2$
$x^2 - 3x + x - x^2 + x - 2x = 3 - 2$
$-3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$; logo, $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

4. (FUVEST) Dois quintos do meu salário são reservados para o aluguel, e a metade do que sobra, para a alimentação. Descontados o dinheiro do aluguel e o da alimentação, coloco um terço do que sobra na poupança, restando então Cz$ 1 200,00 para gastos diversos. Qual é o meu salário?

Solução

Chamando o salário de x, o enunciado diz que:

a) aluguel $= \frac{2}{5}$ do salário $= \frac{2}{5} \cdot x$

b) alimentação $= \frac{1}{2}$ (salário − aluguel)

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{2x}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x}{5} = \frac{3x}{10}$$

c) poupança $= \frac{1}{3}$ (salário − aluguel − alimentação)

$$= \frac{1}{3}\left(x - \frac{2x}{5} - \frac{3x}{10}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{10x - 4x - 3x}{10}\right) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{10} = \frac{x}{10}$$

d) gastos diversos = Cz$ 1 200,00.
Esses são os itens que compõem o salário, ou seja: salário = aluguel + alimentação + poupança + gastos diversos.

Portanto: $x = \frac{2}{5}x + \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}x + 1\,200$

obtendo-se: $10x = 4x + 3x + x + 12\,000$
ou: $2x = 12\,000$ e, finalmente: $x =$ Cz$ 6 000,00

EQUAÇÕES DE 2º GRAU

Equação de 2º grau em $\mathbb{R}$, na incógnita x, é toda igualdade do tipo:

$$\boxed{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$$

ou redutível a esse tipo, onde a, b e c são números reais e a é não nulo.

A equação é chamada de 2º grau devido à incógnita x apresentar maior expoente igual a 2. Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$ (a é sempre não nulo), a equação é chamada de completa. Se $b = 0$ ou $c = 0$, a equação diz-se incompleta.

Exemplos

1. $3x^2 + 4x - 5 = 0$ é uma equação de 2º grau completa com $a = 3$; $b = 4$; $c = -5$.

2. $x^2 + 5x = 0$ é uma equação de 2º grau incompleta com $a = 1$; $b = 5$; $c = 0$.

3. $2x^2 - 9 = 0$ é uma equação de 2º grau incompleta com $a = 2$; $b = 0$; $c = -9$.

4. $3x^2 = 0$ é uma equação de 2º grau incompleta com $a = 3$; $b = 0$; $c = 0$.

Resolução das equações incompletas

Quando a equação de 2º grau é incompleta, sua resolução é bastante simples. Vamos analisar caso por caso.

1º caso $b = 0$ e $c = 0$; temos então: $\boxed{a \cdot x^2 = 0}$

Exemplo

$3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow S = \{0\}$.

2º caso $c = 0$ e $b \neq 0$; temos então: $\boxed{ax^2 + bx = 0}$

Exemplos

1. $3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x \cdot (3x - 12) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0; \text{ ou} \\ 3x - 12 = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow S = \{0; 4\}$$

2. $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x \cdot (x + 2) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0; \text{ ou} \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{array}\right\} S = \{0; -2\}$$

3º caso $b = 0$ e $c \neq 0$; temos então: $\boxed{a \cdot x^2 + c = 0}$

Exemplos

1. $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{array}\right. \Rightarrow S = \{-2; 2\}$$

2. $3x^2 + 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -12 \Rightarrow x^2 = \frac{-12}{3} \Rightarrow x^2 =$
$= -4$, que é impossível em $\mathbb{R}$; temos, então: $S = \varnothing$

Resolução das equações completas

A resolução da equação completa de 2º grau é obtida através de uma fórmula que foi demonstrada por Bhaskara, matemático hindu nascido em 1114; por meio dela sabemos que o valor da incógnita que satisfaz a igualdade é:

Scanned by CamScanner

$$\boxed{\text{Fórmula de Bhaskara } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

O número $b^2 - 4ac$ chama-se discriminante da equação e é representado, geralmente, pela letra grega Δ (delta). Fazendo, então,

$$\boxed{b^2 - 4ac = \Delta}$$

reescrevemos as soluções da equação como segue:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

OBSERVAÇÃO A fórmula acima só se aplica quando $\Delta \geqslant 0$; quando ocorre $\Delta < 0$, a equação não tem soluções reais.

Exemplos

1. Para a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, temos:

$$a = 1,\ b = -5 \text{ e } c = 6.$$

Portanto, $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$ e as raízes são:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 - 1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 + 1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

e o conjunto-solução é $S = \{2; 3\}$

2. Para a equação $4x^2 - 4x + 1 = 0$, temos:

$$a = 4,\ b = -4 \text{ e } c = 1.$$

Portanto, $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$ e as raízes são:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4) - \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \dfrac{4 - 0}{8} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4) + \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \dfrac{4 + 0}{8} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Neste caso ocorreu $\Delta = 0$ e as duas raízes x_1 e x_2 coincidiram $\left(x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}\right)$. O conjunto-solução é $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

3. Para a equação $3x^2 + 2x + 5 = 0$, temos:

$$a = 3,\ b = 2 \text{ e } c = 5$$

Portanto, $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta = 4 - 60 = -56.$

Neste caso, como $\Delta < 0$, a equação não tem solução real; logo, o conjunto solução é $S = \varnothing$.

EXERCÍCIOS

1. Resolver a equação: $\dfrac{x}{x - 2} + \dfrac{4}{x - 1} = 5$

Solução

Repare que para a existência da equação é necessário que os denominadores sejam diferentes de zero; portanto precisamos ter $x \neq 2$ e $x \neq 1$.
O m.m.c. dos denominadores é $(x - 2)(x - 1)$. Reduzindo todos os termos ao mesmo denominador, obtemos:

$$\frac{x \cdot (x - 1)}{(x - 2)(x - 1)} + \frac{4 \cdot (x - 2)}{(x - 2)(x - 1)} = \frac{5(x - 2)(x - 1)}{(x - 2)(x - 1)}$$

Eliminamos o denominador comum e efetuando as operações indicadas, temos:

$$\begin{aligned} x(x - 1) + 4(x - 2) &= 5(x - 2)(x - 1) \\ x^2 - x + 4x - 8 &= 5(x^2 - x - 2x + 2) \\ x^2 + 3x - 8 &= 5(x^2 - 3x + 2) \\ x^2 + 3x - 8 &= 5x^2 - 15x + 10 \\ x^2 - 5x^2 + 3x + 15x - 8 - 10 &= 0 \\ -4x^2 + 18x - 18 &= 0 \\ 2x^2 - 9x + 9 &= 0 \end{aligned}$$

Agora, resolvemos a equação de 2º grau:
$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 81 - 72 = 9$ e, portanto:

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm 3}{4},$$

obtendo-se:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{9 + 3}{4} = \dfrac{12}{4} = 3 \\ x_2 = \dfrac{9 - 3}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Como nenhum desses dois valores anulam os denominadores da equação proposta, o conjunto solução é:

$$S = \left\{\frac{3}{2}; 3\right\}$$

2. (PUC — SP) Resolver a equação:

$$\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x - 1} = 1$$

Solução

Lembrando que os denominadores devem ser diferentes de zero, temos:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1 \text{ e } x \neq -1 \\ x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

O m.m.c. dos denominadores é $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$. Reduzindo todos os termos ao mesmo denominador, obtemos:

$$\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x(x + 1)}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

Eliminamos o denominador comum e efetuando as operações indicadas, temos:

$$\begin{aligned} 2 - x(x + 1) &= x^2 - 1 \\ 2 - x^2 - x &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

Passando todos os termos para o 1º membro e multiplicando por (-1), obtemos a equação de 2º grau:
$2x^2 + x - 3 = 0$, onde $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2(-3) =$
$= 25$ e $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-1 \pm 5}{4}$.

Scanned by CamScanner

As possibilidades são, então:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+5}{4} = \dfrac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-1-5}{4} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

ATENÇÃO $x = 1$ não convém pois anula os denominadores da equação inicial.

E como $x = -\dfrac{3}{2}$ não anula nenhum desses denominadores, obtemos: $S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Soma e produto das raízes

Podemos calcular a soma e o produto das raízes de uma equação de 2º grau, sem resolvê-la. Veja como é simples: na equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$, já sabemos que as raízes são:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Então:

- A soma das raízes é

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \cancel{\sqrt{\Delta}} - b + \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-2b}{2a} =$$

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

- O produto das raízes é

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

$$\boxed{P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Exemplos

1. A soma e o produto das raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ são:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5 \text{ e } P = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6.$$

De fato, isto é verdade pois o conjunto solução desta equação é $S = \{2; 3\}$, como mostra o exemplo nº 1 resolvido na página 18.

2. A equação $x^2 - 7x + 12 = 0$ tem conjunto solução $S = \{3; 4\}$; verifique este resultado resolvendo a equação através da fórmula de Bhaskara. Por outro lado, podemos dizer que a soma e o produto das raízes dessa equação são:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-7}{1} = 7 \text{ e } P = \frac{c}{a} = \frac{12}{1} = 12$$

EXERCÍCIOS

1. Determine a soma e o produto das raízes de cada equação abaixo:

a) $3x^2 - 2x - 1 = 0$
b) $x^2 - 3x = 0$
c) $(x - 1)^2 + (2x - 2)^2 = 0$

Solução

a) Para a equação $3x^2 - 2x - 1 = 0$, temos:

$$S = \frac{-b}{a} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3} \text{ e } P = \frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$$

b) Para a equação $x^2 - 3x = 0$, temos:

$$S = \frac{-b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3 \text{ e } P = \frac{c}{a} = \frac{0}{1} = 0$$

c) Inicialmente: $(x - 1)^2 + (2x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 10x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$. Agora:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2 \text{ e } P = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

2. Determine o valor de m de modo que a soma das raízes da equação $3x^2 - 6mx + 1 = 0$ seja 2.

Solução

Na equação $3x^2 - 6mx + 1 = 0$, temos: $a = 3$, $b = -6m$, $c = 1$ e $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{6m}{3} = 2m$. Como $S = 2$, obtemos: $2m = 2$ e, portanto, $\boxed{m = 1}$

3. Na equação de 2º grau: $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$, determinar m de modo que:

a) as raízes sejam opostas ($x_1 = -x_2$)
b) uma das raízes seja o inverso da outra $\left(x_1 = \dfrac{1}{x_2}\right)$

Solução

Na equação $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$, temos:
$a = 1$, $b = -2m$, $c = m - 1$, $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2m$ e $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = m - 1$.

a) Se x_1 e x_2 são opostas, isto é, $x_1 = -x_2$, então $x_1 + x_2 = 0$ e, como $x_1 + x_2 = 2m$, obtemos $2m = 0$ ou $\boxed{m = 0}$

b) Se $x_1 = \dfrac{1}{x_2}$, então $x_1 \cdot x_2 = 1$ e, como $x_1 \cdot x_2 = m - 1$, obtemos $m - 1 = 1$ ou $\boxed{m = 2}$.

Scanned by CamScanner

EQUAÇÕES BIQUADRADAS

Equação biquadrada em $\mathbb{R}$, na incógnita x, é toda igualdade do tipo $\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0}$

onde a, b e c são números reais e a é não nulo.

Para a resolução das equações biquadradas, usamos de um artifício que as transformam em equações do 2º grau. Veja como é simples: fazemos a substituição

$\boxed{x^2 = t \text{ e } x^4 = (x^2)^2 = t^2}$. A equação $ax^4 + bx^2 + c = 0$ transforma-se, então, em $at^2 + bt + c = 0$, que já sabemos resolver.

EXERCÍCIOS

1. Resolver a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Solução

Fazemos: $\begin{cases} x^2 = t \\ x^4 = t^2 \end{cases}$, obtendo a equação

$t^2 - 13t + 36 = 0$. Para esta última, temos: $\Delta = 13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 169 - 144 = 25$ e, portanto:

$$t_1 = \frac{13 - 5}{2} = 4, \; t_2 = \frac{13 + 5}{2} = 9.$$

Agora, achamos a incógnita x. Lembrando que $x^2 = t$, vem

$$\begin{cases} x^2 = 4 \\ \text{ou} \\ x^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ \text{ou} \\ x = \pm 3 \end{cases}$$

Então, o conjunto solução da equação proposta é $S = \{-3, -2, 2, 3\}$.

2. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Solução

Fazendo a substituição convencional, temos:

$$\begin{cases} x^2 = t \\ x^4 = t^2 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ \text{ou} \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ \text{ou} \\ x^2 = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow S = \{-2; 2\}$$

3. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$

Solução

Eliminamos o denominador, multipicando todos os termos da equação por x^2. Obtemos, então:
$x^4 + 1 = 2x^2$ ou $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$. Com a substituição de sempre, recaímos na equação $t^2 - 2t + 1 = 0$, que nos dá a raiz $t = 1$. Com $t = 1$, obtemos $x^2 = 1$, e, finalmente, $x = \pm 1$. Pronto! O conjunto-solução da equação inicial é $S = \{-1, 1\}$.

4. Resolver a equação $x^4 - 4x^2 = 0$

Solução

Quando a equação é incompleta como aqui, a resolução é mais fácil ainda. Veja: $x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0$. Como o produto de dois números é zero somente quando um deles, pelo menos, é zero, concluímos que:

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow S = \{-2; 0; 2\}$$

EQUAÇÕES IRRACIONAIS

Uma equação é irracional se sua incógnita aparecer sob o sinal de radical (ou elevada a expoente fracionário).

Exemplos

1. $\sqrt{2x^2 - 1} = x$

2. $\sqrt{x} + \sqrt{x + 5} = 5$

3. $\sqrt[3]{3x - 2} = 1$

4. $x^{\frac{1}{2}} - 7 = (x + 1)^{\frac{1}{2}}$

EXERCÍCIOS

1. Resolver a equação: $\sqrt{x + 2} = 4$, em $\mathbb{R}$.

Solução

Elevamos os dois membros da igualdade ao quadrado:

$$(\sqrt{x + 2})^2 = 4^2 \Rightarrow x + 2 = 16 \Rightarrow \boxed{x = 14}$$

Vamos verificar se esse resultado realmente "serve" na equação inicial:

$$\boxed{x = 14 \Rightarrow \sqrt{x + 2} = \sqrt{14 + 2} = \sqrt{16} = 4.}$$

Portanto, $x = 14$ é realmente solução da equação; logo, o conjunto solução é $S = \{14\}$.

2. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\sqrt{x} + \sqrt{x + 5} = 5$.

Scanned by CamScanner

Solução

Em casos como este é melhor deixar um radical em cada lado da igualdade e a seguir elevar ao quadrado ambos os membros da equação:

$\sqrt{x + 5} = 5 - \sqrt{x}$
$(\sqrt{x + 5})^2 = (5 - \sqrt{x})^2$
$x + 5 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{x} + (\sqrt{x})^2$
$x + 5 = 25 - 10\sqrt{x} + x$
$10\sqrt{x} = 20 \Rightarrow \sqrt{x} = 2$

Repare que esta equação ainda é irracional; para eliminar o radical, elevamos novamente os dois membros ao quadrado:

$(\sqrt{x})^2 = 2^2 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

Fazemos a verificação na equação inicial:

$x = 4 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x + 5} = \sqrt{4} + \sqrt{4 + 5} = \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5;$
portanto, $x = 4$ é solução. Logo, $S = \{4\}$.

3. Resolver a equação $1 + \sqrt{3x - 5} = x$

Solução

Isola-se o radical: $\sqrt{3x - 5} = x - 1$
Elevando-se ambos os membros da equação ao quadrado:
$(\sqrt{3x - 5})^2 = (x - 1)^2$
$3x - 5 = x^2 - 2x + 1$
Reduzem-se termos semelhantes e ordena-se a equação: obtém-se $x^2 - 5x + 6 = 0$, que nos dá:

$\boxed{x = 2}$ ou $\boxed{x = 3}$

Após a verificação das raízes (que deixamos a seu cargo), vem $S = \{2; 3\}$.

4. Resolver a equação $\sqrt{2x^2 - 1} = x$

Solução

Como de costume:

$\sqrt{2x^2 - 1} = x \Rightarrow 2x^2 - 1 = x^2 \Rightarrow 2x^2 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$

Verificação:
Para $x = 1$:
$\sqrt{2x^2 - 1} = x \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 1^2 - 1} = 1 \Rightarrow 1 = 1$
(verdadeira) $\Rightarrow x = 1$ é solução.
Para $x = -1$:
$\sqrt{2x^2 - 1} = x \Rightarrow \sqrt{2 \cdot (-1)^2 - 1} = -1 \Rightarrow \sqrt{2 - 1} = -1 \Rightarrow \sqrt{1} = -1 \Rightarrow 1 = -1$
(falsa) $\Rightarrow x = -1$ não é solução.
Finalmente, obtemos $S = \{1\}$.

5. Resolver em $\mathbb{R}$ a equação: $\sqrt[3]{3x - 2} = 1$.

Solução

Para resolver esta equação, elevamos ambos os membros da igualdade ao cubo, pois a raiz que aparece é cúbica. Temos então:

$(\sqrt[3]{3x - 2})^3 = 1^3$
$3x - 2 = 1 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

Como para expoentes ímpares não é necessário fazer verificação, temos $S = \{1\}$.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Um sistema de duas equações de 1º grau, nas incógnitas $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ é um conjunto de duas equações do tipo:

$\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$, onde $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$

Exemplos

1. $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

Resolver um sistema desse tipo é obter um par ordenado de números reais (x, y) de modo que esse par, substituído em ambas as equações, transforme-as em igualdades numéricas verdadeiras. Por exemplo, no sistema **1**, dado acima, a solução é o par (3; 1); isto quer dizer que trocando x por 3 e y por 1 em ambas as equações, obtemos duas igualdades verdadeiras. Acompanhe:

$\begin{cases} 3 \cdot 3 - 1 = 8 \Rightarrow 9 - 1 = 8 \Rightarrow 8 = 8 \text{ (verdadeiro)} \\ 3 + 1 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \text{ (verdadeiro)} \end{cases}$

Como o par (3; 1) satisfaz ambas as equações do sistema, ele é a solução do sistema; logo, $S = \{(3; 1)\}$.

Revisaremos com você os dois processos mais comuns de resolução de sistemas.

1º processo: substituição

Para resolver o sistema $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ isolamos uma das incógnitas numa das equações e substituímos na outra equação o valor encontrado.

Exemplo

Na 1ª equação, isolando x obtemos $x = 8 - 2y$; a seguir substituímos esse valor na outra equação:

$\begin{cases} x + 2y = 8 \Rightarrow \boxed{x = 8 - 2y} \text{ (I)} \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

$2 \cdot (8 - 2y) + y = 7$
$16 - 4y + y = 7 \Rightarrow -3y = -9 \Rightarrow \boxed{y = 3}$

Scanned by CamScanner

Substituindo $y = 3$ em (I), temos:
$x = 8 - 2y = 8 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 = 2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

Concluímos então que o par (2; 3) é solução do sistema; logo, $S = \{(2; 3)\}$.

2º processo: adição

Para resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 7x - 4y = 3 \end{cases}$

escolhe-se uma das incógnitas para eliminar. Para isso, multiplica-se cada equação pelo coeficiente que essa incógnita tem na outra equação e somam-se (ou subtraem-se), membro a membro, as equações obtidas. No sistema proposto, vamos eliminar a incógnita y, multiplicando a 1ª equação por 4 e a 2ª por 3. Acompanhe:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \ (\times 4) \\ 7x - 4y = 3 \ (\times 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + \cancel{12y} = 20 \\ 21x - \cancel{12y} = 9 \end{cases} +$$

$$29x = 29 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

Substituindo esse valor de x numa das equações do sistema, por exemplo na 1ª, obtemos $2 \cdot 1 + 3y = 5 \Rightarrow 3y =$

$= 3 \Rightarrow \boxed{y = 1}$

Pronto! O conjunto-solução é $S = \{(1, 1)\}$

EXERCÍCIOS

1. Num sítio criam-se galinhas e coelhos, num total de 80 animais; o número total de pés é 260. Quantas são as galinhas e os coelhos?

Solução

Chamado de x o número de galinhas e y o número de coelhos, teremos:

$\begin{cases} x + y = 80 & \text{(o total de animais é 80)} \\ 2x + 4y = 260 & \text{(cada galinha tem 2 pés e cada coelho, 4 pés)} \end{cases}$

Isolamos o x na 1ª equação e substituímos na 2ª, obtendo:

$\begin{cases} x + y = 80 \\ 2x + 4y = 260 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 80 - y}$ (I)

$2(80 - y) + 4y = 260 \Rightarrow 160 - 2y + 4y = 260$

$2y = 100 \Rightarrow \boxed{y = 50}$

Substituindo $y = 50$ em (I), vem:

$x = 80 - y \Rightarrow x = 80 - 50 \Rightarrow \boxed{x = 30}$

Concluímos então que temos 30 galinhas e 50 coelhos.

2. (CESGRANRIO) Calcule $x + y$, sendo (x,y) solução do sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{y} = 4 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{6}{y} = -3 \end{cases}$$

Solução

Para simplificar a resolução, fazemos:

$\dfrac{1}{x} = a \Rightarrow \dfrac{4}{x} = 4 \cdot \dfrac{1}{x} = 4a$ e $\dfrac{2}{x} = 2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2a$

$\dfrac{1}{y} = b \Rightarrow \dfrac{3}{y} = 3 \cdot \dfrac{1}{y} = 3b$ e $\dfrac{6}{y} = 6 \cdot \dfrac{1}{y} = 6b$

Nosso sistema transforma-se em:

$$\begin{cases} 4a + 3b = 4 \\ 2a - 6b = -3 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª equação por 2 e somando com a 2ª:

$\begin{cases} 8a + 6b = 8 \\ 2a - 6b = -3 \end{cases} \Rightarrow 10a = 5 \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{1}{2}}$ (I)

Substituindo (I) na 2ª equação, vem:

$2 \cdot \dfrac{1}{2} - 6b = -3 \Rightarrow -6b = -4 \Rightarrow \boxed{b = \dfrac{2}{3}}$

Como $\dfrac{1}{x} = a \Rightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = 2}$

e $\dfrac{1}{y} = b \Rightarrow \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{3}{2}}$

Finalmente, $x + y = 2 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{4 + 3}{2} = \dfrac{7}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x + y = \dfrac{7}{2}}$

Scanned by CamScanner

GEOMETRIA PLANA

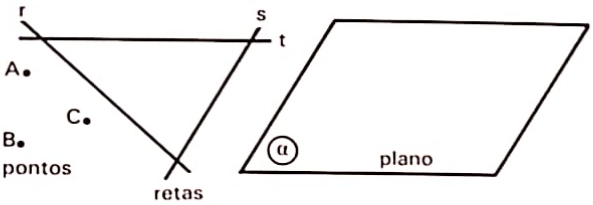
Você vai iniciar, agora, o estudo de uma das ciências mais belas criadas pelo homem: a Geometria. Nascida da necessidade de medir terras, encontra-se hoje presente, em todos os momentos do nosso dia-a-dia, nos tamanhos e formas dos objetos que nos cercam.

Na geometria admitimos a existência de três elementos intuitivos, isto é, sem definição: *ponto, reta* e *plano*. A partir desses três elementos são construídas todas as demais figuras geométricas. A bem da verdade, esses três elementos existem apenas em nossa imaginação. Tentaremos criar algumas imagens concretas para representar o ponto, a reta e o plano, com a finalidade de ajudar um pouco nossa intuição.

Um pingo d'água, a cabeça de um alfinete, um grão de areia, a marca deixada por um lápis num papel são concretizações aproximadas da idéia de ponto; são aproximadas, pois o ponto geométrico não tem "tamanho", isto é, não tem dimensão.

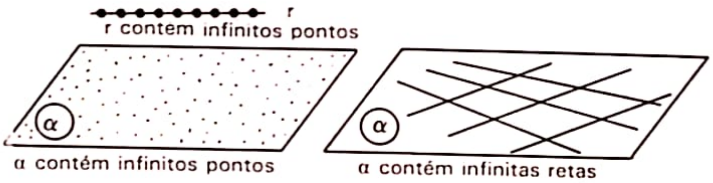
Pense, agora, num barbante bem esticado: a figura obtida assemelha-se a um "pedaço" de reta; "pedaço", pois a reta tem que ser entendida como infinitamente "comprida" em ambos os sentidos. Da mesma forma, você pode visualizar um plano imaginando uma folha de papel bem esticada: assim temos parte de um plano, pois o plano também é infinitamente extenso para todos os seus "lados".

Representaremos ponto, reta e plano por letras latinas maiúsculas e minúsculas e letras gregas, respectivamente, como na figura seguinte:



Estes elementos relacionam-se entre si através de certas propriedades não demonstráveis, chamadas *postulados*. Entre os postulados da geometria plana, é importante que você guarde os dois seguintes:

- toda reta é formada de infinitos pontos.
- todo plano contém infinitas retas e também infinitos pontos.

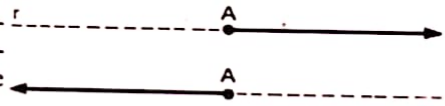


Elementos básicos

Como vimos há pouco, a partir de ponto, reta e plano obtemos todas as figuras geométricas. Leia com atenção a definição de algumas delas:

Segmento Sejam A e B dois pontos distintos de uma reta r. Chama-se segmento $\overline{AB}$ (ou $\overline{BA}$) ao conjunto de todos os pontos da reta r, situados entre os pontos A e B, incluindo os próprios pontos A e B.

Semi-reta Tomando um ponto A, numa reta r, esta fica dividida em dois conjuntos de pontos:

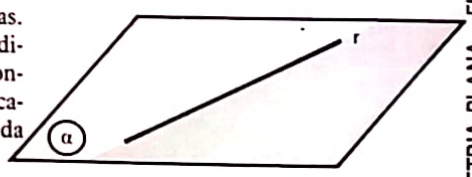


Semi-reta (de origem A) é cada um dos dois conjuntos de pontos em que o ponto A divide a reta r, incluindo o próprio ponto A.

Para se representar uma semi-reta de origem A escolhe-se um outro ponto (B, por exemplo) pertencente à semi-reta:

Assim, passamos a ter a semi-reta $\overrightarrow{AB}$.

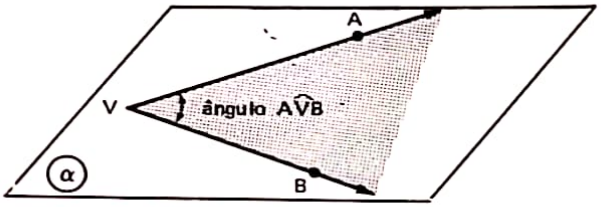
Semiplano Sabemos que um plano contém infinitas retas. "Pegando-se" uma reta r, dividimos o plano em dois conjuntos de pontos, situados cada um em um dos "lados da reta":



Chama-se semiplano (de origem r) cada um dos conjuntos de pontos em que um plano fica dividido por uma reta r, incluindo a própria reta.

Scanned by CamScanner

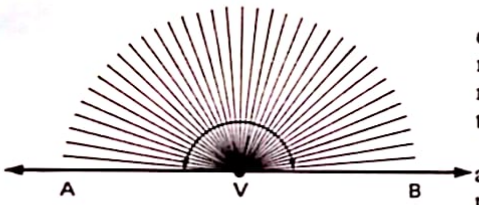
ÂNGULOS



Sejam $\overrightarrow{VA}$ e $\overrightarrow{VB}$ duas semi-retas de mesma origem, num plano α. Ângulo é, por definição, cada uma das regiões em que o plano α fica dividido por essas semi-retas, incluindo as semi-retas.

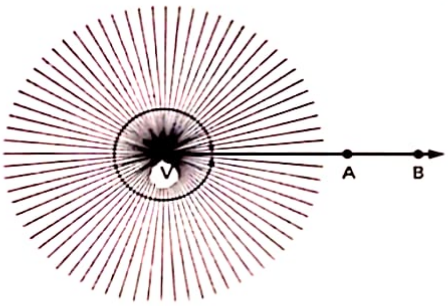
O ponto V chama-se vértice do ângulo, as semi-retas $\overrightarrow{VA}$ e $\overrightarrow{VB}$ são os lados do ângulo e o ângulo é representado por AV̂B ou BV̂A.

Tipos de Ângulos



Ângulo raso. Aquele em que os lados são duas semi-retas opostas, isto é, têm mesma origem e sentidos contrários.

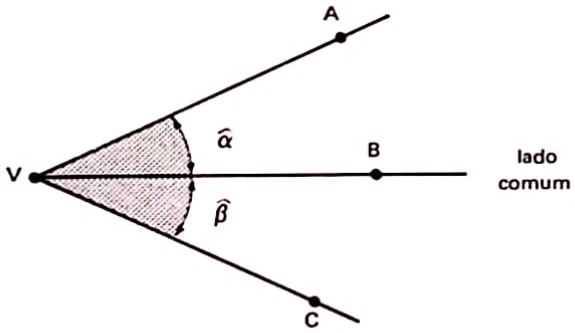
Ao ângulo raso associamos a medida de 180° (cento e oitenta graus).



Ângulo de uma volta. Aquele em que os lados são duas semi-retas coincidentes; seus pontos ocupam todo o plano.

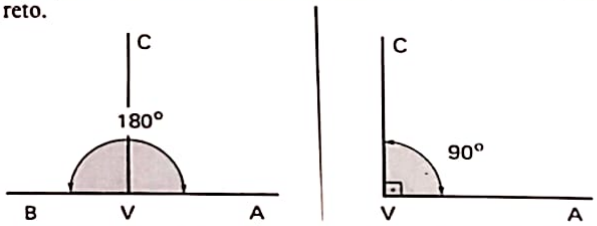
Ao ângulo de uma volta associamos a medida de 360° (trezentos e sessenta graus).

Ângulos adjacentes ou consecutivos. São dois ângulos que têm o mesmo vértice, um lado comum e não têm pontos interiores comuns.



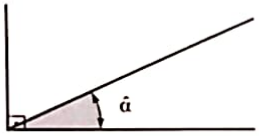
Os ângulos α̂ e β̂ da figura são adjacentes, pois têm o lado $\overrightarrow{VB}$ em comum (observe que são dois ângulos "encostados" um no outro).

Ângulo reto Num ângulo raso AV̂B, traçamos uma semi-reta $\overrightarrow{VC}$, separando o ângulo AV̂B em dois ângulos adjacentes AV̂C e CV̂B; se esses dois ângulos tiverem medidas iguais, então cada um deles será, por definição, um ângulo reto.



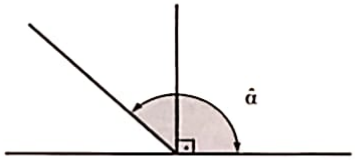
Ao ângulo reto fica então associada a medida de 90° (noventa graus).

Ângulo agudo É todo ângulo de medida entre 0° e 90°.



$0° < \hat{\alpha} < 90°$

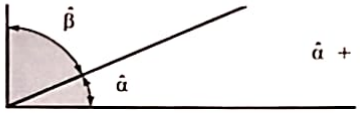
Ângulo obtuso É todo ângulo de medida entre 90° e 180°.



$90° < \hat{\alpha} < 180°$

Ângulos complementares São dois ângulos cuja soma das medidas é 90°. Dizemos que cada um deles é o *complemento* do outro.

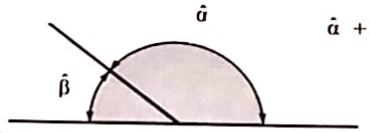
Como exemplo, os ângulos de 30° e 60° são complementares, pois 30° + 60° = 90°.



$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90°$

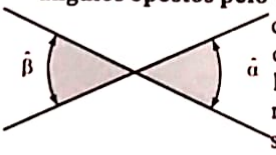
Ângulos suplementares São dois ângulos cuja soma das medidas é 180°. Cada um deles é o *suplemento* do outro.

Como exemplo, os ângulos de 110° e 70° são suplementares, pois 110° + 70° = 180°.



$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180°$

ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.) São dois ângulos que têm apenas o vértice em comum e tais que a união dos lados forma duas retas concorrentes, isto é, duas retas que possuem apenas um ponto comum.



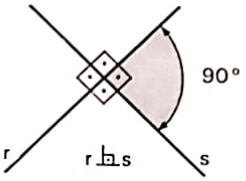
α̂ e β̂ são o.p.v.

Scanned by CamScanner

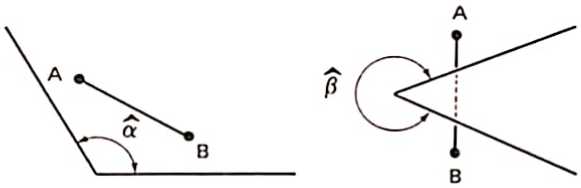
ATENÇÃO

• dois ângulos o.p.v. são sempre congruentes, isto é têm a mesma medida.

• duas retas concorrentes que formam quatro ângulos retos são chamadas retas perpendiculares.



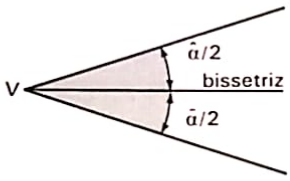
Ângulo convexo Aquele no qual dois quaisquer de seus pontos determinam um segmento totalmente contido no próprio ângulo.



O ângulo $\hat{\alpha}$ da figura é convexo, pois tomando os pontos A e B em qualquer "lugar" dentro do ângulo, o segmento AB continua sempre contido em $\hat{\alpha}$; já o ângulo $\hat{\beta}$ não é convexo, pois o segmento $\overline{AB}$ da figura tem seus extremos, "dentro" do ângulo e uma parte "fora" do ângulo. *Os ângulos não convexos serão chamados de côncavos.*

Repare que o ângulo de uma volta e todo ângulo menor ou igual a 180° é convexo; os demais são côncavos.

BISSETRIZ DE UM ÂNGULO



É a semi-reta de origem no vértice do ângulo e que o divide em dois outros ângulos de mesma medida.

MEDIDAS DE ÂNGULOS

A principal unidade usada para se medir ângulos (tanto na geometria como na vida prática) é o *grau*; a unidade grau é definida de tal modo que:

• o ângulo reto tem 90 graus ⇔ 90°
• o ângulo raso tem 180 graus ⇔ 180°
• o ângulo de uma volta tem 360 graus ⇔ 360°

A unidade grau é subdividida em unidades menores (submúltiplos) que são o *minuto* e o *segundo*, de tal modo que:

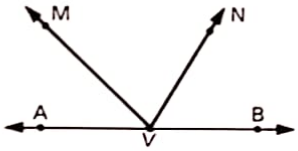
• cada grau é formado por 60 minutos: 1° ⇔ 60′
• cada minuto é formado por 60 segundos: 1′ ⇔ 60″

Exemplos

120 segundos são 2 minutos: 120″ ⇔ 2′
180 minutos são 3 graus: 180′ ⇔ 3°
1/2 grau são 30 minutos: (0,5)° ⇔ 30′
um décimo de grau são 6 minutos: (0,1)° ⇔ 6′
dois décimos de grau são 12 minutos: (0,2)° ⇔ 12′

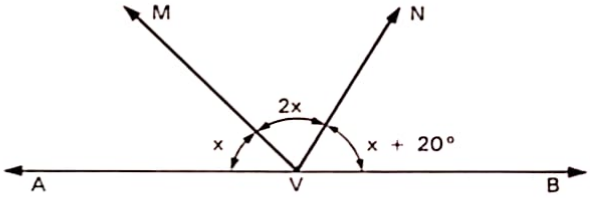
EXERCÍCIOS

1. Um ângulo raso $A\hat{V}B$ é seccionado em três outros ângulos pelas semi-retas $\overrightarrow{VM}$ e $\overrightarrow{VN}$, conforme a figura seguinte.



Sabendo que $M\hat{V}N = 2 \cdot A\hat{V}M$ e $N\hat{V}B = A\hat{V}M + 20°$, calcular os ângulos $A\hat{V}M$, $M\hat{V}N$ e $N\hat{V}B$.

Solução



Chamando a medida de $A\hat{V}M$ de x, temos:

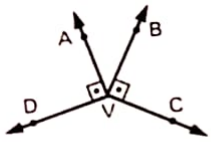
$$M\hat{V}N = 2 \cdot A\hat{V}M \Rightarrow M\hat{V}N = 2x$$

$$N\hat{V}B = A\hat{V}M + 20° \Rightarrow N\hat{V}B = x + 20°$$

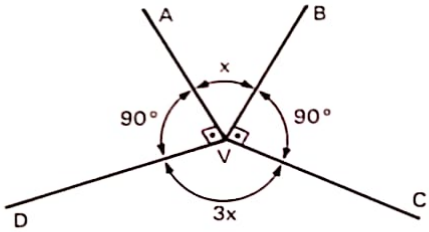
Como o ângulo $A\hat{V}B$ mede 180° (ângulo raso), obtemos: $x + 2x + x + 20° = 180° \Rightarrow 4x = 180° - 20° = 160° \Rightarrow x = \frac{160°}{4} \Rightarrow x = 40°$.

Portanto: $A\hat{V}M = x = 40°$, $M\hat{V}N = 2x = 80°$ e $N\hat{V}B = x + 20° = 60°$

2. Na figura ao lado o ângulo $C\hat{V}D$ é o triplo do ângulo $A\hat{V}B$. Calcule o ângulo convexo $A\hat{V}C$.



Solução



Fazemos $A\hat{V}B = x$. Como $C\hat{V}D$ é o triplo de $A\hat{V}B$, obtemos $C\hat{V}D = 3x$.

Os quatro ângulos da figura formam um ângulo de uma volta, logo sua soma é 360°, ou seja:

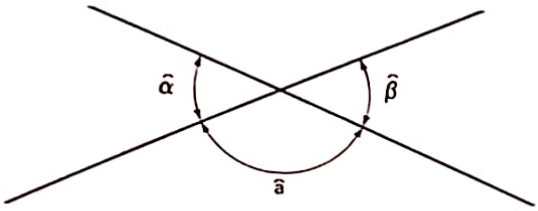
$$x + 90° + 3x + 90° = 360° \Rightarrow 4x + 180° = 360° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x = 180° \Rightarrow x = \frac{180}{4} = 45°.$$

Portanto: $A\hat{V}B = x = 45°$ e $C\hat{V}D = 3x = 135°$.

Então, o ângulo $A\hat{V}C$ convexo mede $x + 90° = 45° + 90° = 135°$.

3. Provar que se dois ângulos são opostos pelo vértice, então suas medidas são iguais, isto é, os ângulos são congruentes.

Scanned by CamScanner



Solução

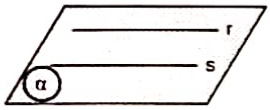
Sejam $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ os dois ângulos o.p.v. Observando a figura ao lado, vemos que:

$\hat{\alpha}$ e $\hat{a}$ formam um ângulo raso ⇒ $\boxed{\alpha + a = 180°}$ (I)

$\hat{\beta}$ e $\hat{a}$ formam um ângulo raso ⇒ $\boxed{\beta + a = 180°}$ (II)

Comparando I e II, obtemos $\alpha + a = \beta + a$ e, portanto: $\alpha = \beta$. Portanto, os ângulos $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, opostos pelo vértice, são congruentes.

PARALELISMO DE RETAS



Duas retas distintas são paralelas quando, estando contidas num mesmo plano, não possuem nenhum ponto comum.

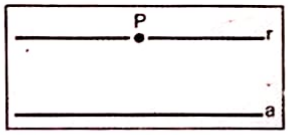
Postulado de Euclides

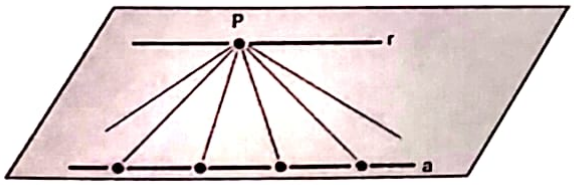
Há uma afirmação importante sobre retas paralelas que não é demonstrável; ela é simplesmente aceita como verdadeira; quando isso ocorre, como já vimos, dizemos que a afirmação é um postulado.

Postulado de Euclides

Por um ponto fora de uma reta, existe uma única reta paralela à reta dada.

Observe, então, que, no plano que contém a reta a e o ponto P, todas as infinitas retas que passam por P interceptam a reta a com exceção de apenas uma reta, que é a paralela a a.



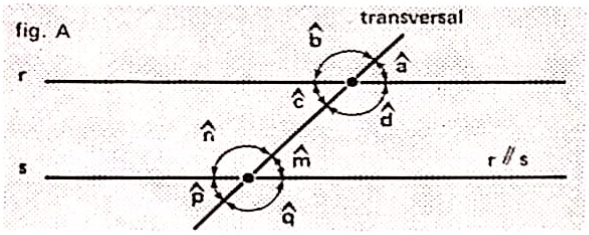


Observação

Duas retas *coincidentes* também são paralelas; neste caso elas têm todos os pontos em comum.

Paralelas com transversais

Dadas duas retas paralelas, chama-se *reta transversal* qualquer reta que intercepte ambas as paralelas. Essa transversal determina, na intersecção com uma das paralelas, quatro ângulos e, na intersecção com a outra paralela, mais quatro ângulos.



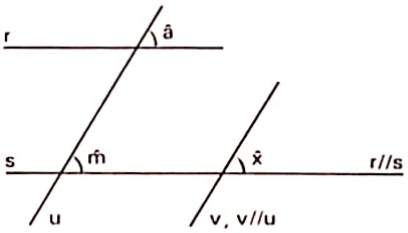
Na figura anterior, certos pares de ângulos recebem nomes especiais. Acompanhe:

- ângulos correspondentes: $\hat{a}$ e $\hat{m}$, $\hat{b}$ e $\hat{n}$, $\hat{c}$ e $\hat{p}$, $\hat{d}$ e $\hat{q}$
- ângulos alternos internos: $\hat{c}$ e $\hat{m}$, $\hat{d}$ e $\hat{n}$
- ângulos alternos externos: $\hat{a}$ e $\hat{p}$, $\hat{b}$ e $\hat{q}$
- ângulos colaterais internos: $\hat{d}$ e $\hat{m}$, $\hat{c}$ e $\hat{n}$
- ângulos colaterais externos: $\hat{a}$ e $\hat{q}$, $\hat{b}$ e $\hat{p}$

Agora vamos estabelecer as relações de "tamanhos" entre dois ângulos de um mesmo par. Para isso, temos o seguinte teorema:

Teorema fundamental do paralelismo de retas

Duas retas paralelas, cortadas por uma reta transversal, determinam ângulos correspondentes congruentes, isto é, de mesma medida.

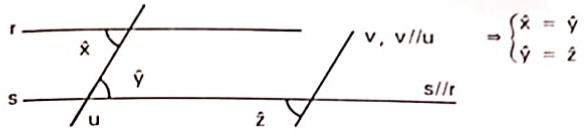


$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{a} = \hat{m} \\ \hat{m} = \hat{x} \end{cases}$$

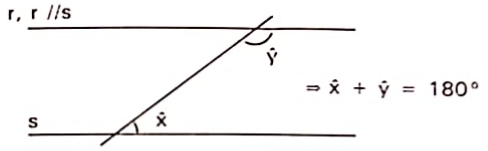
Na figura A temos: $\hat{b} = \hat{n}$, $\hat{c} = \hat{p}$, $\hat{d} = \hat{q}$. Guarde também as seguintes conseqüências do teorema anterior:

Duas retas paralelas, cortadas por uma reta transversal, determinam ângulos alternos congruentes.

Scanned by CamScanner

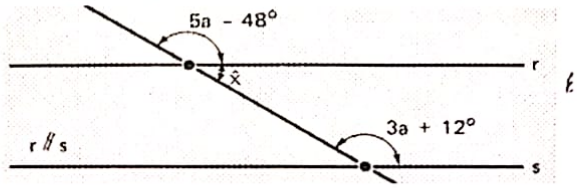


Duas retas paralelas, cortadas por uma transversal, determinam ângulos colaterais suplementares, isto é, suas medidas somam 180°.



EXERCÍCIOS

1. Na figura seguinte, calcule a medida do ângulo x̂.

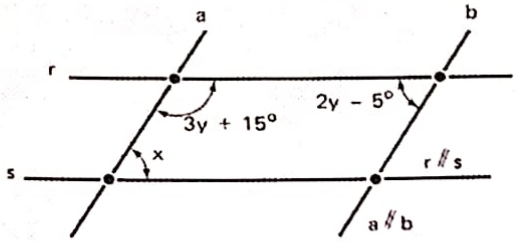


Solução

Sabendo que as retas r e s são paralelas e que os ângulos de medidas 5a − 48° e 3a + 12° são correspondentes, então, pelo teorema fundamental do paralelismo de retas, concluímos que esses ângulos são congruentes. Logo: 5a − 48° = = 3a + 12° ⇒ 2a = 60° ⇒ $\boxed{a = 30°}$

Observe, agora, que os ângulos x e 5a − 48° são suplementares, isto é: x + 5a − 48° = 180°. Como a = 30°, obtemos x + 150° − 48° = 180° e, portanto, $\boxed{x = 78°}$

2. Determine a medida do ângulo x̂, na figura seguinte.

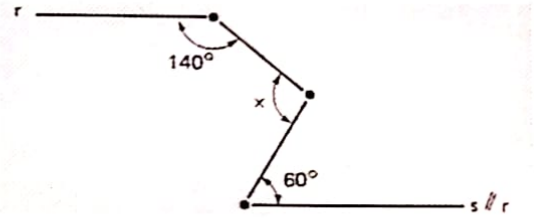


Solução

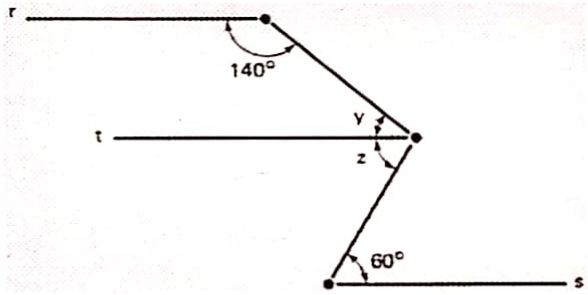
As retas a e b são paralelas e os ângulos de medidas 3y + + 15° e 2y − 5° são colaterais internos. Esses dois ângulos são, então, suplementares, ou seja: 3y + 15° + 2y − 5° = = 180°, o que nos dá 5y = 170° e y = 34°.

Agora, analisando as paralelas r e s com a transversal a, observamos que x e 3y + 15° somam 180°, pois são também colaterais internos. Assim: x + 3y + 15° = 180° e, como y = 34°, obtemos x + 102° + 15° = 180°, finalmente, x = 63°.

3. Determine a medida do ângulo x̂, na figura seguinte:



Solução



Pelo vértice do ângulo x̂, traçamos uma reta t, auxiliar, paralela a r (e, portanto, também a s), dividindo o ângulo x̂ em duas partes ŷ e ẑ (não tire conclusões apressadas: as partes y e z não são necessariamente iguais).

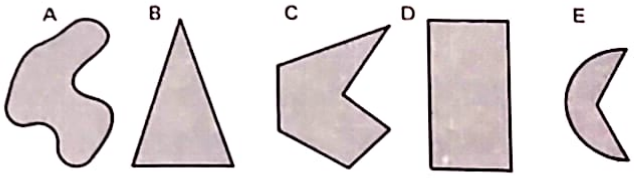
Agora, olhe só para as retas paralelas r e t: os ângulos de 140° e y são colaterais internos. Logo:

$$140° + y = 180° \Rightarrow \boxed{y = 40°}$$

Observando as paralelas t e s, vemos que os ângulos ẑ e 60° são alternos internos. Logo: z = 60°. Como x = y + z, obtemos $\boxed{x = 40° + 60° = 100°}$

POLÍGONOS

Para entender o que é um polígono use a imaginação, um pedaço de papel e uma tesoura. Imagine um plano como um pedaço de papel bem esticado e, com uma tesoura, recorte pedaços dele; obtemos, assim, uma série de figuras geométricas:



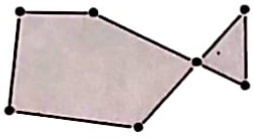
Scanned by CamScanner

Nas figuras B, C e D, o contorno é formado exclusivamente por segmentos; nas figuras A e E, o contorno tem partes curvas.

> Chamaremos de polígonos as regiões do plano cujos contornos são formados apenas por segmentos.

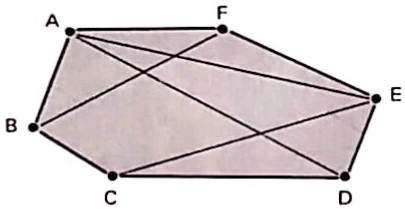
Dessa forma, as figuras B, C e D são polígonos, enquanto A e E não.

Observe agora a figura, seguinte:



Essa figura é um polígono? Não! Ela é construída por dois polígonos: um de 5 lados e outro de 3. Experimente recortar essa figura com uma tesoura; você não vai conseguir, pois ela se "desmonta" em duas que são justamente os dois polígonos citados antes.

Em todos os polígonos temos os seguintes elementos (acompanhe na figura seguinte, que serve como exemplo):



Lados São os segmentos que formam o contorno: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ etc.

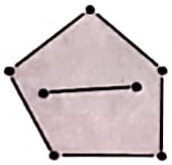
Vértices São os pontos comuns a dois lados consecutivos: A, B, C, D etc.

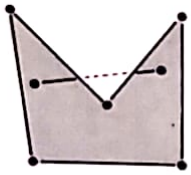
Diagonais São os segmentos que unem dois vértices não consecutivos: $\overline{AE}$, $\overline{AD}$, $\overline{BF}$, $\overline{CE}$ etc.

Os polígonos recebem nomes de acordo com o número de seus lados. Os mais importantes são:

3 lados	triângulo	9 lados	eneágono
4 lados	quadrilátero	10 lados	decágono
5 lados	pentágono	11 lados	undecágono
6 lados	hexágono	12 lados	dodecágono
7 lados	heptágono	15 lados	pentadecágono
8 lados	octógono	20 lados	icoságono

Esses nomes são válidos, tanto para polígonos convexos como para côncavos. Um polígono é convexo quando dois quaisquer de seus pontos determinam um segmento totalmente contido no próprio polígono; caso contrário, o polígono é côncavo. Na figura seguinte, temos um pentágono convexo e um côncavo.



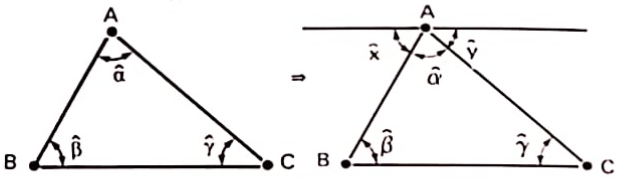


Soma dos ângulos internos de um polígono

Triângulos Comecemos pelo polígono mais simples, o triângulo.

> **Teorema angular de Tales**
>
> A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer vale 180°.

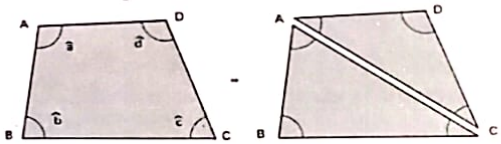
A demonstração é simples. Acompanhe.



Seja o triângulo ABC, cujos ângulos internos chamamos, na figura anterior, de $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$. Traçamos, pelo ponto A, uma paralela ao lado $\overline{BC}$; assim, adjacentes do ângulo $\hat{\alpha}$, aparecem os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Dessa forma, no ponto A temos: $\hat{x} + \hat{\alpha} + \hat{y} = 180°$. Como os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{\beta}$, $\hat{y}$ e $\hat{\gamma}$ são alternos internos, concluímos que $\hat{x} = \hat{\beta}$ e $\hat{y} = \hat{\gamma}$. Pronto! Substituindo as duas últimas igualdades na soma $\hat{x} + \hat{\alpha} + \hat{y} = 180°$ obtemos: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180°$.

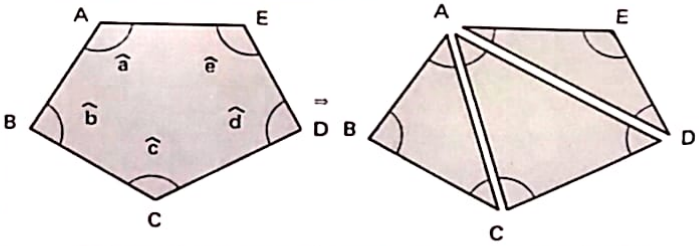
Agora vamos ver o que acontece com a soma dos ângulos internos de um polígono com mais de três lados. Para isso, vamos examinar alguns casos particulares.

Por exemplo, um quadrilátero, que tem 4 ângulos internos, pode ser decomposto em dois triângulos, traçando-se uma de suas diagonais:



Como em cada triângulo a soma dos ângulos internos é 180°, concluímos que no quadrilátero a soma dos quatro ângulos internos é 2×180°, isto é, 360°. Portanto: $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = 360°$.

Analisemos, agora, um pentágono. Ele tem 5 ângulos internos e pode ser dividido em 3 triângulos através de duas diagonais traçadas a partir de um mesmo vértice:



Novamente, em cada triângulo, a soma dos ângulos internos é 180° e, como temos três triângulos, a soma dos ângulos internos do pentágono é 3×180° = 540°. Portanto: $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} + \hat{e} = 540°$.

Aplicando este raciocínio para os polígonos de 6, 7, 8, 9, ... lados, você perceberá que eles ficam divididos respectivamente em 4, 5, 6, 7, ... triângulos.

Repare: 4	lados	no	polígono	dão	2	triângulos
5	"	"	"	"	3	"
6	"	"	"	"	4	"
7	"	"	"	"	5	"

Conclusão: o número de triângulos em que um polígono fica dividido ao traçarmos suas diagonais por um mesmo vér-

Scanned by CamScanner

tice é igual ao número de lados do polígono menos dois: um polígono com n lados ($n \in \mathbb{N}$, $n > 3$) fica dividido em $n - 2$ triângulos. Como a soma dos ângulos internos em cada um desses triângulos é 180°, podemos afirmar que:

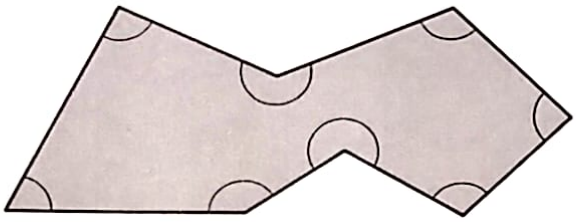
> A soma dos ângulos internos de um polígono com n lados é igual a $(n - 2) \cdot 180°$.

Chamando de S_i a soma dos ângulos internos do polígono, temos a fórmula

$$\boxed{S_i = (n - 2) \cdot 180°}$$

EXERCÍCIOS

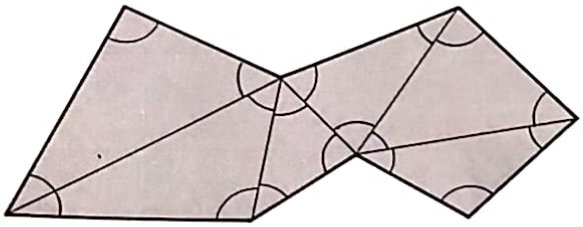
1. Determine a soma dos ângulos internos do polígono da figura seguinte:



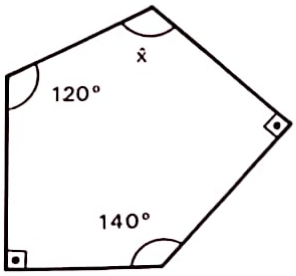
Solução

O polígono tem 8 lados; portanto, a soma dos seus 8 ângulos internos é: $S_i = (8 - 2) \cdot 180° \Rightarrow \boxed{S_i = 1080°}$.

Repare que a fórmula obtida na teoria pode ser usada também para polígonos côncavos como esse, pois ele pode ser dividido em 6 triângulos, conforme a figura seguinte:



2. Calcule a medida do ângulo $\hat{x}$ da figura:



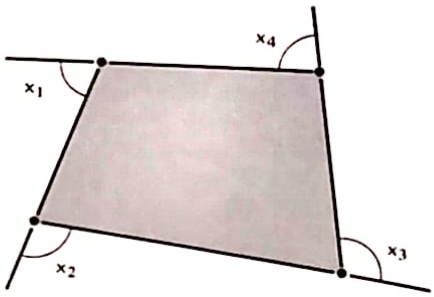
Solução

Como a figura é um pentágono, a soma de seus 5 ângulos internos é $S_i = (5 - 2) \cdot 180° = 540°$. Portanto:

$x + 90° + 140° + 90° + 120° = 540°$, obtendo-se:

$\boxed{x = 100°}$.

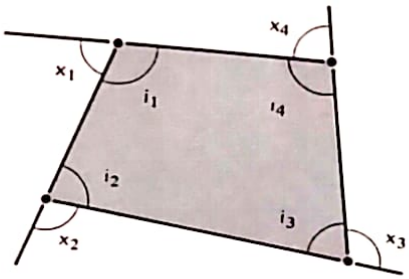
3. Na figura ao lado, calcule a soma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.



Solução

Como a figura é um quadrilátero, podemos afirmar que a soma dos 4 ângulos internos é $S_i = (4 - 2) \cdot 180° = 360°$. Isto significa que:

$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 360°$



Porém, temos:

$$\begin{cases} x_1 + i_1 = 180° \\ x_2 + i_2 = 180° \\ x_3 + i_3 = 180° \\ x_4 + i_4 = 180° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 180° - i_1 \\ x_2 = 180° - i_2 \\ x_3 = 180° - i_3 \\ x_4 = 180° - i_4 \end{cases}$$

Somando as quatro últimas igualdades, vem:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \times 180° - \underbrace{(i_1 + i_2 + i_3 + i_4)}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 720° - 360° = 360°$$

Portanto a soma pedida vale 360°.

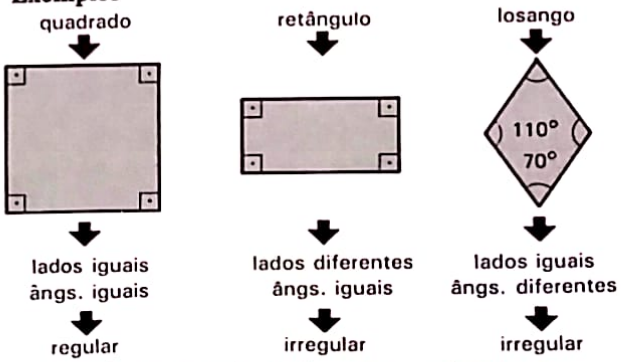
Agora, atenção! Os ângulos x_1, x_2, x_3 e x_4 do problema anterior são os ângulos externos do quadrilátero; e tem mais: o fato da soma desses ângulos externos ser 360° não é, em absoluto, característica do quadrilátero; é regra geral, ou seja:

> A soma dos ângulos externos (um em cada vértice) de um polígono convexo é 360°.

Polígonos regulares

Um polígono é regular quando todos seus lados têm o mesmo "tamanho" e todos seus ângulos internos são iguais.

Exemplos



Os polígonos regulares têm duas propriedades importantes:

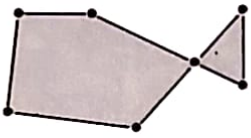
Scanned by CamScanner

Nas figuras B, C e D, o contorno é formado exclusivamente por segmentos; nas figuras A e E, o contorno tem partes curvas.

> Chamaremos de polígonos as regiões do plano cujos contornos são formados apenas por segmentos.

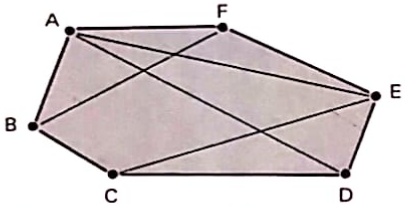
Dessa forma, as figuras B, C e D são polígonos, enquanto A e E não.

Observe agora a figura, seguinte:



Essa figura é um polígono? Não! Ela é construída por dois polígonos: um de 5 lados e outro de 3. Experimente recortar essa figura com uma tesoura; você não vai conseguir, pois ela se "desmonta" em duas que são justamente os dois polígonos citados antes.

Em todos os polígonos temos os seguintes elementos (acompanhe na figura seguinte, que serve como exemplo):



Lados São os segmentos que formam o contorno: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ etc.

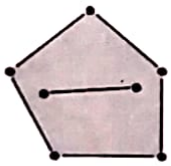
Vértices São os pontos comuns a dois lados consecutivos: A, B, C, D etc.

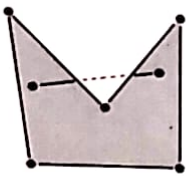
Diagonais São os segmentos que unem dois vértices não consecutivos: $\overline{AE}$, $\overline{AD}$, $\overline{BF}$, $\overline{CE}$ etc.

Os polígonos recebem nomes de acordo com o número de seus lados. Os mais importantes são:

3 lados	triângulo	9 lados	eneágono
4 lados	quadrilátero	10 lados	decágono
5 lados	pentágono	11 lados	undecágono
6 lados	hexágono	12 lados	dodecágono
7 lados	heptágono	15 lados	pentadecágono
8 lados	octógono	20 lados	icoságono

Esses nomes são válidos, tanto para polígonos convexos como para côncavos. Um polígono é convexo quando dois quaisquer de seus pontos determinam um segmento totalmente contido no próprio polígono; caso contrário, o polígono é côncavo. Na figura seguinte, temos um pentágono convexo e um côncavo.



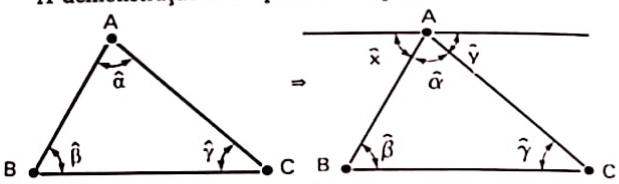


Soma dos ângulos internos de um polígono

Triângulos Comecemos pelo polígono mais simples, o triângulo.

> **Teorema angular de Tales**
>
> A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer vale 180°.

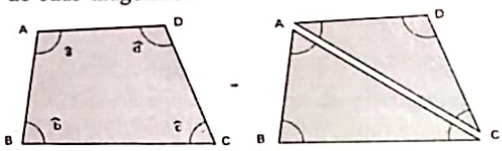
A demonstração é simples. Acompanhe.



Seja o triângulo ABC, cujos ângulos internos chamamos, na figura anterior, de $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$. Traçamos, pelo ponto A, uma paralela ao lado $\overline{BC}$; assim, adjacentes do ângulo $\hat{\alpha}$, aparecem os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Dessa forma, no ponto A temos: $\hat{x} + \hat{\alpha} + \hat{y} = 180°$. Como os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{\beta}$, $\hat{y}$ e $\hat{\gamma}$ são alternos internos, concluímos que $\hat{x} = \hat{\beta}$ e $\hat{y} = \hat{\gamma}$. Pronto! Substituindo as duas últimas igualdades na soma $\hat{x} + \hat{\alpha} + \hat{y} = 180°$ obtemos: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180°$.

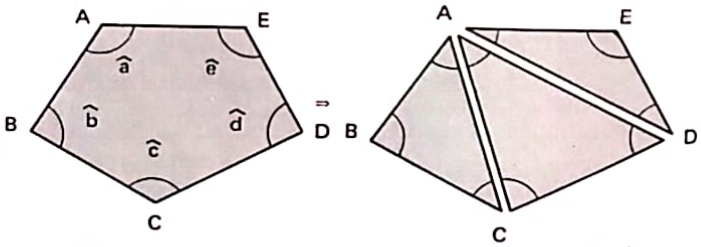
Agora vamos ver o que acontece com a soma dos ângulos internos de um polígono com mais de três lados. Para isso, vamos examinar alguns casos particulares.

Por exemplo, um quadrilátero, que tem 4 ângulos internos, pode ser decomposto em dois triângulos, traçando-se uma de suas diagonais:



Como em cada triângulo a soma dos ângulos internos é 180°, concluímos que no quadrilátero a soma dos quatro ângulos internos é 2×180°, isto é, 360°. Portanto: $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = 360°$.

Analisemos, agora, um pentágono. Ele tem 5 ângulos internos e pode ser dividido em 3 triângulos através de duas diagonais traçadas a partir de um mesmo vértice:



Novamente, em cada triângulo, a soma dos ângulos internos é 180° e, como temos três triângulos, a soma dos ângulos internos do pentágono é 3×180° = 540°. Portanto: $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} + \hat{e} = 540°$.

Aplicando este raciocínio para os polígonos de 6, 7, 8, 9, ... lados, você perceberá que eles ficam divididos respectivamente em 4, 5, 6, 7, ... triângulos.

Repare: 4	lados	no	polígono	dão	2	triângulos
5	"	"	"	"	3	"
6	"	"	"	"	4	"
7	"	"	"	"	5	"

Conclusão: o número de triângulos em que um polígono fica dividido ao traçarmos suas diagonais por um mesmo vér-

Scanned by CamScanner

tice é igual ao número de lados do polígono menos dois: um polígono com n lados ($n \in \mathbb{N}$, $n > 3$) fica dividido em $n - 2$ triângulos. Como a soma dos ângulos internos em cada um desses triângulos é 180°, podemos afirmar que:

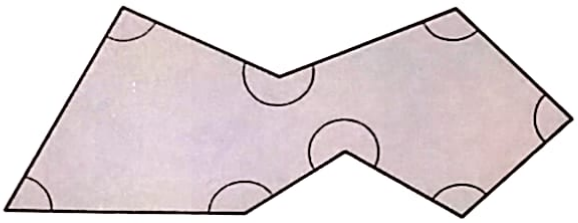
> A soma dos ângulos internos de um polígono com n lados é igual a $(n - 2) \cdot 180°$.

Chamando de S_i a soma dos ângulos internos do polígono, temos a fórmula

$$\boxed{S_i = (n - 2) \cdot 180°}$$

EXERCÍCIOS

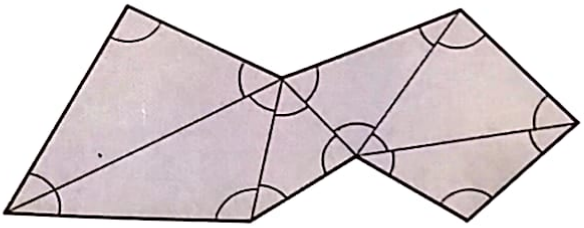
1. Determine a soma dos ângulos internos do polígono da figura seguinte:



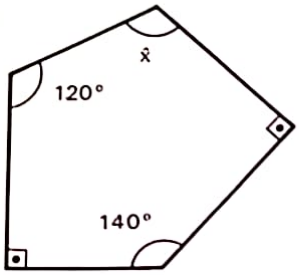
Solução

O polígono tem 8 lados; portanto, a soma dos seus 8 ângulos internos é: $S_i = (8 - 2) \cdot 180° \Rightarrow \boxed{S_i = 1080°}$.

Repare que a fórmula obtida na teoria pode ser usada também para polígonos côncavos como esse, pois ele pode ser dividido em 6 triângulos, conforme a figura seguinte:



2. Calcule a medida do ângulo $\hat{x}$ da figura:



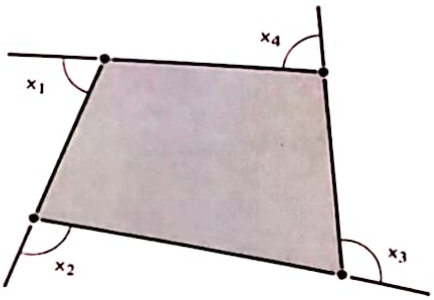
Solução

Como a figura é um pentágono, a soma de seus 5 ângulos internos é $S_i = (5 - 2) \cdot 180° = 540°$. Portanto:

$x + 90° + 140° + 90° + 120° = 540°$, obtendo-se:

$\boxed{x = 100°}$.

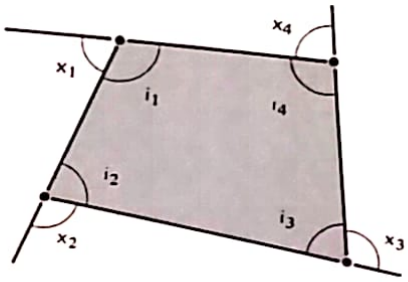
3. Na figura ao lado, calcule a soma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.



Solução

Como a figura é um quadrilátero, podemos afirmar que a soma dos 4 ângulos internos é $S_i = (4 - 2) \cdot 180° = 360°$. Isto significa que:

$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 360°$



Porém, temos:

$$\begin{cases} x_1 + i_1 = 180° \\ x_2 + i_2 = 180° \\ x_3 + i_3 = 180° \\ x_4 + i_4 = 180° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 180° - i_1 \\ x_2 = 180° - i_2 \\ x_3 = 180° - i_3 \\ x_4 = 180° - i_4 \end{cases}$$

Somando as quatro últimas igualdades, vem:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \times 180° - \underbrace{(i_1 + i_2 + i_3 + i_4)}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 720° - 360° = 360°$$

Portanto a soma pedida vale 360°.

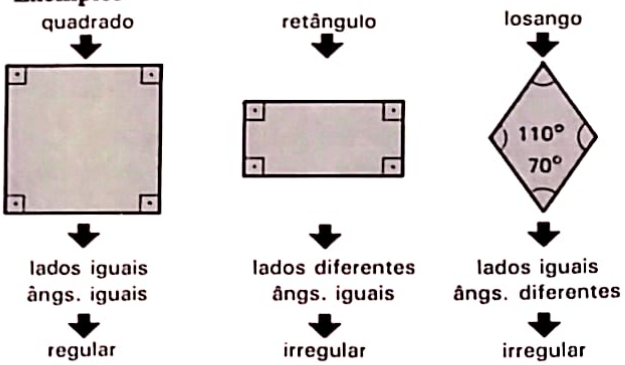
Agora, atenção! Os ângulos x_1, x_2, x_3 e x_4 do problema anterior são os ângulos externos do quadrilátero; e tem mais: o fato da soma desses ângulos externos ser 360° não é, em absoluto, característica do quadrilátero; é regra geral, ou seja:

> A soma dos ângulos externos (um em cada vértice) de um polígono convexo é 360°.

Polígonos regulares

Um polígono é regular quando todos seus lados têm o mesmo "tamanho" e todos seus ângulos internos são iguais.

Exemplos



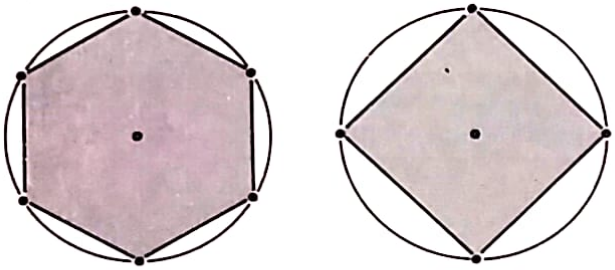
Os polígonos regulares têm duas propriedades importantes:

Scanned by CamScanner

• podemos calcular a medida a_i de cada um de seus ângulos internos. Calculamos a soma S_i de todos eles e a dividimos pelo número de lados:

$$\boxed{a_i = \frac{S_i}{n}} \quad \text{ou} \quad \boxed{a_i = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}}$$

• todo polígono regular é inscritível numa circunferência, isto é, sempre é possível desenhar uma circunferência que passe por todos os vértices do polígono.



EXERCÍCIOS

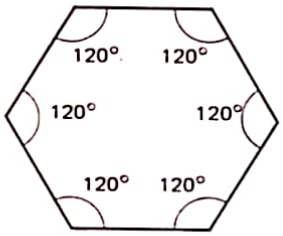
1. Determine a medida do ângulo interno do hexágono regular.

Solução

Calculamos inicialmente a soma dos ângulos internos:

$$\begin{cases} S_i = (n-2)\cdot 180° \\ n = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_i = (6-2)\cdot 180° = 720°$$



Como o hexágono é regular, todos os seus 6 ângulos internos são iguais. Logo: $a_i = \frac{S_i}{6} = \frac{720°}{6} = 120°$.

2. Qual é o polígono regular cujo ângulo interno mede 144°?

Solução

Como o polígono é regular, usamos a fórmula do ângulo interno: $a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

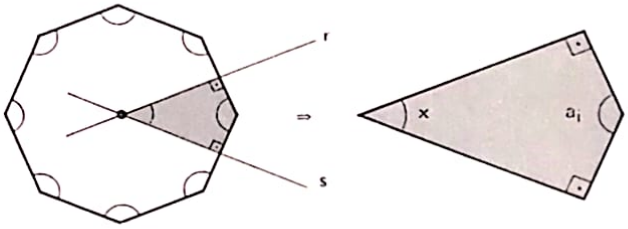
Substituindo a_i por 144°, obtemos $144° = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

Resolvendo a equação, vem $\boxed{n = 10}$. Portanto, o polígono é um decágono regular.

3. Calcule a medida do ângulo formado pelas mediatrizes de dois lados consecutivos de um octógono regular (lembre-se: *mediatriz* é a reta perpendicular ao lado, passando pelo ponto médio deste).

Solução

No octógono a seguir, as retas r e s são mediatrizes de dois lados consecutivos:



Percebemos que se forma um quadrilátero cujos quatro ângulos internos são: dois ângulos retos, o ângulo procurado $\hat{x}$ e um ângulo interno do octógono.

O ângulo interno do octógono vale $a_i = \frac{(8-2)\cdot 180°}{8} = 135°$.

Já no quadrilátero, temos: $x + 90° + a_i + 90° = 360°$, ou, $x + 90° + 135° + 90° = 360°$, vindo, então, $\boxed{x = 45°}$.

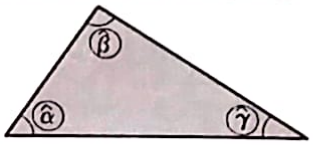
TRIÂNGULOS

Introdução:

Vamos estudar agora o polígono mais simples: o triângulo. É importante que você conheça bem as propriedades dos triângulos, pois todos os polígonos podem ser decompostos em triângulos; por exemplo, o pentágono da figura abaixo pode ser decomposto em três triângulos.

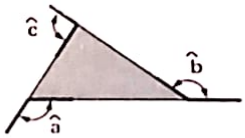
Propriedades angulares dos triângulos

Soma dos ângulos internos Já vimos, ao estudar os polígonos, que a soma das medidas dos três ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°.



$$\Rightarrow \quad \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180°$$

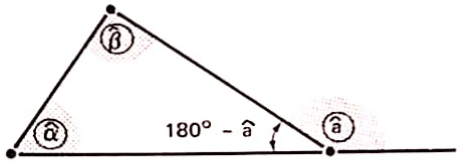
Soma dos ângulos externos: também já sabemos que a soma das medidas dos três ângulos externos de um triângulo (um em cada vértice) é sempre igual a 360°.



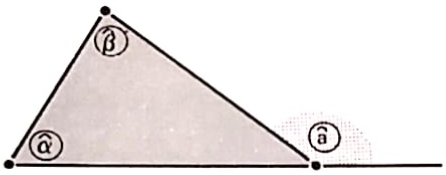
$$\Rightarrow \quad \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 360°$$

Scanned by CamScanner

Teorema do ângulo externo
Cada ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes.



Essa última propriedade é muito fácil de ser compreendida. Basta lembrar que o ângulo interno adjacente ao ângulo externo â vale 180° − â.



$\hat{a} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$

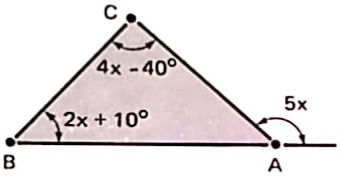
Como a soma das medidas dos três ângulos internos do triângulo é 180°, obtemos $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + (180° - \hat{a}) = 180°$ ou $\hat{\alpha} + \hat{\beta} - \hat{a} = 0$ e, portanto: $\boxed{\hat{a} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}}$.

EXERCÍCIOS

1. Num triângulo ABC, as medidas dos ângulos internos de vértices B e C são dadas por 2x + 10° e 4x − 40°. Se a medida do ângulo externo de vértice A é 5x, determine cada ângulo interno desse triângulo.

Solução

Fazemos uma figura que represente os dados do problema:

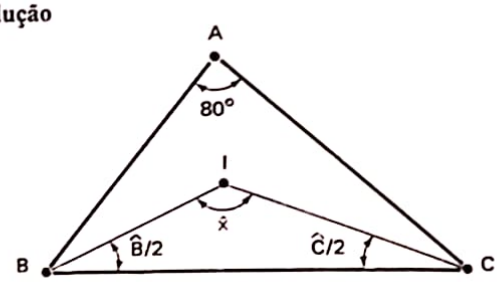


Temos, então, um ângulo externo de medida 5x e dois ângulos internos (não adjacentes ao externo) de medidas 4x − 40° e 2x + 10°. Pelo teorema do ângulo externo, podemos escrever: 5x = (4x − 40°) + (2x + 10°) ou 5x = 6x − 30° e, finalmente, $\boxed{x = 30°}$.

Então, os ângulos internos do triângulo são:
$\hat{B} = 2x + 10° = 2 \cdot 30° + 10° = 70°$
$\hat{C} = 4x - 40° = 4 \cdot 30° - 40° = 80°$
$\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 180° - 70° - 80° = 30°$

2. Num triângulo ABC, o ângulo interno de vértice A mede 80°. Calcule o ângulo determinado pelas bissetrizes dos ângulos internos de vértices B e C.

Solução



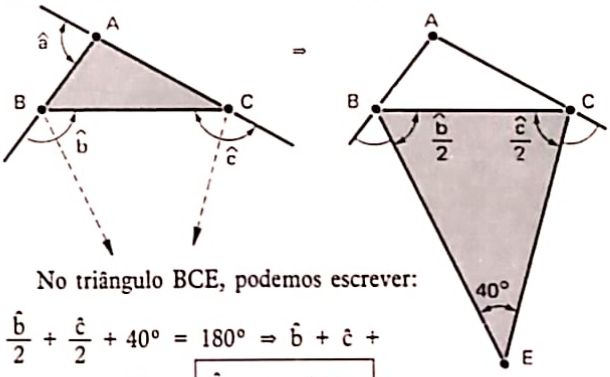
No triângulo ABC temos: $\hat{A} = 80°$ e $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$, o que nos dá: $\hat{B} + \hat{C} = 100°$.
Observe agora o triângulo BIC; nele, temos:

$x + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 180°$ ou $x + \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 180°$ e, como $\hat{B} + \hat{C} = 100°$, obtemos $x + \frac{100°}{2} = 180°$ ou $x + 50° = 180°$, vindo, finalmente, $\boxed{x = 130°}$.

3. Num triângulo ABC, as bissetrizes dos ângulos externos de vértices B e C formam um ângulo de medida 40°. Calcule o ângulo interno de vértice A.

Solução

Chamamos de $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ os ângulos externos e traçamos as bissetrizes externas de vértices B e C, que se cruzam em E.



No triângulo BCE, podemos escrever:

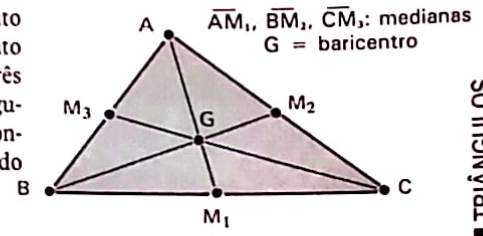
$\frac{\hat{b}}{2} + \frac{\hat{c}}{2} + 40° = 180° \Rightarrow \hat{b} + \hat{c} + 80° = 360° \Rightarrow \boxed{\hat{b} + \hat{c} = 280°}$.

Agora, no triângulo ABC, os três ângulos externos $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ somam 360°, isto é, $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 360°$ e, como $\hat{b} + \hat{c} = 280°$, obtemos $\hat{a} = 80°$. Como $\hat{A} + \hat{a} = 180°$, obtemos

$\hat{A} = 180° - \hat{a} = 180° - 80° \Rightarrow \boxed{\hat{A} = 100°}$.

Elementos lineares dos triângulos

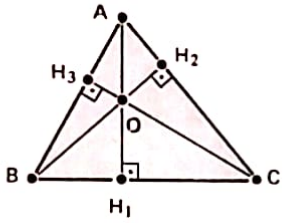
Mediana É o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. As três medianas de qualquer triângulo passam por um mesmo ponto, chamado baricentro do triângulo.



Altura É o segmento que une um vértice ao lado oposto (ou ao prolongamento deste), sendo perpendicular ao mes-

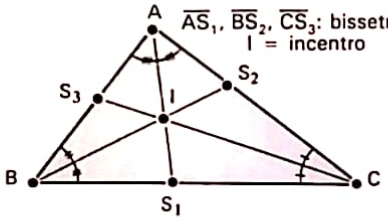
Scanned by CamScanner

mo. As três alturas de qualquer triângulo passam por um mesmo ponto, chamado ortocentro do triângulo.

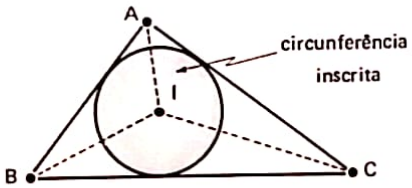


$\overline{AH_1}$, $\overline{BH_2}$, $\overline{CH_3}$: alturas
O = ortocentro

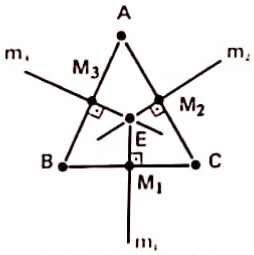
Bissetriz interna É o segmento, contido no triângulo, que divide o ângulo interno em dois ângulos iguais. As três bissetrizes internas de qualquer triângulo passam por um mesmo ponto, chamado incentro do triângulo. O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo, isto é, da circunferência que tangencia os três lados do triângulo.



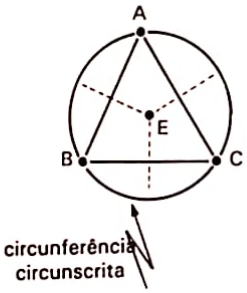
$\overline{AS_1}$, $\overline{BS_2}$, $\overline{CS_3}$: bissetrizes
I = incentro



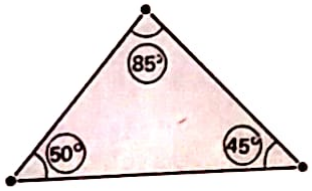
Mediatriz É a reta perpendicular ao lado, passando pelo ponto médio do mesmo. As três mediatrizes de qualquer triângulo passam por um mesmo ponto, chamado circuncentro do triângulo. O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, isto é, da circunferência que passa pelos três vértices do triângulo.



m_1, m_2, m_3: mediatrizes
E = circuncentro

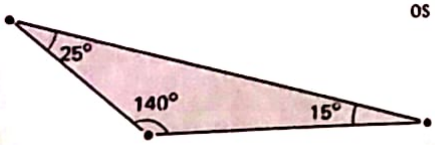


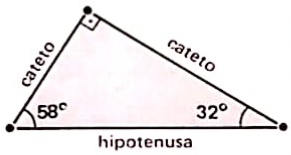
Classificação e propriedades dos triângulos



Triângulo acutângulo Todos os seus ângulos internos são agudos. Por exemplo, o triângulo ao lado:

Triângulo obtusângulo Um ângulo interno é obtuso (e os outros dois são agudos).

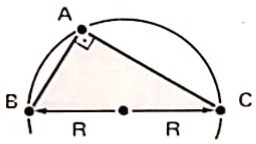


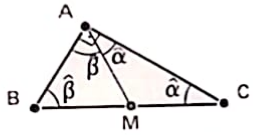


Triângulo retângulo Um ângulo interno é reto (e os outros dois são agudos). Os lados que determinam o ângulo reto chamam-se catetos do triângulo e o lado oposto ao ângulo reto chama-se hipotenusa.

Guarde as seguintes propriedades:

> • Todo triângulo retângulo pode ser inscrito numa semicircunferência, cujo diâmetro é igual à hipotenusa do triângulo.

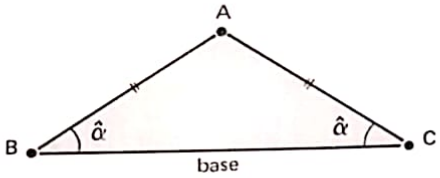




$AM = BM = MC = \frac{BC}{2}$

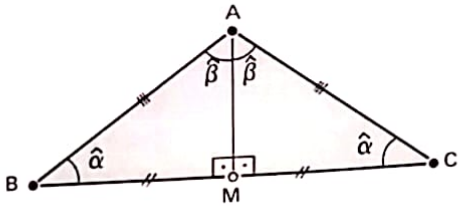
> • A mediana relativa à hipotenusa tem por medida a metade da medida da hipotenusa. Essa mediana divide o triângulo em dois triângulos isósceles.

Triângulo isósceles Tem dois lados iguais. O terceiro lado chama-se base.

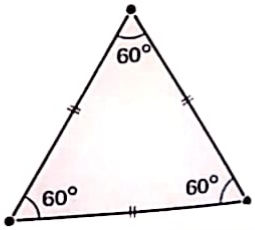


Para todo triângulo isósceles valem as seguintes propriedades:

> • Os dois ângulos adjacentes à base são iguais.
> • A mediana traçada em relação à base é também altura e bissetriz interna.



Triângulo eqüilátero Tem os três lados iguais e também os três ângulos iguais, medindo 60° cada um.

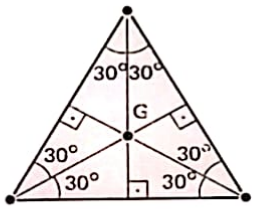


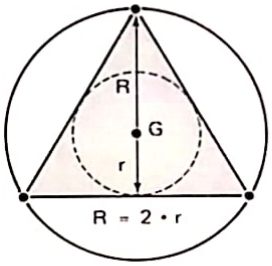
Para todo triângulo eqüilátero, valem as seguintes propriedades:

> • A mediana traçada em relação a qualquer um dos lados é também bissetriz interna e altura.

Scanned by CamScanner

• O baricentro G é também incentro e circuncentro, isto é, os centros das circunferências inscrita e circunscrita coincidem.





• O raio R da circunferência circunscrita é o dobro do raio r da circunferência inscrita.

EXERCÍCIOS

1. Num triângulo ABC, os ângulos internos de vértices B e C medem, respectivamente, 70° e 30°. Calcule o ângulo agudo determinado pela bissetriz interna de vértice A e a bissetriz externa de vértice C.

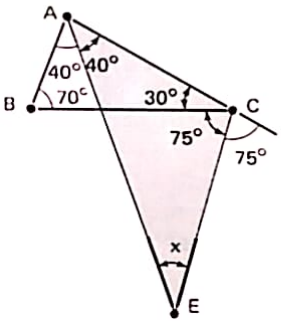
Solução

Sabendo que $\hat{B} = 70°$ e $\hat{C} = 30°$, concluímos que $\hat{A} = 80°$, pois $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$. Se o ângulo interno $\hat{C}$ mede 30°, então o ângulo externo de vértice C mede 150°.

Fazemos agora a figura, desenhando as bissetrizes às quais se refere o problema (as bissetrizes interceptam-se em E). Para obter o ângulo $\hat{x}$, basta observar que ele é interno ao triângulo EAC. Como os ângulos internos desse triângulo somam 180° (como sempre), escrevemos:

$x + 40° + (30° + 75°) = 180°$

e obtemos $\boxed{x = 35°}$.

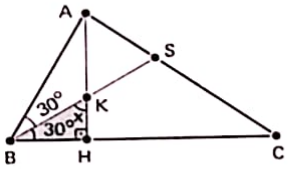


2. Num triângulo ABC, os ângulos internos, $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ medem, respectivamente, 80°, 60° e 40°. Calcule o ângulo formado pela bissetriz interna de vértice B e a altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

Solução

No triângulo BHK, temos: $30° + 90° + x = 180°$,

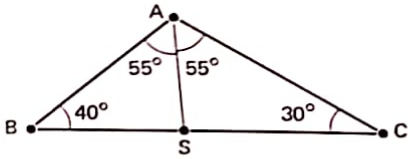
obtendo-se $\boxed{x = 60°}$.



3. Os ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, de um triângulo ABC, medem, respectivamente, 110°, 40° e 30°. Calcule o ângulo formado pela altura relativa ao lado $\overline{BC}$ e a bissetriz interna de $\hat{A}$.

Solução

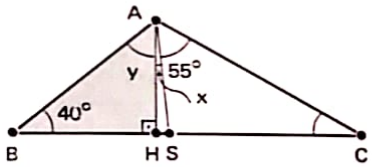
Traçando a bissetriz interna $\overline{AS}$, do ângulo $\hat{A}$, dividimos o ângulo de 110° em dois de 55°.



Traçamos agora a altura $\overline{AH}$, relativa ao lado $\overline{BC}$, dividindo o ângulo $B\hat{A}S$ de 55° em dois outros: x e y.

Como a altura $\overline{AH}$ é perpendicular ao lado $\overline{BC}$, ela forma com este um ângulo de 90°. Portanto, no triângulo AHB, temos $y + 90° + 40° = 180°$, de onde obteremos

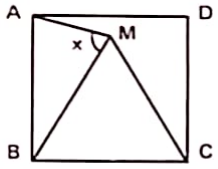
$\boxed{y = 50°}$.



Por outro lado, no vértice A do triângulo ABC, o ângulo todo mede 110°, ou seja, $y + x + 55° = 110°$. Substituindo $y = 50°$ na soma anterior, vem

$\boxed{x = 5°}$.

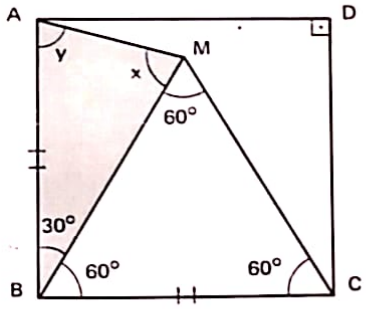
4. Na figura temos um quadrado ABCD e um triângulo eqüilátero BCM. Determine a medida do ângulo $\hat{x}$.



Solução

Se o triângulo é eqüilátero, seus ângulos medem 60° e, como ABCD é um quadrado, seus ângulos são retos. Concluímos, então, que o ângulo $A\hat{B}M$ mede 30°:

Vamos mostrar agora que os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são iguais. Para isso, repare que:



a) se ABCD é quadrado, seus lados são iguais, e portanto, $\overline{AB} = \overline{BC}$.

b) se BCM é eqüilátero, seus lados também são iguais e, portanto $\overline{BM} = \overline{BC}$.

c) Como $\overline{AB} = \overline{BC}$ e $\overline{BM} = \overline{BC}$, concluímos que $AB = \overline{BM}$, ou seja, o triângulo ABM é isósceles, pois tem dois lados iguais. Logo, os ângulos da base $\overline{AM}$ também são iguais, isto é, $\hat{x} = \hat{y}$

Finalmente, a soma dos ângulos internos do triângulo ABM nos dá: $x + x + 30° = 180°$, vindo:

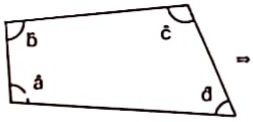
$\boxed{x = 75°}$.

Scanned by CamScanner

QUADRILÁTEROS

Estudando os polígonos, vimos que a soma dos ângulos internos de um polígono com n lados ($n \in N$, $n \geqslant 3$) é $S_i = (n - 2) \cdot 180°$. Como os quadriláteros têm 4 lados ($n = 4$), concluímos a primeira propriedade importante desse grupo de polígonos:

> A soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é 360°.



$\Rightarrow \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = 360°$

Vamos estudar dois grandes grupos de quadriláteros: os paralelogramos e os trapézios.

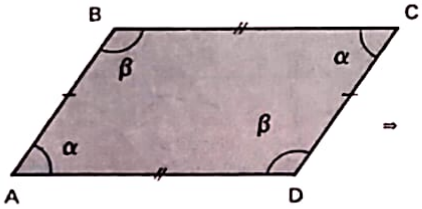
Paralelogramos

> Paralelogramo é todo quadrilátero que tem dois pares de lados opostos paralelos.

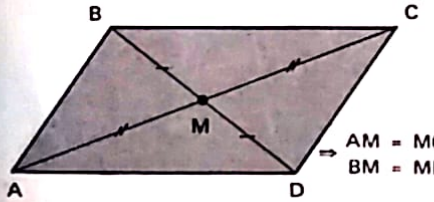
$\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

Todo paralelogramo possui as seguintes propriedades importantes:

- lados opostos iguais
- ângulos opostos iguais
- ângulos consecutivos suplementares



$\Rightarrow$ $AB = CD$
$AD = BC$
$\hat{A} = \hat{C} = \alpha$
$\hat{B} = \hat{D} = \beta$
$\alpha + \beta = 180°$

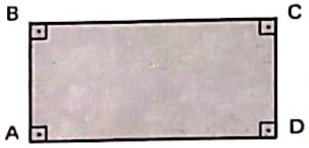


$\Rightarrow$ $AM = MC$
$BM = MD$

- as diagonais interceptam-se mutuamente no ponto médio, isto é, o ponto M da figura divide cada diagonal em duas partes iguais.

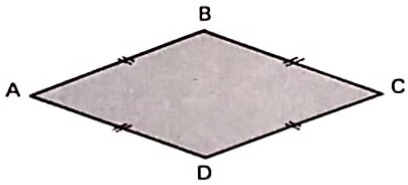
Vejamos agora três paralelogramos especiais: o retângulo, o losango e o quadrado; repare que estes três quadriláteros são paralelogramos, o que implica a validade das quatro propriedades vistas anteriormente, para cada um deles.

Retângulo É o paralelogramo que tem quatro ângulos retos.



$\Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$

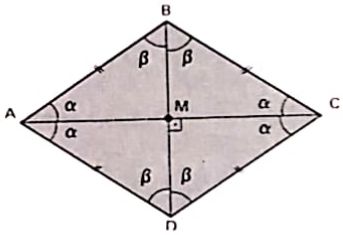
Losango É o paralelogramo que tem os quatro lados iguais.



$\Rightarrow$ lados iguais

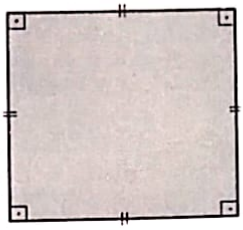
Num losango, ocorrem duas propriedades importantes:

- as diagonais são perpendiculares e
- as diagonais são bissetrizes dos ângulos internos do losango.



diags. perpend.
e
diag. = bissetriz

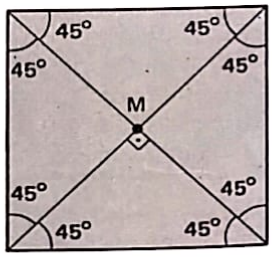
Quadrado É o paralelogramo que tem quatro ângulos retos e os quatro lados iguais.



lados iguais
e
ângs. retos

Veja bem: na definição de quadrado entram as características de retângulo (4 ângulos retos) e as de losango (4 lados iguais). Por isso, o quadrado é, ao mesmo tempo, um retângulo e um losango; também é por isso que valem, para o quadrado, as propriedades do losango:

diags. perpend.
e
diag. = bissetriz

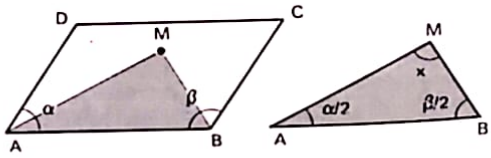


EXERCÍCIOS

1. Calcular o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo.

Solução

Seja ABCD o paralelogramo e $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ os ângulos internos de vértices A e B; as bissetrizes de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ determinam o triângulo ABM:



Scanned by CamScanner

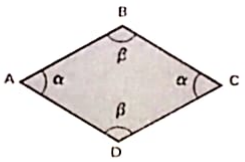
Como ABCD é um paralelogramo, seus ângulos consecutivos são suplementares, ou seja, $\alpha + \beta = 180°$.

No triângulo ABM, temos: $x + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180° \Rightarrow x + \frac{\alpha + \beta}{2} = 180° \Rightarrow x + \frac{180°}{2} = 180° \Rightarrow x + 90° = 180° \Rightarrow \boxed{x = 90°}$.

2. Num losango, a diagonal menor mede 12 cm. Sabendo-se que cada ângulo interno obtuso é o dobro do interno agudo, calcule o perímetro do losango.

Solução

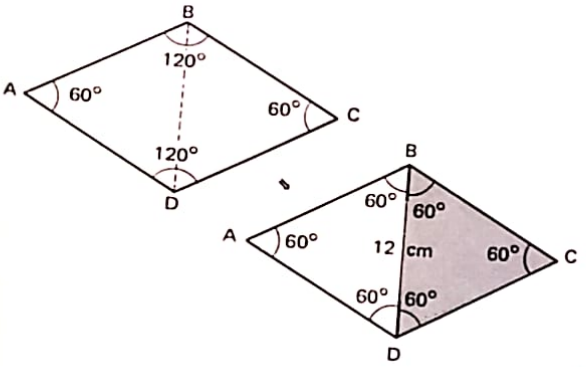
Seja ABCD o losango e sejam α e β as medidas de seus ângulos internos agudo e obtuso, respectivamente:



Como se trata de um quadrilátero, temos $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 360°$ o que nos dá: $\alpha + \beta = 180°$. Mas, pelo enunciado, $\beta = 2\alpha$. Formamos, então, o sistema

$\begin{cases} \alpha + \beta = 180° \\ \beta = 2\alpha \end{cases}$, obtendo $\boxed{\alpha = 60°}$ e $\boxed{\beta = 120°}$

Traçamos, agora, a diagonal menor do losango ABCD. Como a diagonal de um losango é também bissetriz do ângulo interno, dividimos os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ em dois de 60° cada um:



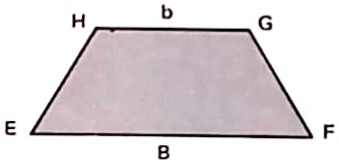
Observe, agora, os dois triângulos formados. Eles são eqüiláteros, pois cada um tem três ângulos de 60°; se são eqüiláteros, seus lados são todos iguais, ou seja: BC = CD = 12 cm e AB = AD = 12 cm.

Portanto, o perímetro do losango é: $p = 4 \times 12$ cm $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{p = 48 \text{ cm}}$.

TRAPÉZIOS

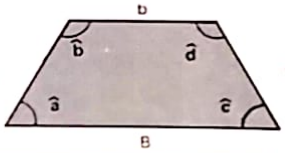
Trapézios são os quadriláteros que têm apenas um par de lados opostos paralelos. Esses lados paralelos chamam-se bases do trapézio.



$\Rightarrow \overline{HG} \parallel \overline{EF}$, $\overline{HE} \nparallel \overline{GF}$

Todo trapézio possui as seguintes propriedades:

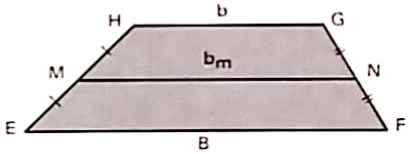
• Os ângulos adjacentes a um mesmo lado são suplementares, desde que esse lado não seja base do trapézio.



$\Rightarrow \hat{a} + \hat{b} = 180°$, $\hat{c} + \hat{d} = 180°$

• O segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos é paralelo às bases do trapézio e tem comprimento igual à semi-soma das bases. Esse segmento chama-se base média do trapézio.

SELO MARECHAL
Usado, bom e barato
RUA MARECHAL PEODORO, 253
LAGES - SC

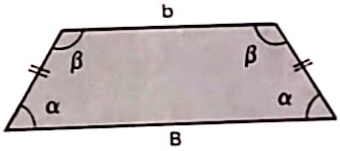


$\overline{MN} \parallel \overline{HG} \parallel \overline{EF}$

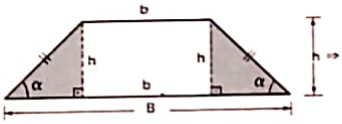
$\Rightarrow b_m = \frac{B + b}{2}$

Existem dois tipos especiais de trapézios: o isósceles e o retângulo:

Trapézio isósceles É aquele onde os lados não paralelos são iguais. Conseqüentemente, os ângulos adjacentes a uma mesma base são iguais.

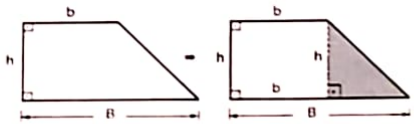


Repare que o trapézio isósceles pode ser decomposto em dois triângulos retângulos iguais e um retângulo:



h = altura do trapézio

Trapézio retângulo É aquele que tem dois ângulos retos.



EXERCÍCIOS

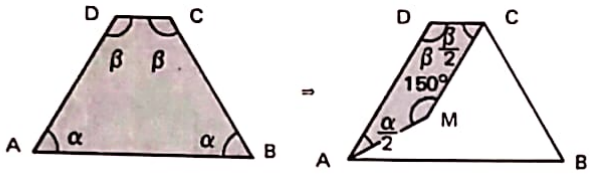
1. Num trapézio isósceles, as bissetrizes de dois ângulos opostos encontram-se num ponto M, interno ao trapézio, determinando um ângulo de 150°. Calcule os ângulos internos do trapézio.

Solução

Seja ABCD o trapézio; como ele é isósceles, os ângulos adjacentes a uma mesma base são iguais, ou seja, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\alpha}$

Scanned by CamScanner

e $\hat{C} = \hat{D} = \hat{\beta}$. Traçamos as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ e obtemos o quadrilátero AMCD:



Observe que $\alpha + \beta = 180°$, pois ABCD é trapézio.

No quadrilátero AMCD, temos $\frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{\beta}{2} + 150° = 360°$, ou $\alpha + 2\beta + \beta + 300° = 720°$, dando: $\alpha + 3\beta = 420°$.

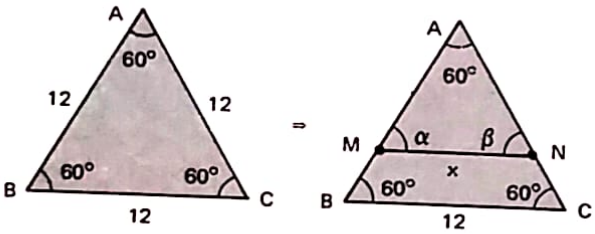
Temos, então, o sistema $\begin{cases} \alpha + \beta = 180° \\ \alpha + 3\beta = 420° \end{cases}$ que, resolvido, nos dá: $\boxed{\alpha = 60°}$ e $\boxed{\beta = 120°}$.

Portanto, os ângulos internos do trapézio medem 60° e 120°.

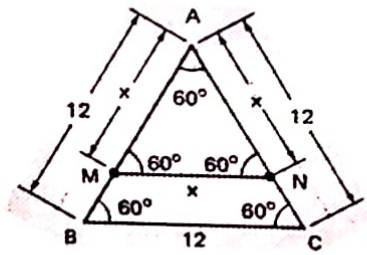
2. Num triângulo ABC, eqüilátero de lado 12 cm, traça-se $\overline{MN}$ paralelo ao lado $\overline{BC}$ de modo que o triângulo ABC fique decomposto num trapézio e num novo triângulo. Calcule MN, sabendo que o perímetro do trapézio é igual ao do triângulo AMN.

Solução

Desenhamos o triângulo ABC, que, por ser eqüilátero, tem ângulos de 60°. Traçamos $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, sendo x a medida de $\overline{MN}$:



Por paralelismo, concluímos que $\hat{\alpha} = \hat{B} = 60°$ e $\hat{\beta} = \hat{C} = 60°$. Logo, o triângulo AMN é eqüilátero e, então, AM = AN = MN = x:



Como AB = 12 cm e AM = x, segue-se que MB = 12 − x; da mesma maneira, CN = 12 − x.

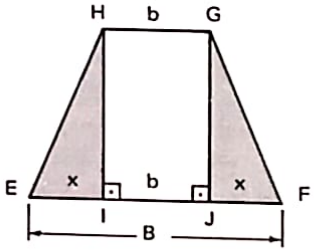
Agora, lembrando que o trapézio BMNC tem perímetro igual ao do triângulo AMN (isso é um dado do problema), podemos escrever:

$BM + MN + NC + CB = AM + MN + AN \Rightarrow 12 - x + x + 12 - x + 12 = x + x + x \Rightarrow \boxed{x = 9 \text{ cm}}$.

3. (FUVEST) Em um trapézio isósceles, a altura é igual à base média. Determine o ângulo que a diagonal forma com a base.

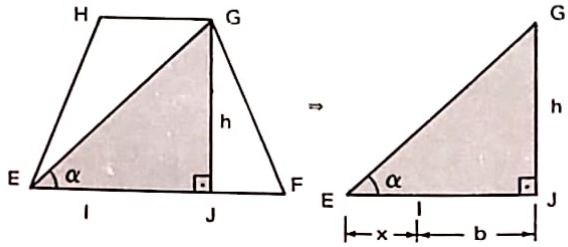
Solução

No trapézio isósceles EFGH, de base menor HG = b, traçamos as alturas a partir dos pontos H e G; dividimos, assim, a base maior EF = B em três partes, sendo que a parte central é b, igual à base menor, e as laterais, que são iguais, chamaremos de x:



Observe que $x + b + x = B \Rightarrow 2x = B - b \Rightarrow \Rightarrow \boxed{x = \frac{B - b}{2}}$.

Traçamos agora a diagonal $\overline{EG}$ e obtemos o triângulo EJG:



Demonstraremos que o ângulo α, formado pela diagonal $\overline{EG}$ com a base $\overline{EF}$, é de 45°. Para isso, mostraremos que $\overline{EJ}$ e $\overline{JG}$ são iguais, isto é, que o triângulo EJG é retângulo isósceles.

De fato, o ângulo $\hat{J}$ é reto, pois GJ = h é a altura do trapézio. Lembrando que o enunciado diz que a altura é igual à base média do trapézio, escrevemos $h = \frac{B + b}{2} = JG$.

Observando, agora, que EJ = EI + IJ, concluímos que

$$EJ = x + b = \frac{B - b}{2} + b = \frac{B - b + 2b}{2} = \frac{B + b}{2}.$$

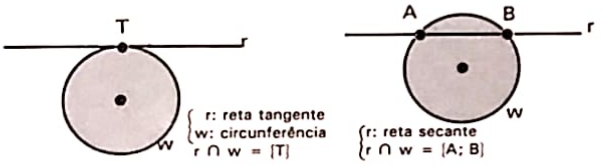
Logo, EJ = JG, pois ambos medem $\frac{B + b}{2}$. Então, o triângulo EJG é isósceles e retângulo, logo tem os ângulos da base iguais a 45°, ou seja, $\boxed{\alpha = 45°}$.

Scanned by CamScanner

TANGÊNCIAS

Reta e circunferência tangentes

Uma reta é tangente a uma circunferência quando a reta e a circunferência têm apenas um ponto comum.

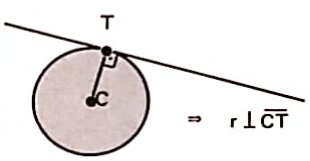


Se a reta e a circunferência têm dois pontos comuns, dizemos que elas são secantes.

Repare nas seguintes propriedades da tangência entre reta e circunferência:

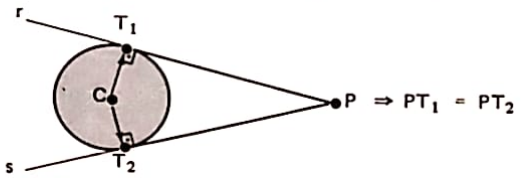
1ª Propriedade

Se uma reta é tangente a uma circunferência, então a reta é perpendicular ao raio da circunferência no ponto de tangência.



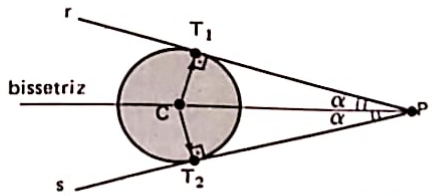
2ª Propriedade

A partir de um ponto fora de uma circunferência é possível traçar duas retas tangentes à circunferência e os comprimentos dos segmentos dessas tangentes são iguais.



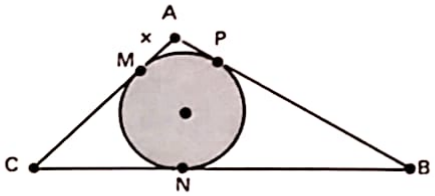
3ª Propriedade

Se uma circunferência é tangente a duas retas concorrentes, então seu centro pertence à bissetriz do ângulo formado por essas duas retas.



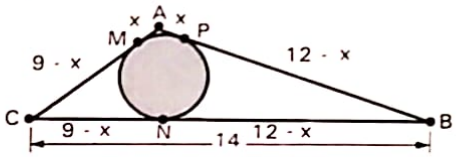
EXERCÍCIOS

1. No triângulo ABC da figura seguinte, circunscrito à circunferência, calcule a medida x, sabendo que AB = 12 cm, BC = 14 cm e AC = 9 cm.



Solução

Utilizando a 2ª propriedade, podemos afirmar que AM = = AP = x. Sendo AC = 9, concluímos que CM = 9 − x, e, como AB = 12, resulta que BP = 12 − x.



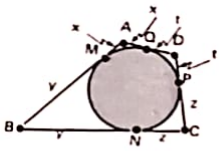
Ainda pela 2ª propriedade, obtemos CM = CN = 9 − − x e BP = BN = 12 − x.

Agora, BC = BN + NC e BC = 14 nos dão 12 − x + + 9 − x = 14 e, portanto, $\boxed{x = 3{,}5 \text{ cm}}$

2. Mostre que em todo quadrilátero circunscrito a uma circunferência a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois lados.

Solução

Seja ABCD o quadrilátero circunscrito e M, N, P e Q os quatro pontos de tangência:



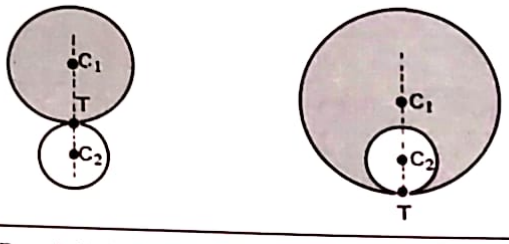
De acordo com a 2ª propriedade, temos: AQ = AM = x, BM = BN = y, CN = CP = = z e DP = DQ = t.

Portanto: $\begin{cases} AB + CD = x + y + z + t \\ AD + BC = x + t + y + z \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{AB + CD = AD + BC}$$

Circunferências tangentes

Duas circunferências são tangentes quando possuem um único ponto comum. Elas podem ser tangentes exteriores ou interiores.



Propriedade

Quando duas circunferências são tangentes, seus centros e o ponto de tangência estão sempre alinhados (são os pontos C_1, C_2 e T na figura anterior).

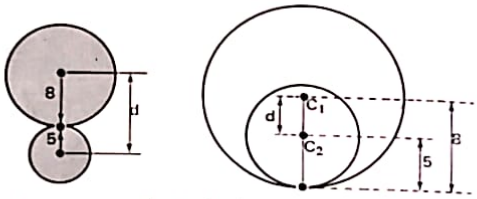
Scanned by CamScanner

EXERCÍCIO

Duas circunferências são tangentes e seus raios medem 8 cm e 5 cm. Calcule a distância entre os centros das circunferências.

Solução

As circunferências podem ser tangentes exteriores ou interiores:

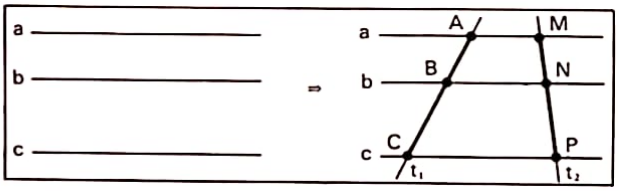


No primeiro caso, a distância d entre os centros C_1 e C_2 é a soma dos raios: $d = R_1 + R_2 = 8 + 5 = 13$ cm. No segundo caso, é a diferença entre os raios: $d = R_1 - R_2 = 8 - 5 = 3$ cm.

TEOREMA DE TALES

Este teorema é, talvez, um dos mais imporantes da geometria; dele se deduzem, como conseqüências, outros teoremas importantes; até mesmo a semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras, que virão a seguir, estão fundamentados no teorema de Tales. Vamos a ele.

Consideremos um feixe de retas paralelas a, b, c e duas retas transversais t_1 e t_2. As paralelas cortam as transversais, formando os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{MN}$, $\overline{NP}$:



Os segmentos situados sobre as transversais, entre as mesmas paralelas, são chamados de segmentos correspondentes. Assim, na figura anterior, os segmentos correspondentes são: $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$, $\overline{BC}$ e $\overline{NP}$, $\overline{AC}$ e $\overline{MP}$.

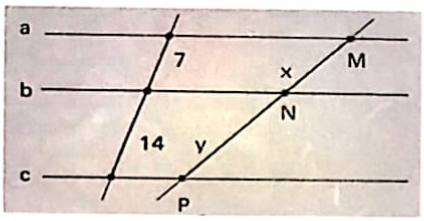
Tales enunciou, então, o seguinte:

> Um feixe de retas paralelas determina, sobre duas retas transversais, segmentos correspondentes que são proporcionais.

Ou seja: $\boxed{\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{AC}{MP}}$

EXERCÍCIO

1. Determine x e y na figura seguinte, sabendo que a // // b // c e que MP = 30 cm.



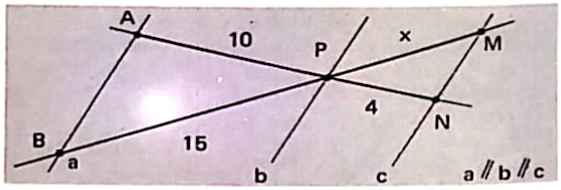
Solução

Pelo teorema de Tales, escrevemos $\dfrac{7}{x} = \dfrac{14}{y}$, vindo, após a simplificação, $y = 2x$. (I)

Por outro lado, o enunciado nos diz que MP = 30, ou seja: $x + y = 30$. (II)

As equações I e II nos dão: $\boxed{x = 10 \text{ cm}}$ e $\boxed{y = 20 \text{ cm}}$.

2. Na figura seguinte, determinar x.



Solução

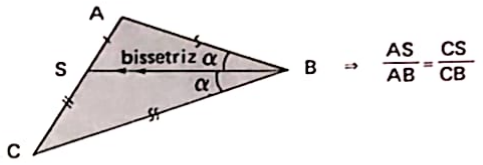
Como, pelo enunciado, as retas a, b e c são paralelas, podemos aplicar o teorema de Tales para as transversais APN e BPM: os segmentos correspondentes das transversais são proporcionais:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{PN}{PM} \Rightarrow \frac{10}{15} = \frac{4}{x} \Rightarrow 10x = 60 \Rightarrow \boxed{x = 6 \text{ cm}}$$

(Como você percebeu, esse tipo de problema é bem simples; mas muito cuidado ao construir a proporção do teorema de Tales: observe que os segmentos de uma mesma transversal ficam todos nos numeradores ou todos nos denominadores das frações.)

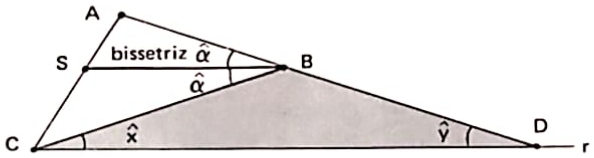
3. Provar o teorema da bissetriz interna: "Em todo triângulo, a bissetriz de um ângulo interno divide o lado oposto a esse ângulo em segmentos proporcionais aos lados adjacentes ao ângulo" (ver figura seguinte).

Scanned by CamScanner

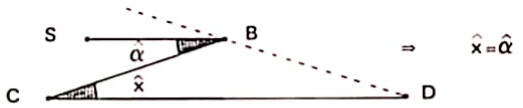


Solução

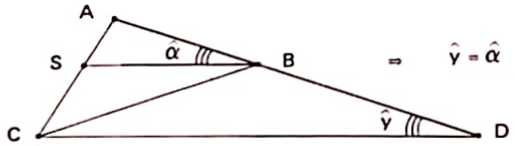
A demonstração depende de um "truque"; pelo vértice C do triângulo, traçamos a reta r, paralela à bissetriz $\overline{BS}$, e marcamos em r o ponto D, intersecção de r com o prolongamento de $\overline{AB}$:



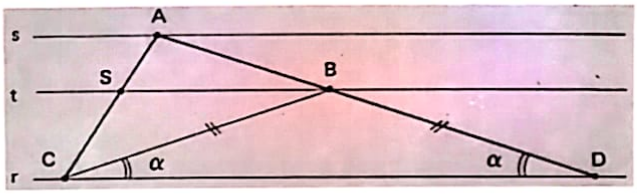
Forma-se, assim, o triângulo BCD, com os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Vamos provar que esse triângulo é isósceles.
Repare que $\overline{BS} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{BC}$ é transversal; logo, $x = \alpha$, pois são alternos internos:



Da mesma forma, temos $y = \alpha$, pois $\overline{AD}$ é transversal de $\overline{BS}$ e $\overline{CD}$:



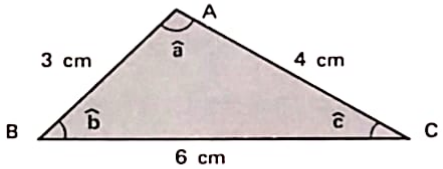
Como $\hat{x} = \hat{\alpha}$ e $\hat{y} = \hat{\alpha}$, a conclusão é que $\hat{x} = \hat{y}$ e, então, o triângulo BCD é isósceles. Logo: BC = BD.
Agora, trace também pelo vértice A a reta s $\parallel$ r e, portanto, paralela a $\overline{BS}$. Repare como entra aqui o teorema de Tales:



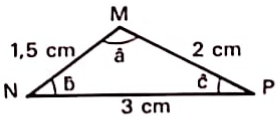
Temos um feixe de retas paralelas s $\parallel$ t $\parallel$ r, com as transversais $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$. Então: $\frac{AS}{AB} = \frac{SC}{BD}$ e, como BC = BD, resulta $\frac{AS}{AB} = \frac{SC}{BC}$ ou $\frac{AS}{AB} = \frac{CS}{CB}$.

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Suponhamos um triângulo ABC, como na figura seguinte:



Suponhamos, agora, que foi tirada uma cópia reduzida do triângulo. Temos, então, uma cópia como a seguinte:



Evidentemente, a cópia não é igual ao original, pois é menor; ela "parece" com o original, tem o mesmo "jeito" do original. Em geometria, dizemos que a cópia é semelhante ao original.

Como é uma cópia reduzida, todas as dimensões do triângulo ficaram menores (repare que cada lado ficou duas vezes menor). Será que todos os elementos do triângulo ficaram menores? Não! Seus ângulos não podem diminuir. Veja por que: no triângulo ABC, temos a + b + c = 180°; se tudo diminuísse no triângulo MNP, a soma de seus ângulos internos também diminuiria, o que é absurdo, pois em qualquer triângulo essa soma é 180°.

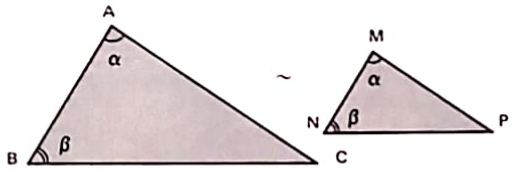
Conclusão: em dois triângulos semelhantes, os ângulos correspondentes são iguais, mas os lados mudam de tamanho: ou todos diminuem, ou todos aumentam, mas, cuidado, sempre proporcionalmente.

Levando tudo isso em conta, colocamos a seguinte definição:

> Dois triângulos são semelhantes se um deles tem dois ângulos respectivamente iguais a dois ângulos do outro triângulo.

Para indicar que um triângulo ABC é semelhante a um triângulo MNP, usamos a notação $\triangle ABC \sim \triangle MNP$.

A definição dada pode ser visualizada na figura seguinte:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{M} = \alpha \\ \hat{B} = \hat{N} = \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP$$

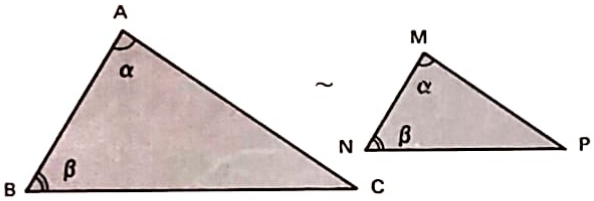
Pergunta: os dois ângulos que "sobraram", na figura anterior, são também iguais? A resposta é sim, pois em ambos os triângulos a soma dos três ângulos é 180°.

Agora, você já sabe reconhecer quando dois triângulos são semelhantes: comparando seus ângulos.

Scanned by CamScanner

Guarde, agora, o seguinte:

> Se dois triângulos são semelhantes, então os lados de um deles são respectivamente proporcionais aos correspondentes lados do outro.

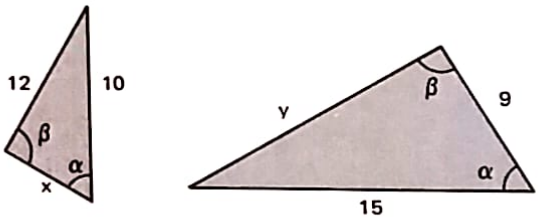


$\Delta ABC \sim \Delta MNP \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP} = k$

O número k, que representa o valor de qualquer uma das frações da proporção, chama-se razão de semelhança.

EXERCÍCIO

Calcular as medidas x e y na figura seguinte:



Solução

Como ambos os triângulos possuem um ângulo α e um ângulo β, podemos garantir que eles são semelhantes. Seus lados correspondentes são, então, proporcionais, ou seja:

$$\frac{x}{9} = \frac{12}{y} = \frac{10}{15} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{12}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 18 \\ 2y = 36 \end{cases} \Rightarrow$$

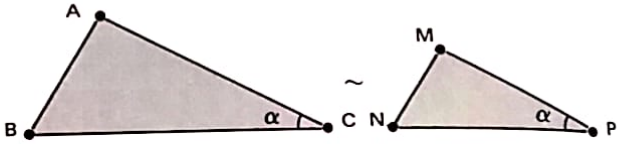
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \end{cases}$$

> **OBSERVAÇÃO** Lados correspondentes são os lados opostos ao mesmo ângulo.
> Assim:
> lados opostos ao ângulo α: 12 e y
> lados opostos ao ângulo β: 10 e 15
> lados opostos ao ângulo sem nome: x e 9

Propriedades

> 1ª Propriedade
> Se dois triângulos são semelhantes, com razão de semelhança igual a k, então a razão entre as alturas correspondentes também é k.

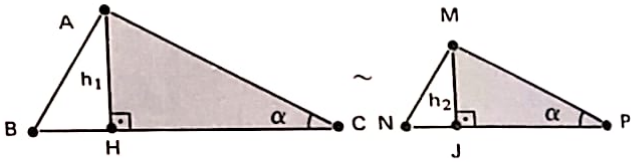
Veja por que, a seguir.
Sejam ABC e MNP dois triângulos semelhantes:



Por serem semelhantes, seus ângulos correspondentes são iguais, o que implica $\hat{C} = \hat{P} = \alpha$. Além disso, seus lados correspondentes são proporcionais, ou seja:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP} = k$$

Tracemos agora as alturas h_1 e h_2, relativas aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{NP}$, respectivamente:



Formam-se assim os triângulos AHC e MJP, que também são semelhantes, pois ambos possuem um ângulo reto ($\hat{H} = \hat{J} = 90°$) e ambos possuem um ângulo α ($\hat{C} = \hat{P} = \alpha$); logo, seus lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{AH}{MJ} = \frac{AC}{MP} = \frac{HC}{JP}$$

Lembrando que $\frac{AC}{MP} = k$, da proporção anterior, e que $AH = h_1$ e $MJ = h_2$, resulta, finalmente: $\boxed{\frac{h_1}{h_2} = k}$

Por um procedimento análogo, este resultado pode ser generalizado para outros elementos do triângulo.
Temos então:

> Se dois triângulos são semelhantes, com razão de semelhança igual a k, então:
> • lados correspondentes são proporcionais (com razão k)
> • alturas correspondentes são proporcionais (com razão k);
> • bissetrizes correspondentes são proporcionais (com razão k);
> • medianas correspondentes são proporcionais (com razão k);
> • perímetros são proporcionais (com razão k);

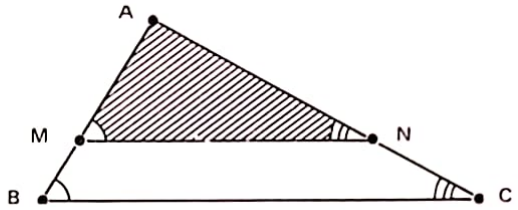
Resumindo: se dois triângulos são semelhantes, então quaisquer dois segmentos correspondentes são proporcionais a dois lados correspondentes.

> **OBSERVAÇÃO** Se dois triângulos são semelhantes, com razão de semelhança k, então a razão entre suas áreas é k^2.

> 2ª Propriedade
> Em todo triângulo, um segmento paralelo a um dos lados e que intercepta os outros dois determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.

Scanned by CamScanner

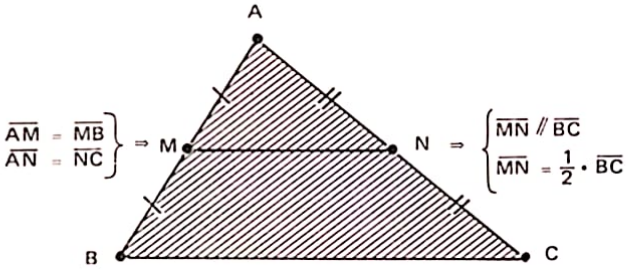
Seja ABC o triângulo e $\overline{MN}$ o segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$:



Como $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{BC}$, temos $\hat{M} = \hat{B}$ e $\hat{N} = \hat{C}$, pois são ângulos correspondentes. Portanto, os triângulos AMN e ABC são semelhantes, o que implica:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$$

> 3ª Propriedade
> Em todo triângulo, o segmento que une os pontos médios de dois lados é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.



Vamos admitir que $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Vejamos então por que $\overline{MN}$ é a metade de $\overline{BC}$. Sendo MN // BC, concluímos que $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ e, então: $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$

Como $AM = \frac{1}{2}AB$, pois M é ponto médio de $\overline{AB}$, temos:

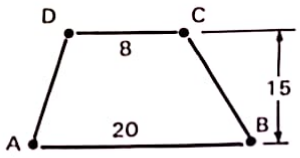
$$\frac{\frac{1}{2}\cancel{AB}}{\cancel{AB}} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \boxed{MN = \frac{1}{2}BC}$$

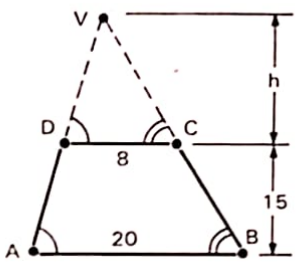
EXERCÍCIOS

1. Dado o trapézio ABCD, de bases 20 cm e 8 cm e altura 15 cm, calcular a altura do triângulo limitado pela base menor e o prolongamento dos lados não paralelos.

Solução

Desenhamos o trapézio ABCD e o triângulo VCD, determinado pelos prolongamentos dos lados não paralelos:





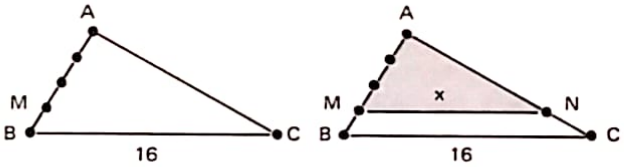
Repare que $\triangle VDC \sim \triangle VAB$, pois $\hat{D} = \hat{A}$ e $\hat{C} = \hat{B}$ (ângulos correspondentes). Logo, alturas e lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{\text{altura de VDC}}{\text{altura de VAB}} = \frac{\text{base de VDC}}{\text{base de VAB}} \Rightarrow \frac{h}{h + 15} = \frac{8}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20h = 8h + 120 \Rightarrow 12h = 120 \Rightarrow \boxed{h = 10 \text{ cm}}$$

2. Num triângulo ABC, temos BC = 16 cm. Divide-se o lado $\overline{AB}$ em 4 partes iguais, usando 3 pontos; seja M o primeiro desses pontos, contado a partir de B.
Seja N um ponto de $\overline{AC}$ de modo que MN // BC. Calcule o comprimento do segmento $\overline{MN}$.

Solução



Como MN // BC, concluímos que $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.

Então: $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$

Sabemos que $AM = \frac{3}{4}AB$, MN = x e BC = 16 cm.

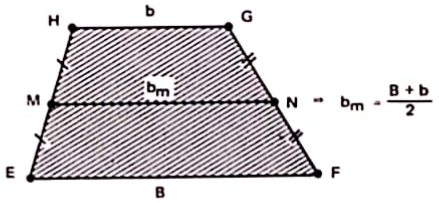
Substituindo nas duas primeiras razões da proporção, resulta:

$$\frac{\frac{3}{4}\cancel{AB}}{\cancel{AB}} = \frac{x}{16} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{x}{16} \Rightarrow \boxed{x = 12 \text{ cm}}$$

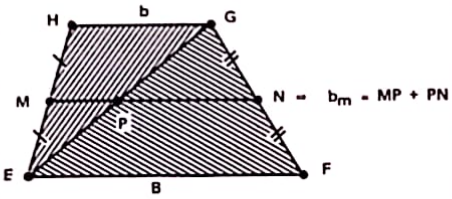
3. Prove que, num trapézio, a base média é igual à semissoma das bases.

Solução

Seja EFGH o trapézio, de bases maior e menor B e b, respectivamente. Seja b_m a medida da base média. Vamos provar que $b_m = \frac{B + b}{2}$.



Traçamos $\overline{EG}$, obtendo assim os triângulos EHG e GEF:



Como M e N são os pontos médios dos lados $\overline{HE}$ e $\overline{GF}$, respectivamente, concluímos, pelo teorema de Tales, que P é o ponto médio de $\overline{GE}$; então, no triângulo EHG, temos $MP = \frac{HG}{2} = \frac{b}{2}$, pois o segmento que une os pontos médios de dois lados de um

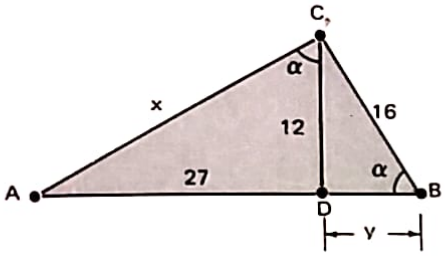
Scanned by CamScanner

triângulo é igual à metade do terceiro lado. Analogamente, $PN = \frac{1}{2} EF = \frac{B}{2}$.

Finalmente, como $b_m = MN = MP + PN$, resulta:

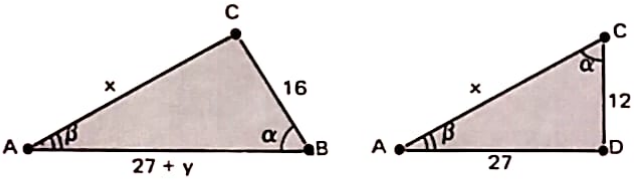
$b_m = \frac{b}{2} + \frac{B}{2} = \frac{b + B}{2}$.

4. Calcule x e y, na figura seguinte:



Solução

Na figura, temos três triângulos: ADC, DBC e ABC. Observe que todos eles têm um ângulo de medida α. Por outro lado, o ângulo de vértice A, que passamos a chamar de β, é comum a dois triângulos: ADC e ABC. Então, como ambos os triângulos têm um ângulo de medida α e outro de medida β, podemos garantir que eles são semelhantes:



Logo, seus lados correspondentes são proporcionais, o que nos dá: $\frac{27 + y}{x} = \frac{x}{27} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$.

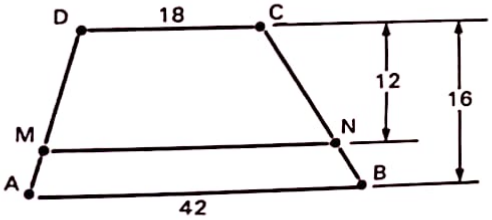
De $\frac{x}{27} = \frac{4}{3}$ resulta $\boxed{x = 36}$. Substituindo em $\frac{27 + y}{x} = \frac{4}{3}$, obtemos $\frac{27 + y}{36} = \frac{4}{3}$ e, então, $\boxed{y = 21}$.

Voltamos a insistir: como achar os lados correspondentes dos triângulos semelhantes? Oriente-se pelos ângulos: ambos os triângulos têm um ângulo α, um ângulo β e um sem nome. Faça, então, o seguinte:

lados opostos a α : x e 27
lados opostos a β : 16 e 12
lados opostos ao ângulo sem nome: 27 + y e x.

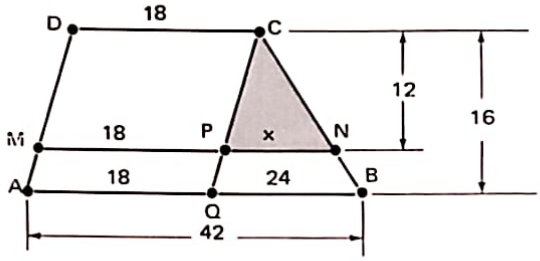
Agora é só escrever a proporção usada na resolução.

5. Sendo ABCD um trapézio e $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, calcule o comprimento de $\overline{MN}$ na figura, sabendo que todas as medidas são em cm:



Solução

Vamos fazer "aparecer" triângulos semelhantes na figura dada; para isso, a partir do vértice C, traçamos uma paralela ao lado $\overline{DA}$, cortando o trapézio em paralelogramos e triângulos:



Como CDMP e MPQA são paralelogramos (lados opostos paralelos), concluímos que MP = AQ = DC = 18 cm; como AB = 42 cm e AQ = 18 cm, obtemos QB = 24 cm. Observe agora que os triângulos CPN e CQB são semelhantes, pois $\overline{PN} \parallel \overline{QB}$. Então: $\frac{x}{24} = \frac{12}{16} \Rightarrow x = 18$ cm.

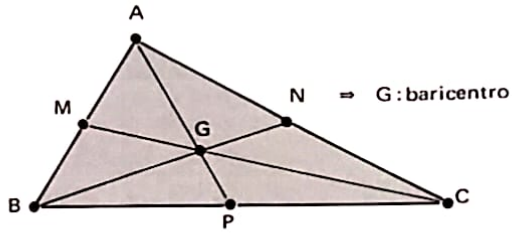
Portanto: $\boxed{MN = 18 + x = 36 \text{ cm}}$

Propriedade do baricentro de um triângulo

Como aplicação da semelhança de triângulos, obtemos a importante propriedade:

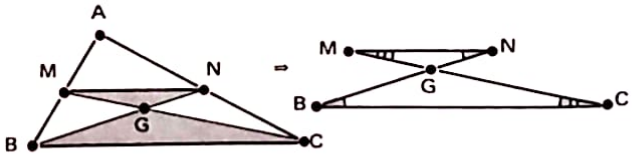
> O baricentro de um triângulo divide cada mediana na razão de 2 para 1, a partir de cada vértice.

Inicialmente, é bom lembrar que baricentro é o ponto de encontro das medianas de um triângulo e que mediana é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.



Temos, então: $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GP}$
$\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GN}$
$\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM}$

Vamos provar a propriedade para as medianas $\overline{MC}$ e $\overline{NB}$. Para isso, unimos os pontos M e N, obtendo o segmento $\overline{MN}$, que é paralelo ao lado $\overline{BC}$ e igual à metade de $\overline{BC}$:

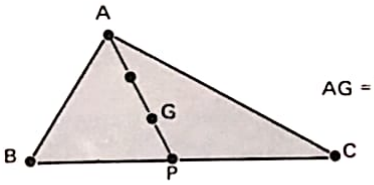


Scanned by CamScanner

Obtemos os triângulos GMN e GBC, que são semelhantes, pois $\hat{M} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{N}$ (ângulos alternos internos). Os lados correspondentes desses triângulos são proporcionais, ou seja: $\frac{MG}{CG} = \frac{NG}{BG} = \frac{MN}{BC}$. Como MN é igual à metade de BC, segue-se que:

$$\frac{MG}{CG} = \frac{NG}{BG} = \frac{1}{2} \Rightarrow GC = 2 \cdot MG \text{ e } BG = 2 \cdot NG.$$

Da mesma maneira, provaríamos que $AG = 2 \cdot PG$, na figura seguinte; ou seja, o baricentro G divide a mediana $\overline{AP}$ também em dois segmentos na proporção de 2 para 1, a partir do vértice A, isto é, $\overline{AG}$ é o dobro de $\overline{PG}$.



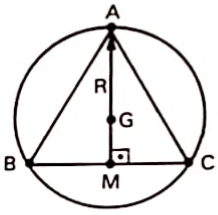
AG = 2 · PG

EXERCÍCIO

Num triângulo eqüilátero, a altura mede 12 cm. Calcule o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

Solução

Seja ABC o triângulo eqüilátero e R o raio da circunferência circunscrita. Como o triângulo é eqüilátero, a altura coincide com a mediana $\overline{AM}$ e o centro da circunferência circunscrita é o baricentro G do triângulo:



Como o baricentro divide a mediana na razão de 2 para 1, a partir do vértice, temos: $\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1}$ e, portanto: $AG = 2 \cdot GM$.

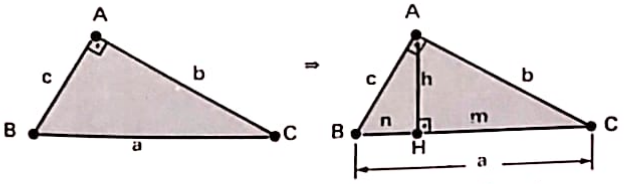
Como $AM = AG + GM = 12$, obtemos $2 \cdot GM + GM = 12$, ou $3 \cdot GM = 12$, o que nos dá $GM = 4$ cm e, então, $\boxed{AG = R = 8 \text{ cm}}$.

TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Relações métricas

Os elementos de um triângulo retângulo estão relacionados através de fórmulas muito importantes, entre as quais o teorema de Pitágoras. Dedique a máxima atenção a esse assunto, pois ele é fundamental.

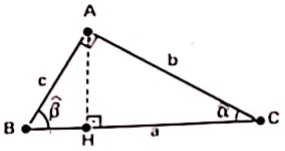
Considere um triângulo retângulo ABC, de catetos AC = b, AB = c e hipotenusa BC = a. Traçamos a altura AH = h, relativa à hipotenusa. O ponto H divide a hipotenusa nos segmentos $\overline{BH}$ e $\overline{CH}$, de medidas *n* e *m*, respectivamente; esses segmentos são chamados de projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

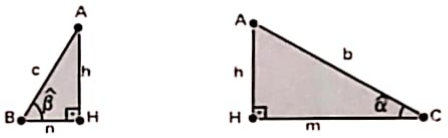


Vamos provar, inicialmente, as seguintes fórmulas:

$\boxed{a \cdot h = b \cdot c}$ $\boxed{b^2 = a \cdot m}$ $\boxed{h^2 = m \cdot n}$ $\boxed{c^2 = a \cdot n}$

Para a demonstração, separamos o triângulo ABC nos triângulos AHB e AHC:



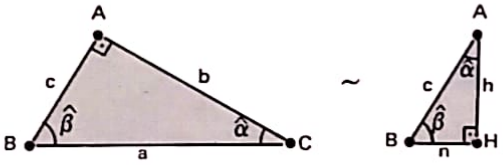


Temos, então:

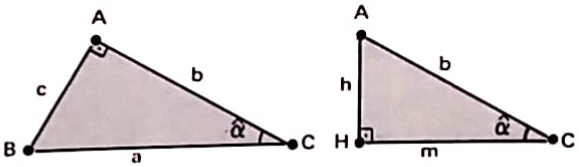
a) $\triangle ABC \sim \triangle ABH$, pois ambos têm um ângulo reto e um ângulo $\hat{\beta}$ no vértice B. Então, os lados correspondentes são proporcionais, ou seja:

$\frac{h}{b} = \frac{c}{a} = \frac{n}{c}$. Desta proporção resulta:

$\boxed{a \cdot h = b \cdot c}$ e $\boxed{c^2 = a \cdot n}$



b) $\triangle ABC \sim \triangle AHC$, pois ambos têm um ângulo reto e um ângulo $\hat{\alpha}$ no vértice C.



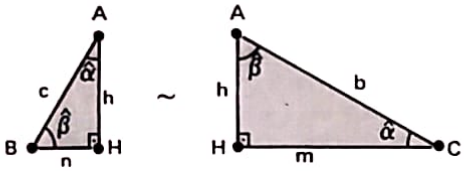
Então, $\frac{b}{m} = \frac{a}{b} = \frac{c}{h}$, que nos dá: $\boxed{b^2 = a \cdot m}$

c) $\triangle AHB \sim \triangle AHC$, pois ambos têm um ângulo

Scanned by CamScanner

reto e um ângulo α. Então, $\frac{c}{b} = \frac{n}{h} = \frac{h}{m}$, resultando:

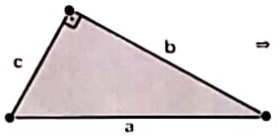
$\boxed{h^2 = m \cdot n}$.



Teorema de Pitágoras

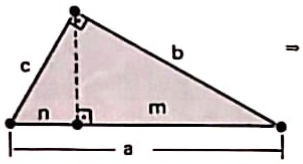
O teorema de Pitágoras é o mais "popular" da geometria:

> Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.



$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

A demonstração do teorema de Pitágoras pode ser feita da seguinte maneira:



$b^2 = a \cdot m$

$\Rightarrow c^2 = a \cdot n$

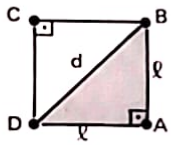
Somando as duas igualdades, membro a membro, resulta $b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a \cdot (m + n)$ e, como $m + n = a$ (veja a figura), segue-se que $b^2 + c^2 = a \cdot a = a^2$. Essa é a expressão do teorema de Pitágoras:

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ (hipotenusa)² = (cateto)² + (cateto)²

Aplicações

- Diagonal do quadrado

  Se um quadrado tem lado ℓ, sua diagonal vale $\ell\sqrt{2}$.



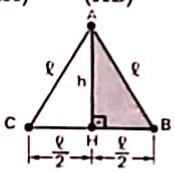
$\Rightarrow d = \ell \cdot \sqrt{2}$

Veja por que: no triângulo ABD, retângulo em A, temos: $(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2 \Rightarrow d^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2 \Rightarrow \sqrt{d^2} = \sqrt{2\ell^2} \Rightarrow d = \ell\sqrt{2}$.

- Altura do triângulo eqüilátero

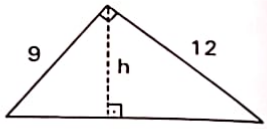
  Se um triângulo eqüilátero tem lado ℓ, sua altura vale $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

No triângulo AHB: $(AB)^2 = (AH)^2 + (HB)^2 \Rightarrow \ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow \sqrt{h^2} = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.



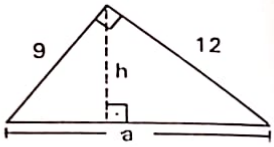
EXERCÍCIOS

1. Calcule a altura h do triângulo retângulo da figura ao lado:



Solução

Primeiramente, calculamos a medida a da hipotenusa, usando o teorema de Pitágoras:



$a^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow a^2 = 81 + 144 \Rightarrow a^2 = 225 \Rightarrow$

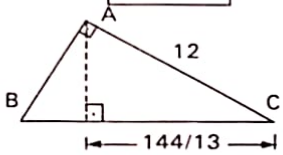
$\Rightarrow \boxed{a = 15}$.

Agora, para obtermos a medida h da altura, usamos a relação:

$\boxed{a \cdot h = b \cdot c}$

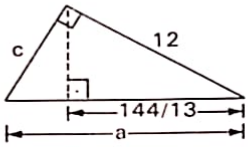
$15 \cdot h = 12 \cdot 9 \Rightarrow 15 \cdot h = 108 \Rightarrow \boxed{h = 7{,}2}$.

2. (E.E. MAUÁ — SP) Calcule o perímetro do triângulo ABC da figura:



Solução

Para obter o perímetro, precisamos das medidas dos 3 lados do triângulo; por isso, chamamos de c e a as medidas do cateto $\overline{AB}$ e da hipotenusa $\overline{BC}$, respectivamente:



Na figura, temos: b = 12 e $m = \frac{144}{13}$; utilizamos a relação:

$\boxed{b^2 = a \cdot m} \Rightarrow 12^2 = a \cdot \frac{144}{13} \Rightarrow$

$\Rightarrow 13 \cdot 144 = a \cdot 144 \Rightarrow \boxed{a = 13}$

Agora, usando o teorema de Pitágoras, obtemos a medida c:

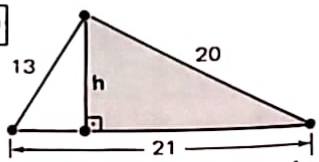
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 13^2 = 12^2 + c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 169 = 144 + c^2 \Rightarrow 25 = c^2 \Rightarrow \boxed{c = 5}$.

Portanto, o perímetro do triângulo ABC é:

$p = a + b + c \Rightarrow p = 13 + 12 + 5 \Rightarrow \boxed{p = 30}$

3. Calcule a altura *h* do triângulo da figura ao lado.

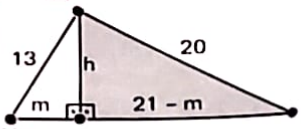


Solução

Antes de mais nada, consideremos que a relação ah = bc não se aplica a este problema, pois o triângulo dado não é retângulo.

O segmento da altura divide a base em dois segmentos cujas medidas chamamos de *m* e 21 − m.

Temos agora dois triângulos retângulos, nos quais aplicaremos o teorema de Pitágoras.



No triângulo da esquerda, temos:

Scanned by CamScanner

$13^2 = m^2 + h^2$, ou seja, $\boxed{m^2 + h^2 = 169}$ (I)

No outro triângulo, obtemos:

$$20^2 = (21 - m)^2 + h^2 \Rightarrow 400 = 441 - 42m + \overbrace{m^2 + h^2}^{(I)} \Rightarrow$$

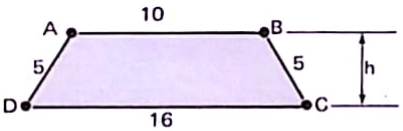
$$\Rightarrow 400 = 441 - 42m + 169 \Rightarrow \boxed{m = 5}$$

Voltando à equação (I), temos: $5^2 + h^2 = 169 \Rightarrow$ $\Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow \boxed{h = 12}$.

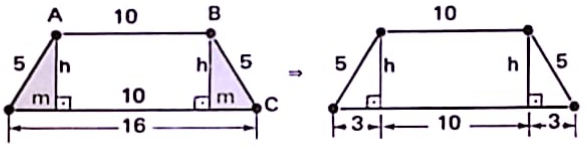
4. Calcular a altura de um trapézio isósceles com lados de medidas 10 cm, 5 cm, 16 cm e 5 cm.

Solução

Seja ABCD o trapézio do enunciado:



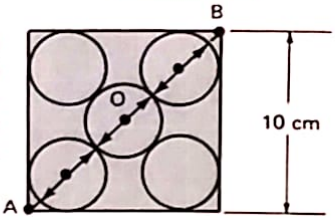
A partir dos pontos A e B traçamos as perpendiculares à base $\overline{CD}$:



Repare que se formam dois triângulos retângulos de hipotenusa 5 cm e catetos h e m. Como m + 10 + m = 16, segue-se que $\boxed{m = 3 \text{ cm}}$.

Agora, pelo teorema de Pitágoras, no triângulo sombreado, temos: $h^2 + 3^2 = 5^2$, resultando então: $\boxed{h = 4 \text{ cm}}$.

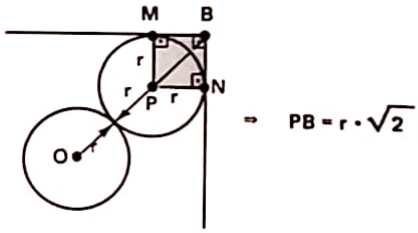
5. Na figura ao lado, as cinco circunferências têm o mesmo raio e quatro delas são tangentes aos lados do quadrado e tangentes à quinta circunferência. Calcule o raio delas.



Solução

Inicialmente, concluímos que a diagonal $\overline{AB}$ do quadrado mede $10\sqrt{2}$ cm. Se $AB = 10\sqrt{2}$, então $OB = \frac{AB}{2} = 5\sqrt{2}$ cm.

Observe agora que o segmento $\overline{OB}$ é a soma de $\overline{OP} = 2r$ com $\overline{PB}$, que passamos a calcular. PMBN é um quadrado de lado r; sua diagonal é $PB = r\sqrt{2}$.



Temos então:

$$OB = OP + PB$$

$$5\sqrt{2} = 2r + r\sqrt{2}$$

$$5\sqrt{2} = r \cdot (2 + \sqrt{2})$$

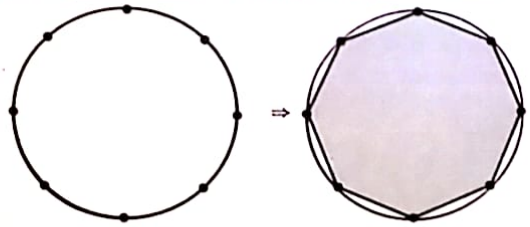
$$r = \frac{5\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{2} \cdot (2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2}) \cdot (2 - \sqrt{2})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r = 5 \cdot (\sqrt{2} - 1) \text{ cm}}.$$

POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS

Inicialmente, lembre-se de que um polígono é regular quando tem todos os lados iguais e todos os ângulos internos iguais.

Obtemos um polígono regular inscrito dividindo uma circunferência em partes iguais e unindo os pontos de divisão consecutivamente com segmentos de retas. Por exemplo, na figura seguinte temos um octógono regular inscrito:

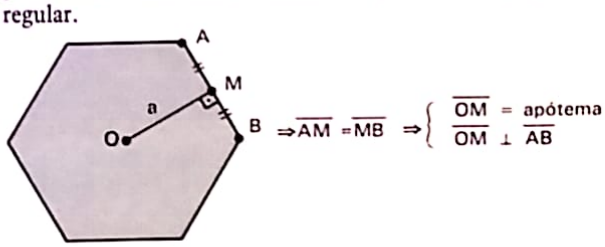


oito partes iguais — octógono regular inscrito

Podemos dizer que:

> Um polígono regular é inscrito numa circunferência quando todos os seus vértices pertencem a essa circunferência.

Em todo polígono regular, o segmento que une o centro do polígono ao ponto médio de qualquer um dos lados é perpendicular a esse lado e chama-se *apótema* do polígono regular.



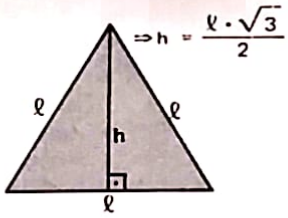
Relações métricas nos polígonos regulares inscritos

Estudaremos agora as relações entre o lado, o apótema e o raio da circunferência circunscrita de alguns polígonos regulares.

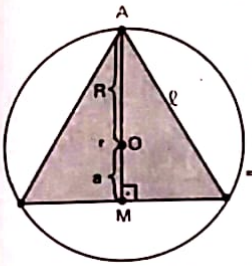
Scanned by CamScanner

Triângulo eqüilátero inscrito Já demonstramos duas propriedades:

• A altura h de um triângulo eqüilátero de lado ℓ é igual a $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.



$\Rightarrow h = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2}$



$\overline{AO} = 2 \cdot \overline{OM} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AO} = R = \frac{2}{3} \cdot h \\ \overline{OM} = a = \frac{1}{3} \cdot h \end{cases}$

• O centro 0 da circunferência circunscrita (circuncentro) coincide com o baricentro e o ortocentro do triângulo. Como o baricentro divide a mediana na razão de 2 para 1, temos:

1) AO = raio da circunferência circunscrita = R

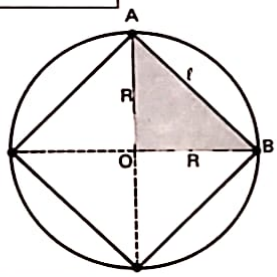
$$AO = R \Rightarrow R = \frac{2}{3}h \Rightarrow \boxed{h = \frac{3R}{2}}$$

2) OM = a = apótema do triângulo

$$OM = \frac{AO}{2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{R}{2}}$$

3) Como $h = \frac{3R}{2}$ e $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, obtemos $\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{2} \Rightarrow \ell\sqrt{3} = 3R \Rightarrow \boxed{\ell = R\sqrt{3}}$

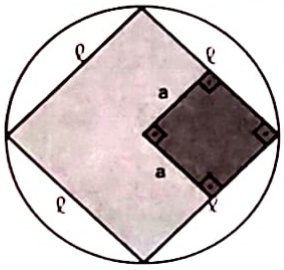
Quadrado inscrito A figura representa um quadrado de lado ℓ, apótema a, inscrito numa circunferência de raio R:



Como as diagonais do quadrado são perpendiculares, o triângulo OAB é retângulo e, então, pelo teorema de Pitágoras, temos:

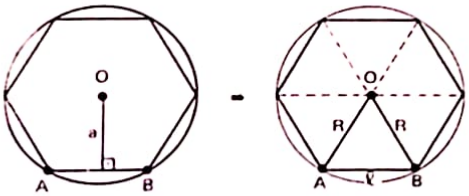
$$\ell^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \Rightarrow \boxed{\ell = R\sqrt{2}}$$

Quanto ao apótema, veja a figura seguinte:



$\Rightarrow a = \frac{\ell}{2}$

Hexágono regular inscrito Num hexágono regular de lado ℓ e apótema a, unindo o centro O a cada um dos vértices, obtemos seis triângulos eqüiláteros:



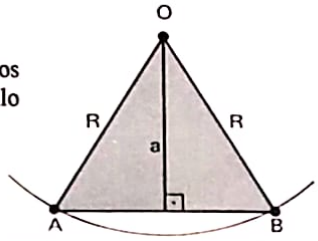
Repare que no triângulo eqüilátero OAB o lado $\overline{AB}$ vale ℓ e os lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são iguais ao raio da circunferência circunscrita. Como o triângulo é eqüilátero, os três lados são iguais. Então:

O lado do hexágono regular inscrito é igual ao raio da circunferência na qual ele está inscrito.

$$\boxed{\ell = R}$$

Quanto ao apótema, vemos que ele é a altura do triângulo eqüilátero OAB; portanto:

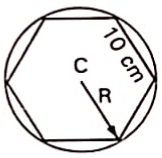
$$a = \frac{R \cdot \sqrt{3}}{2}$$

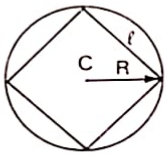


EXERCÍCIOS

1. Um hexágono regular de lado 10 cm está inscrito numa circunferência de raio R. Determine o perímetro do quadrado inscrito na mesma circunferência.

Solução

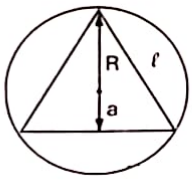




Como o lado do hexágono regular é igual ao raio da circunferência na qual ele está inscrito, temos que $\boxed{R = 10 \text{ cm}}$.

Agora, pensando no quadrado inscrito, sabemos que seu lado ℓ é $\ell = R\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 10\sqrt{2}$ cm; logo, o perímetro do quadrado é: $\boxed{p = 4\ell = 40\sqrt{2} \text{ cm}}$.

2. O apótema de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência de raio R mede 4 cm; determine a medida do lado desse triângulo.



$\Rightarrow a = \frac{R}{2}$

Solução

Como o apótema do triângulo eqüilátero é a metade do raio da circunferência na qual ele está inscrito, concluímos que $R = 2 \cdot a \Rightarrow R = 8$ cm; sabendo que o lado ℓ do triângulo eqüilátero é $\ell = R \cdot \sqrt{3}$, concluímos que:

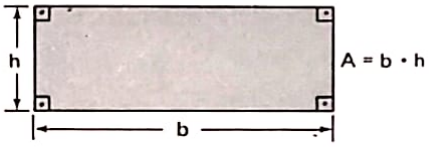
$$\boxed{\ell = 8\sqrt{3} \text{ cm}}.$$

Scanned by CamScanner

Áreas das figuras planas

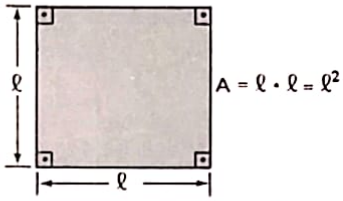
Vejamos como se calculam as áreas das principais figuras geométricas planas.

Retângulo



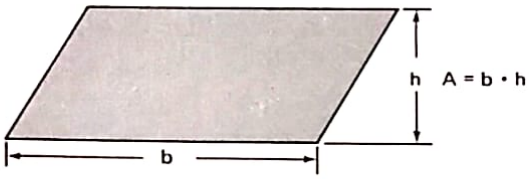
A área do retângulo é igual ao produto da base pela altura.

Quadrado



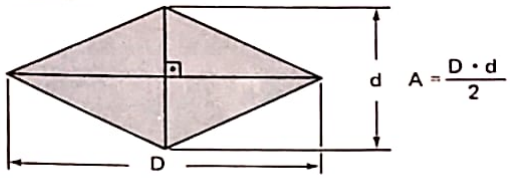
A área do quadrado é igual ao quadrado do lado.

Paralelogramo



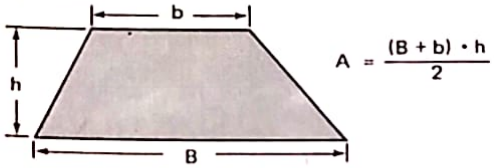
A área do paralelogramo é igual ao produto da base pela respectiva altura.

Losango



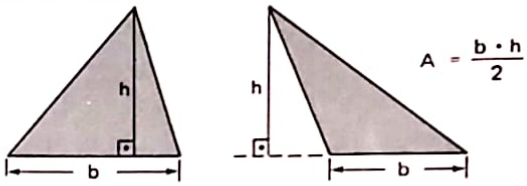
A área do losango é igual à metade do produto de suas diagonais.

Trapézio



A área do trapézio é igual ao semiproduto da soma de suas bases pela altura.

Triângulo



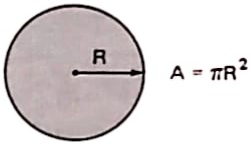
A área do triângulo é igual ao semiproduto da base pela altura.

Triângulo eqüilátero

Se um triângulo eqüilátero tem lado ℓ, sabemos que sua altura é $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Como sua área vale $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$, temos

$$A = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2}, \text{ ou } \boxed{A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}}$$

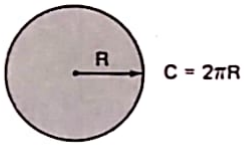
Círculo



A área do círculo é igual ao produto do número π pelo quadrado do raio.

O número π é irracional e vale 3,14159... Costuma-se deixá-lo indicado nos cálculos sem substituir seu valor aproximado.

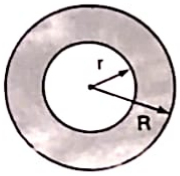
O comprimento C, da circunferência que determina o círculo, é calculado pela expressão:



Coroa circular

É a figura situada entre duas circunferências de mesmo centro:

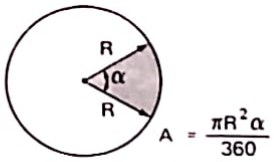
A área da coroa circular é igual à área do círculo maior menos a área do círculo menor.



$$\boxed{A_{coroa} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)}$$

Setor circular

É a parte do círculo limitada por dois raios e um arco:



Chamando de α o ângulo formado pelos raios e medindo esse ângulo em graus, a área do setor é:

$$\boxed{A_{setor} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}}$$

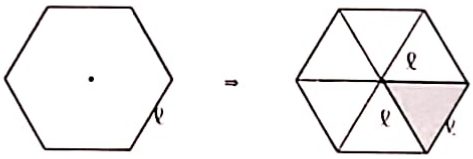
Scanned by CamScanner

EXERCÍCIOS

1. Calcule a área do hexágono regular de lado ℓ.

Solução

Consideremos um hexágono regular e unamos seu centro aos vértices:



O hexágono fica decomposto em seis triângulos eqüiláteros, pois o hexágono é regular. A área do hexágono é, então, a soma das áreas dos seis triângulos:

$A_{hex.} = 6 \times$

Como a área do triângulo eqüilátero de lado ℓ é $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$, obtemos $A_{hex.} = 6 \times \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ ou $\boxed{A_{hex} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}}$

2. Calcule a área do setor circular da figura:

Solução

Utilizando-se a fórmula da área do setor, fica fácil. Como $A_{setor} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ e, $\alpha = 72°$ e $R = 10$ cm, obtemos $A_{setor} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 72}{360} = 20\pi \text{ cm}^2$.

Agora, repare como você pode resolver o problema, sem ter que decorar a fórmula da área do setor.

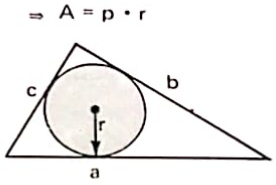
Observe que 72° é um quinto de 360°; a partir disto, concluímos que o setor de 72° é um quinto do círculo que o contém e, portanto, a área do setor é a quinta parte da área do círculo:

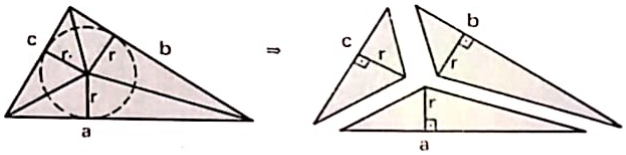
$$\boxed{A_{setor} = \frac{\pi R^2}{5} = \frac{\pi \cdot 10^2}{5} = 20\pi \text{ cm}^2}$$

3. Mostre que a área de qualquer triângulo é igual ao produto de seu semiperímetro pelo raio da circunferência inscrita.

Solução

Vamos provar que $A = p \cdot r$, onde A é a área do triângulo, $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro e r é o raio da circunferência inscrita. A prova é simples, acompanhe: traçamos os três raios nos pontos de tangência e ligamos o centro da circunferência inscrita com os vértices.





O triângulo original fica decomposto em outros três. Em cada um deles, a base é um dos lados (a, b, c) e a altura é o raio r, pois o raio é perpendicular ao lado no ponto de tangência. Segue-se que a área do triângulo original é a soma das áreas dos triângulos menores, ou seja,

$$A = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = \frac{(a+b+c) \cdot r}{2} =$$

$$= \underbrace{\frac{a+b+c}{2}}_{p} \cdot r \Rightarrow \boxed{A = p \cdot r}.$$

Scanned by CamScanner

FUNÇÕES

RELAÇÕES BINÁRIAS

Vamos introduzir agora um dos conceitos mais importantes de toda a matemática: o conceito de relação entre dois conjuntos. A partir daí, construiremos a definição de função de um conjunto em outro; este último conceito é simplesmente a viga mestra de toda a chamada matemática moderna.

Pares ordenados

Dados dois elementos a e b formamos um novo elemento indicado por (a; b) e denominado par ordenado, cujo primeiro elemento é a e o segundo elemento é b. Impomos a seguinte condição de igualdade entre pares ordenados:

$$\boxed{(a;\ b) = (c;\ d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d}$$

Com a definição de igualdade acima, temos, por exemplo:

$$\begin{cases} (1;\ 2) \neq (2;\ 1); \\ (2;\ 3) = (x;\ y) \Leftrightarrow x = 2 \text{ e } y = 3; \\ (x;\ 1) = (0;\ y) \Leftrightarrow x = 0 \text{ e } y = 1. \end{cases}$$

EXERCÍCIO

Determinar os valores de a e b, de modo que os pares ordenados (2x + 1; 3) e (4x − y; y) sejam iguais.

Solução

Pela definição de igualdade de pares ordenados, temos:

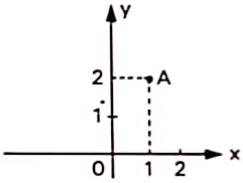
$$\begin{cases} 2x + 1 = 4x - y \\ 3 = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 4x - 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{x = 2 \text{ e } y = 3}$$

Representação gráfica: a representação gráfica de um par ordenado é um ponto pertencente a um plano (chamado plano cartesiano).

Exemplo

O par ordenado (1; 2) é representado pelo ponto A da figura seguinte; indica-se: A(1; 2).



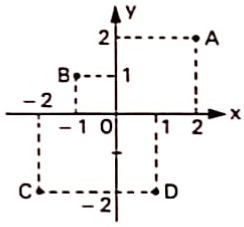
Ox → eixo das abscissas;
Oy → eixo das ordenadas;
1 → abscissa do ponto A;
2 → ordenada do pontoA.

OBSERVAÇÃO O 1º elemento do par ordenado é sempre representado no eixo Ox e o 2º, no eixo Oy.

EXERCÍCIOS

1. Representar no plano cartesiano os seguintes pontos: A (2; 2); B (− 1; 1); C (− 2; − 2); D (1; − 2).

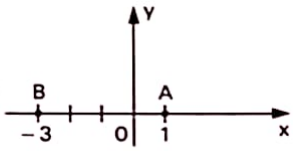
Solução



2. Representar no plano cartesiano os seguintes pontos: A (1; 0); B (− 3; 0).

Solução

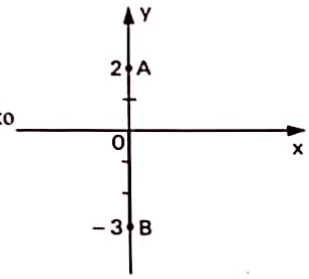
Os pontos que possuem ordenada y = 0 estão no eixo Ox.



3. Representar no plano cartesiano os seguintes pontos: A (0; 2); B (0; − 3).

Solução

Os pontos que possuem abscissa x = 0 estão no eixo Oy.



Scanned by CamScanner

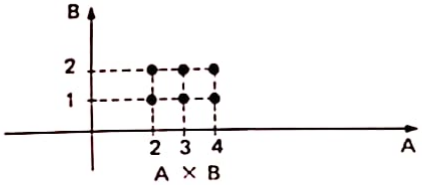
Produto cartesiano de conjunto

Se A e B são conjuntos não vazios, o produto cartesiano de A por B é o conjunto de todos os pares ordenados com primeiro elemento em A e segundo elemento em B. Indica-se o produto cartesiano de A por B por A X B.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

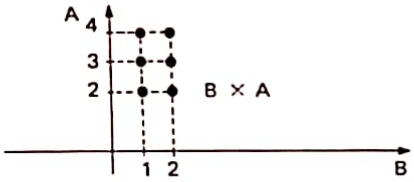
Se A ou B é vazio, coloca-se $A \times B = \varnothing$.

Exemplos



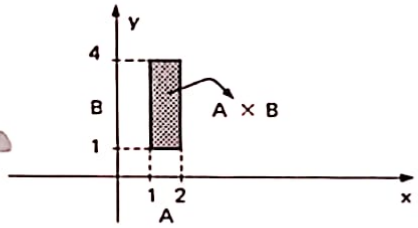
1. Se A = {2, 3, 4} e B = {1, 2}, o produto cartesiano de A por B é:
A X B = {(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)}

O produto cartesiano de B por A é:

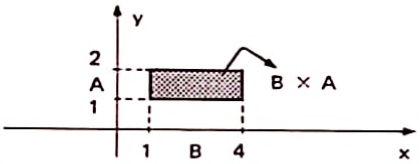


B X A = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)}

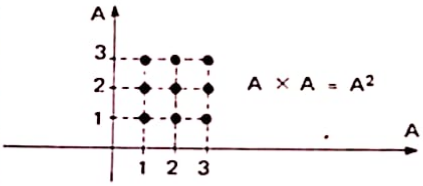
Note que A X B ≠ B X A; se A ≠ B, A ≠ ∅, B ≠ ∅.



2. Sendo A = {x ∈ ℝ / 1 ⩽ x ⩽ 2} e B = {x ∈ ℝ / 1 ⩽ x ⩽ 4}, o produto cartesiano de A por B terá como representação gráfica o conjunto de pontos do retângulo a esquerda:



3. Com os mesmos conjuntos A e B do exercício anterior a representação gráfica de B X A como ao lado:



4. O produto cartesiano de A por A é indicado por A^2. Para o conjunto A = {1, 2, 3}, temos A^2 = A X A = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}.

OBSERVAÇÃO O produto cartesiano de ℝ por ℝ indicamos por $\mathbb{R}^2$. Isto é: ℝ X ℝ = $\mathbb{R}^2$.

Relações

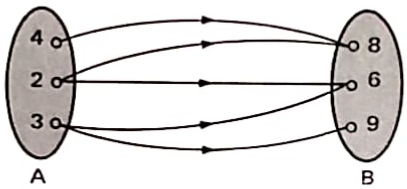
Se A e B são dois conjuntos quaisquer, podemos relacionar ou associar elementos de A com elementos de B de alguma maneira, à nossa escolha. Quando fazemos isso, dizemos que fica estabelecida uma relação binária entre os conjuntos A e B. Vejamos alguns exemplos preliminares:

1. Dados os conjuntos A = {2, 3, 4} e B = {6, 8, 9}, podemos associar um elemento qualquer x de A com elementos y de B através, por exemplo, da sentença: "x se associa com y se, e somente se, x dividir y".

Com a sentença acima e com os conjuntos dados, temos:

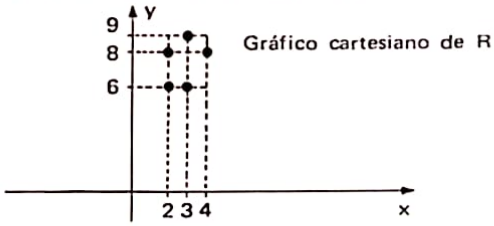
- 2 associa-se com 6 e 8, pois 2 divide 6 e 8;
- 2 não se associa com 9, pois 2 não divide 9;
- 3 associa-se com 6 e 9, pois 3 divide 6 e 9;
- 3 não se associa com 8, pois 3 não divide 8;
- 4 associa-se com 8, pois 4 divide 8;
- 4 não se associa com 6 nem com 9, pois 4 não divide 6 nem 9.

Obtemos assim uma relação ou correspondência do conjunto A no conjunto B. O diagrama seguinte ajuda você a visualizar a relação obtida: as flechas indicam elementos de A que se associam com elementos de B.



x ∈ A associa-se com y ∈ B ⇔ x divide y

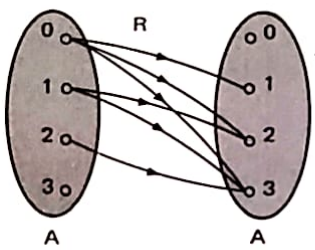
A relação obtida é representada pelo conjunto:
R = {(x, y) ∈ A X B | x divide y}, isto é:
R = {(2, 6), (2, 8), (3, 6), (3, 9), (4, 8)}



2. No conjunto A = {0, 1, 2, 3} formemos uma relação R associando um elemento x ∈ A com um elemento y ∈ A se, e somente se, x < y.

Os elementos da relação R são, então, todos os pares ordenados de A X A, nos quais o primeiro elemento é menor que o segundo.

Logo: R = {(0; 1), (0; 2), (0; 3),(1; 2), (1; 3), (2; 3)}



x ∈ A associa-se com y ∈ A ⇔ x < y

Definição de relação: sendo A e B conjuntos quaisquer, uma relação R, de A em B, é qualquer subconjunto do produto cartesiano A X B.

R é uma relação de A em B ⇔ R ⊂ (A X B)

Exemplo

O produto cartesiano de A = {0, 1, 2} por B = {3, 4} é A X B = {(0; 3), (0; 4), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2;4)}. Algumas

Scanned by CamScanner

relações de A em B são:

$R = \{(0; 3), (0; 4), (1; 4)\}$;
$S = \{(0; 3), (1; 3), (2; 3)\}$;
$T = \{(1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4)\}$.

EXERCÍCIO

Enumerar os pares ordenados, representar por diagrama de flechas e construir o gráfico cartesiano da relação R de A em B, definida por:

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 3\}.$$

Dados:

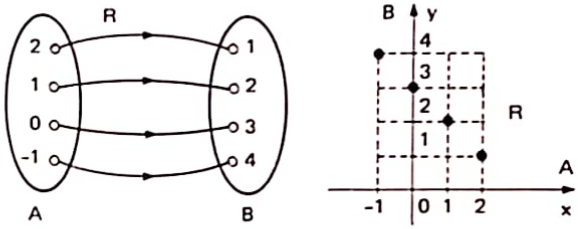
$$A = \{-1, 0, 1, 2\} \text{ e } B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Solução

Os pares ordenados (x, y), com $x \in A$, $y \in B$ e tais que $x + y = 3$, são: $(-1; 4)$, $(0; 3)$, $(1; 2)$ e $(2; 1)$.

Portanto:

$$R = \{(-1; 4), (0; 3), (1; 2), (2; 1)\}.$$



ESTUDO DA FUNÇÃO

Conceito

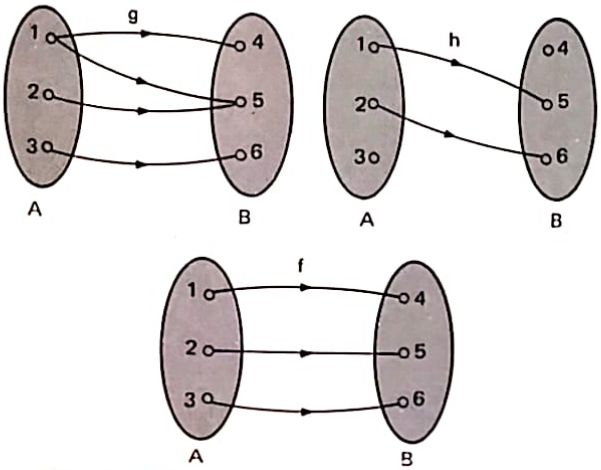
Sejam dois conjuntos A e B e seja f uma relação de A em B.

Diz-se que f é uma função (ou aplicação) de A em B se, e somente se, para todo elemento $x \in A$ existir um único elemento $y \in B$, tal que $(x; y) \in f$.

Acompanhe os exemplos seguintes para entender melhor o conceito de função.

Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$ e as relações g, h e f, de A em B, dadas por:

$g = \{(1; 4), (1; 5), (2; 5), (3; 6)\}$;
$h = \{(1; 5), (2; 6)\}$;
$f = \{(1; 4), (2; 5), (3; 6)\}$.



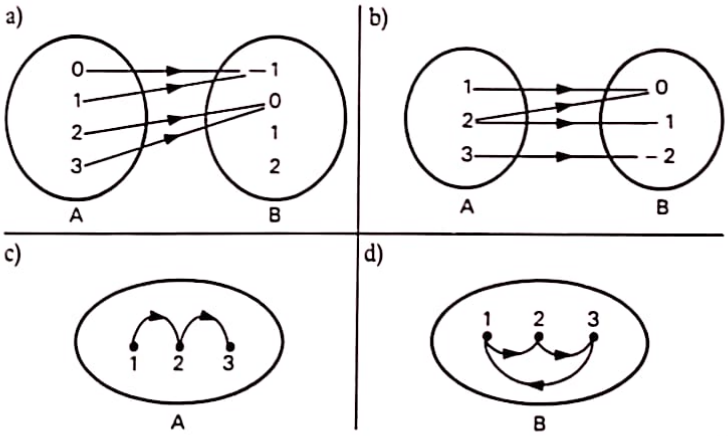
Observe, então, que:

- na relação g, o elemento $1 \in A$ associa-se com dois elementos distintos de B (o 4 e o 5); isto contraria a definição de função. Portanto, g não é uma função de A em B.
- na relação h, o elemento $3 \in A$ não se associa com nenhum elemento de B; o que também contradiz a definição de função. Logo h, também, não é função de A em B.
- na relação f, não existe elemento de A que não esteja associado a algum elemento de B, e mais ainda cada elemento de A está associado com um único elemento de B. Portanto, a relação f é uma função de A em B.

Conclusão: Para uma relação de um conjunto A em um conjunto B ser uma função de A em B: "Todo elemento de A deve mandar flecha a algum elemento de B e cada elemento de A deve mandar uma única flecha para algum elemento de B."

EXERCÍCIO

Quais dos diagramas das flechas abaixo representam relações que são funções?



Solução

a) A relação é função de A em B. "Todos os elementos de A mandam flechas e cada elemento manda uma única flecha." Não importa que o zero e o 1 mandem flechas para o mesmo elemento (−1) e que o 2 e o 3 mandem flechas para o mesmo elemento (zero).

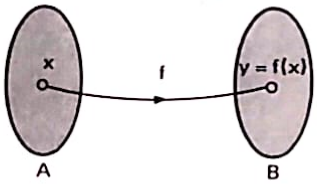
b) A relação não é função de A em B, pois o elemento $2 \in A$ está mandando duas flechas.

c) A relação não é função de A em A, pois o elemento $3 \in A$ não está mandando flecha.

d) A relação é função de A em A pois todos os elementos estão mandando flecha e cada um está mandando uma única flecha (o 1 manda para o 2; o 2 manda para o 3; o 3 manda para o 1).

Scanned by CamScanner

Domínio de uma função



Se f é uma função de A em B, o conjunto de partida A passa a ser chamado de domínio da função f e o conjunto B, contradomínio de f.

A = D(f) = domínio de f B = C.D.(f) = contradomínio de f.

Se x é um elemento qualquer de A, o único elemento y de B que se associa com x é indicado por y = f(x) (Leia: y igual a f de x).

Para indicar uma função f, de A em B, usamos as notações:

$$\boxed{f : A \to B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B}$$

Exemplos

1. A função f : A → B, que associa a cada x ∈ A, o quadrado de x é indicada por $f(x) = x^2$. Tomando por exemplo, A = {0, 1, 2} e B = {0, 1, 2, 3, 4}, temos que:

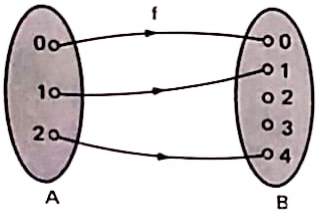
A imagem de 0 pela função f é $f(0) = 0^2 = 0$ (basta substituir x por 0 na expressão $f(x) = x^2$);

A imagem de 1 pela função f é $f(1) = 1^2 = 1$;

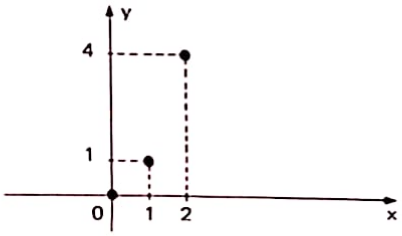
A imagem de 2 pela função f é $f(2) = 2^2 = 4$.

Essa função de A em B pode ser representada das seguintes maneiras:

- por extensão: f = {(0; 0), (1; 1), (2; 4)}
- por diagrama das flechas:



- por gráfico cartesiano:



2. A função g: ℝ → ℝ, que associa a cada número real x o triplo de x, é indicada por g(x) = 3x. Temos por exemplo:

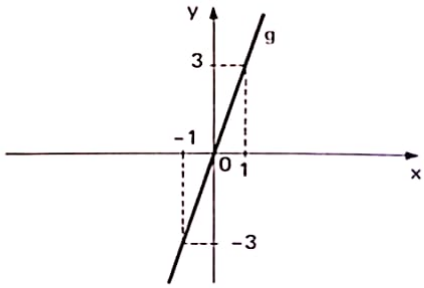
$g(0) = 3 \cdot 0 = 0$

$g(-1) = 3 \cdot (-1) = -3$

$g(1) = 3 \cdot 1 = 3$

$g\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

Como agora a função é definida de ℝ em ℝ, teremos infinitos pares ordenados que irão satisfazer a função e o gráfico que melhor irá representar tal função é o seguinte:



EXERCÍCIOS

1. Seja f : ℝ → ℝ, definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Calcular:

a) f(0); c) $f(\sqrt{2})$; e) $f(1 + \sqrt{2})$.

b) f(−1); d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$;

Solução

$f(x) = x^2 - 3x + 2$ nos dá:

a) $f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$;

b) $f(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$;

c) $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 3 \cdot \sqrt{2} + 2 = 2 - 3\sqrt{2} + 2 = 4 - 3\sqrt{2}$;

d) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 =$

$= \frac{1 - 6 + 8}{4} = \frac{3}{4}$;

e) $f(1 + \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})^2 - 3 \cdot (1 + \sqrt{2}) + 2 =$

$= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 - 3\sqrt{2} + 2 = 2 - \sqrt{2}$.

2. Os valores de x para os quais f(x) = 0 chamam-se raízes ou zeros da função f. Determinar as raízes da função do exercício anterior.

Solução

Para $f(x) = x^2 - 3x + 2$, temos $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 =$

$= 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$ ou $\boxed{x = 2}$.

Portanto, as raízes de $f(x) = x^2 - 3x + 2$ são 1 e 2.

3. Sendo f : ℝ₊ → ℝ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$, calcular:

a) f(0); b) f(64); c) $f\left(\frac{1}{64}\right)$

Solução

$f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$ nos dá:

a) $f(0) = \sqrt[3]{0} + \sqrt{0} = 0$;

b) $f(64) = \sqrt[3]{64} + \sqrt{64} = \sqrt[3]{4^3} + \sqrt{8^2} = 4 + 8 = 12$;

c) $f\left(\frac{1}{64}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} + \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2 + 1}{8} = \frac{3}{8}$.

4. Sendo $f(x) = x^2$, assinale (V) ou (F):

a) f(2) = f(−2); ( )

b) f(1) > f(0); ( )

c) $f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3})$; ( )

d) $f(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) = f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{3})$; ( )

e) $f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$. ( )

Solução

a) (V) $\begin{cases} f(2) = 2^2 = 4 \\ f(-2) = (-2)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow f(2) = f(-2)$;

Scanned by CamScanner

b) (V) $\begin{cases} f(1) = 1^2 = 1 \\ f(0) = 0^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(1) > f(0);$

c) (F) Vamos primeiro calcular $f(\sqrt{2} + \sqrt{3})$:

$f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}.$

Agora vamos calcular $f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3})$:

$f(\sqrt{2})^2 + f(\sqrt{3})^2 = 2 + 3 = 5.$

Portanto:

$\begin{cases} f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 5 + 2\sqrt{6} \\ f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) = 5 \end{cases} \Rightarrow f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \neq f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3});$

d) (V) $f(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2 = (\sqrt{6})^2 = 6$

$f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{3}) = (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) = f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{3});$

e) (V) $f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pois $f(x) = x^2$ e x^2 é não negativo por ser potência de expoente par.

5. Para a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 4x$, pergunta-se:

a) Quais os valores de $f(0)$ e $f(4)$?

b) Para quais valores de x ocorre $f(x) = -3$?

Solução

a) $\begin{cases} f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0 \\ f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 = 16 - 16 = 0 \end{cases}$

(0 e 4 são as raízes de f).

b) $f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x = -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$ ou $\boxed{x = 3}$.

6. Para a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x < 0 \\ x^2 + 1, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$, calcular:

a) $f(-1)$; b) $f(-2)$; c) $f(0)$; d) $f(1)$; e) $f(\sqrt{2})$.

Solução

A função f está definida por duas sentenças: o seu valor, para um elemento x, é $\boxed{x - 1}$ (A) se x for negativo ou $\boxed{x^2 + 1}$ (B), se x for positivo ou nulo. Então:

a) $-1 < 0 \Rightarrow f(-1) \overset{(A)}{=} -1 - 1 = -2;$

b) $-2 < 0 \Rightarrow f(-2) \overset{(A)}{=} -2 - 1 = -3;$

c) $0 \geqslant 0 \Rightarrow f(0) \overset{(B)}{=} 0^2 + 1 = 1;$

d) $1 > 0 \Rightarrow f(1) \overset{(B)}{=} 1^2 + 1 = 2;$

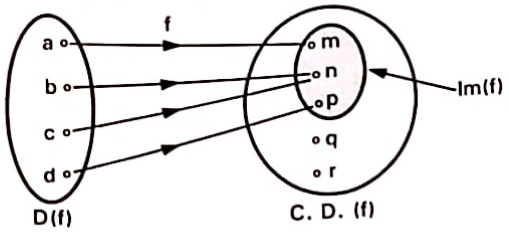
e) $\sqrt{2} > 0 \Rightarrow f(\sqrt{2}) \overset{(B)}{=} (\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3.$

A imagem de uma função

Como você já percebeu, uma função f fica determinada quando conhecemos seu domínio D(f), seu contradomínio C.D.(f) e a lei que associa elementos x do domínio a elementos y do contradomínio.

Vamos agora destacar um subconjunto importante do contradomínio de f. Esse subconjunto, denominado imagem de f, e indicado por Im(f), é formado pelos elementos do contradomínio que são de fato imagens de elementos do domínio.

Por exemplo, no diagrama seguinte:



a imagem de f é formada pelos elementos m, n e p (observe que q e r não são extremidades de flechas, ou seja, não são imagens de elementos do domínio). Para esse diagrama, temos:

$$Im(f) = \{m, n, p\}$$

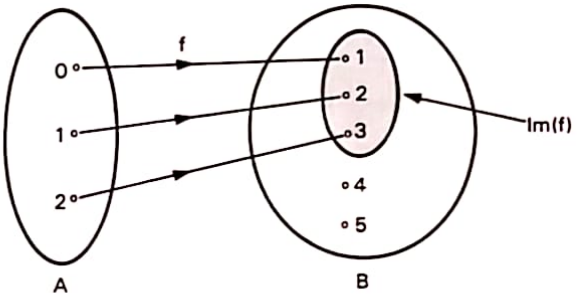
Resumindo:

> Sendo f uma função de A em B, sua imagem é o conjunto Im(f) dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$.

Exemplos

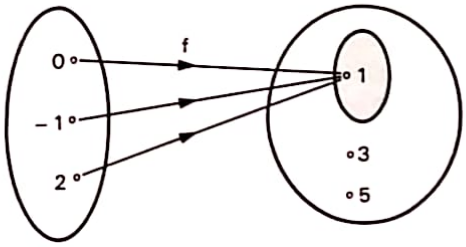
1. Para os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e para a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = x + 1$, temos:

$\begin{cases} f(0) = 0 + 1 = 1; \\ f(1) = 1 + 1 = 2; \\ f(2) = 2 + 1 = 3. \end{cases}$



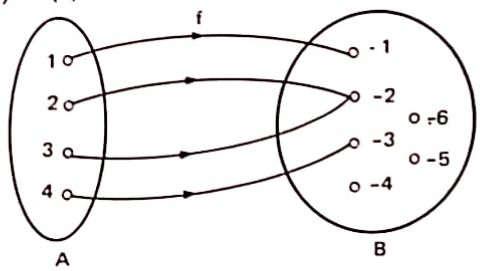
Portanto: $\begin{cases} D(f) = A = \{0, 1, 2\}; \\ C.D.(f) = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \\ Im(f) = \{1, 2, 3\}. \end{cases}$

2. Para a função f dada pelo diagrama seguinte, temos $Im(f) = \{1\}$.



EXERCÍCIOS

1. Para a função f definida pelo diagrama seguinte, assinale (V) ou (F):



a) $f(2) = f(3)$; ( )

b) $f(4) > f(3)$; ( )

Scanned by CamScanner

c) $-4 \in Im(f)$; ( )
d) $-1 \in Im(f)$; ( )
e) $Im(f) = B$. ( )

Solução

a) (V) · $f(2) = -2 = f(3)$;

b) (F) · $\begin{cases} f(4) = -3 \\ f(3) = -2 \end{cases} \Rightarrow f(4) < f(3)$;

c) (F) · $-4 \notin Im(f)$. (Observe que "não chega flecha" em -4);

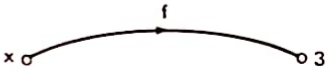
d) (V) · $-1 \in Im(f)$ pois $f(1) = -1$, ou seja, -1 é a imagem de 1 através de f;

e) (F) · $\begin{cases} Im(f) = \{-1, -2, -3\} \\ B = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6\} \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow Im(f) \subset B$ e $Im(f) \neq B$.

2. Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$, pergunta-se:

a) O número 3 pertence à imagem de f?
b) E o número -1? E o número -3?

Solução



O número 3 pertencerá à imagem de f se existir um número real x tal que $f(x) = 3$. A condição $f(x) = 3$ nos dá: $x^2 - 1 = 3$ ou $x^2 = 4$, obtendo-se $\boxed{x = -2}$ ou $\boxed{x = 2}$.

Mostramos acima que existem dois números reais (-2 e 2) associando-se com o número 3, através de f. Logo: $3 \in Im(f)$;

Com o mesmo raciocínio do item anterior, fazemos $f(x) = -1$, obtendo $x^2 - 1 = -1$ e, portanto, $\boxed{x = 0}$.

Logo: $-1 \in Im(f)$.

Para o número -3, obtemos $x^2 - 1 = -3$ ou $x^2 = -2$, equação que não tem solução em $\mathbb{R}$.

Logo: $-3 \notin Im(f)$.

Gráficos de relações e funções

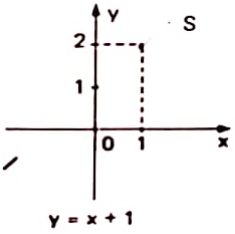
Através dos gráficos das relações, podemos tirar algumas conclusões importantes. Como, por exemplo, quando o gráfico de uma relação é o gráfico de uma função.

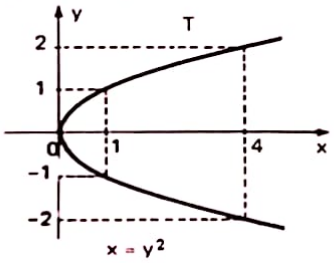
Já vimos como representar uma relação de A em B, num sistema de eixos cartesianos (lembre-se de que A fica representado sobre o eixo do x e B, sobre o eixo do y).

Por exemplo, as relações:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x + 1\} \text{ e}$$
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$$

ficam representadas pelos gráficos seguintes:





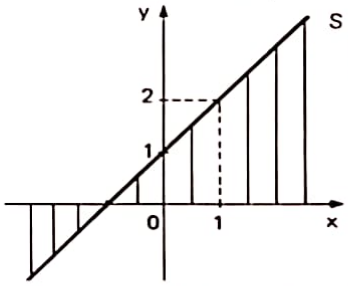
O problema que agora se coloca é o seguinte: dado o gráfico de uma relação, como reconhecer se essa relação é uma função?

A resposta é simples: o fato de uma função $f: A \to B$ associar a cada elemento de A um único elemento de B é traduzido geometricamente assim:

> Toda reta paralela ao eixo dos y, traçada por um ponto qualquer do domínio de f, corta o gráfico de f num único ponto.

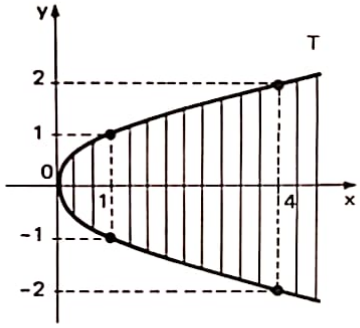
Voltando, agora às relações S e T do início, vemos que:

• qualquer reta paralela ao eixo dos y corta o gráfico de S num único ponto. Logo, S é função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



Toda reta vertical corta o gráfico de S num único ponto.

• existem retas verticais cortando o gráfico de T em dois pontos distintos. Logo, T não é função de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}$.

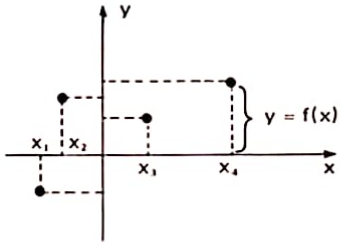


Existem retas verticais que cortam o gráfico de S em dois pontos distintos.

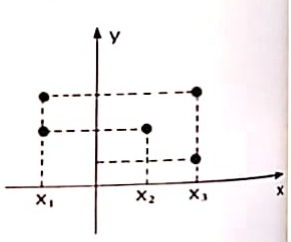
EXERCÍCIO

Determinar quais dos gráficos seguintes podem ser gráficos de funções.

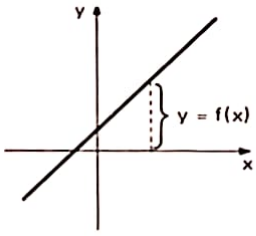
a) $f: \{x_1; x_2; x_3; x_4\} \to \mathbb{R}$;



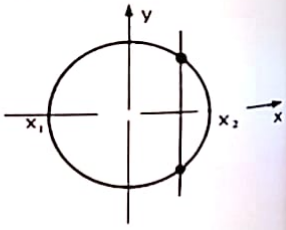
b) $f: \{x_1; x_2; x_3\} \to \mathbb{R}$;



c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;



d) $f:]x_1; x_2[\to \mathbb{R}$.



Solução

a) O gráfico em questão é o gráfico de uma função, pois as retas paralelas ao eixo y que passam por x_1, x_2, x_3, x_4 têm um único ponto da função pertencente a cada uma delas.

Scanned by CamScanner

b) Observe que as retas paralelas ao eixo y, que passam por x_1 e x_3, têm dois pontos da função em cada uma delas; não podendo, portanto, o gráfico dessa relação ser o gráfico de uma função.

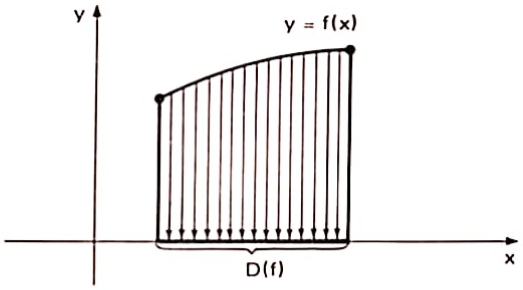
c) Toda reta paralela ao eixo y vai interceptar a reta num único ponto. Portanto, é o gráfico de uma função.

d) Veja pelo gráfico que existem retas paralelas a y, que interceptam o gráfico em dois pontos. Logo não é o gráfico de uma função.

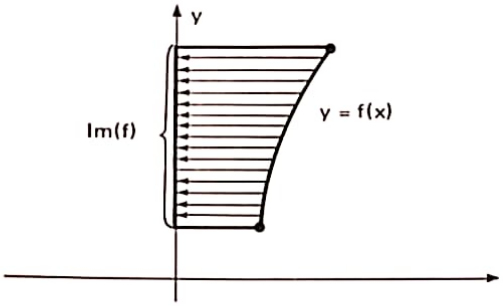
Domínio e imagem no gráfico

Dado o gráfico de uma função f, temos:

- o domínio de f é a projeção de seu gráfico sobre o eixo dos x.

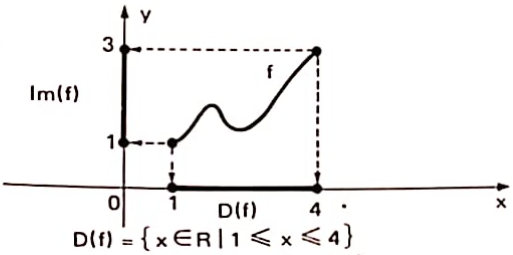


- a imagem de f é a projeção de seu gráfico sobre o eixo dos y.



Exemplos

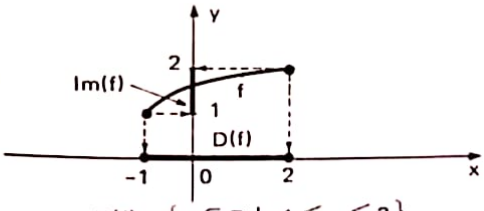
1.



$D(f) = \{x \in R \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}$

$Im(f) = \{y \in R \mid 1 \leqslant y \leqslant 3\}$

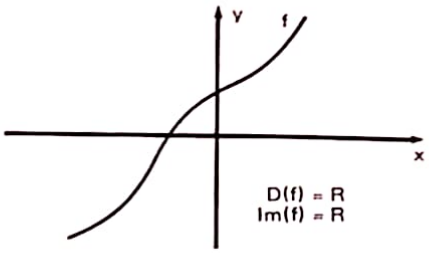
2.



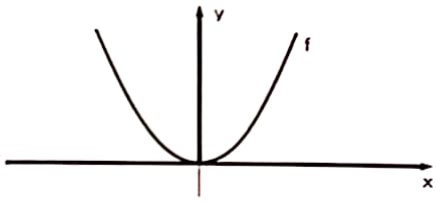
$D(f) = \{x \in R \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$

$Im(f) = \{y \in R \mid 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

3.



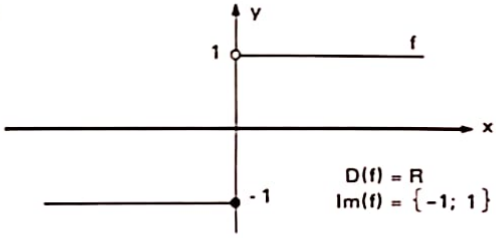
4.



$D(f) = R$

$Im(f) = \{y \in R \mid y \geqslant 0\}$

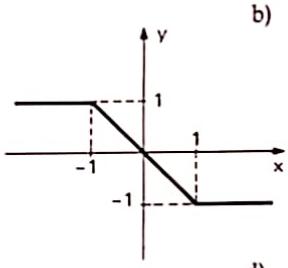
5.



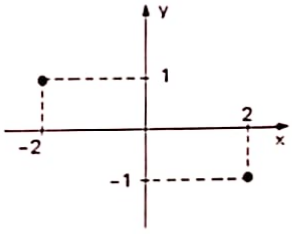
EXERCÍCIO

Determinar o conjunto imagem das funções dadas pelos gráficos abaixo:

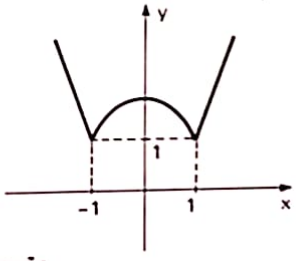
a)



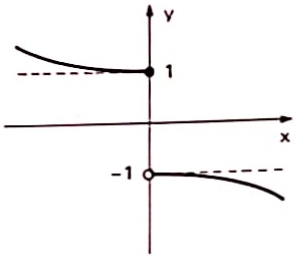
b)



c)

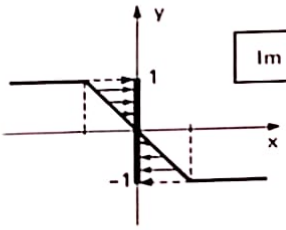


d)



Solução

a)

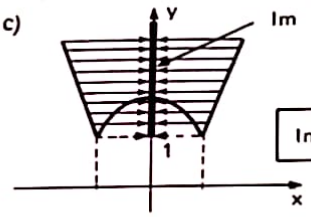


$Im = \{y \in R \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$

b) Im = $[-1, 1]$

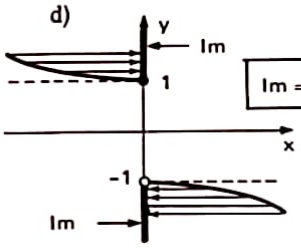
Scanned by CamScanner

c)



$Im = \{y \in R \mid y \geqslant 1\}$

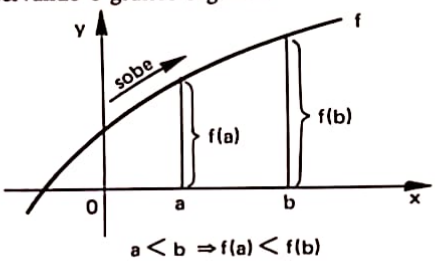
d)



$Im = \{y \in R \mid y < -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}$

Funções crescentes e decrescentes

Observando o gráfico seguinte

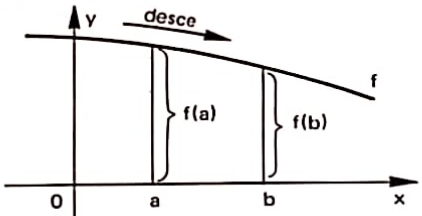


$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

verificamos que se a e b são dois números reais quaisquer com $a < b$, então ocorre $f(a) < f(b)$; ou seja: quando x cresce, f(x) também cresce.

Funções com esse comportamento, chamam-se funções crescentes em $\mathbb{R}$.

Analogamente, no gráfico seguinte

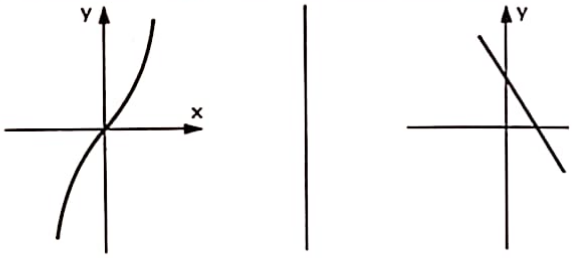


$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

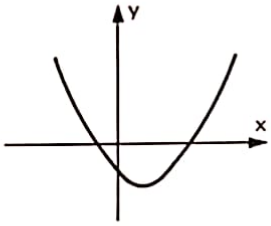
se a e b são dois números reais quaisquer com $a < b$, então ocorre $f(a) > f(b)$, ou seja: quando x cresce, f(x) decresce. Este comportamento caracteriza uma função decrescente em $\mathbb{R}$.

Exemplos

1. Função crescente em $\mathbb{R}$; **2.** Função decrescente em $\mathbb{R}$;



3. Função não crescente e não decrescente em $\mathbb{R}$.



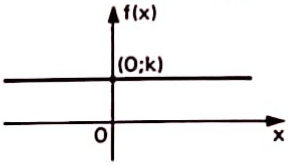
PRINCIPAIS FUNÇÕES

Função constante

É a função que associa a todo número real x um mesmo número real. Isto é: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = k (\forall\, x \in \mathbb{R})$.

Gráfico: o gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo dos x, e que intercepta o eixo y no ponto (0; k).

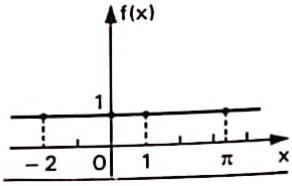
Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$;
Imagem: $Im(f) = \{k\}$.



Exemplo

Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1$ temos que:

para $x = 0$, $f(0) = 1$;
para $x = 1$, $f(1) = 1$;
para $x = -2$, $f(-2) = 1$;
para $x = \pi$, $f(\pi) = 1$
etc.



EXERCÍCIO

Para a função f definida por:

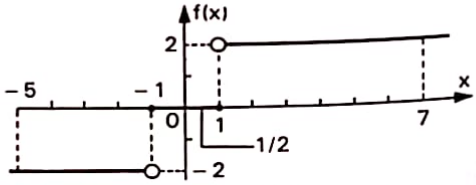
$$f(x) = \begin{cases} -2, \text{ se } x < -1; \\ 0, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2, \text{ se } x > 1. \end{cases}$$

pede-se:

a) Representar graficamente a função f;
b) Calcular: $f(-5)$; $f(1/2)$; $f(7)$;
c) Determinar o domínio e a imagem de f.

Solução

a)



Observando o gráfico concluímos facilmente que:

b) $f(-5) = -2$; $f(1/2) = 0$; $f(7) = 2$.
c) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{-2; 0; 2\}$.

Scanned by CamScanner

Função polinomial do 1º grau

Função polinomial, ou função afim, é aquela que associa a todo número real x, o número real $a \cdot x + b$ (sendo a e b números reais quaisquer e $a \neq 0$). Simbolicamente temos:

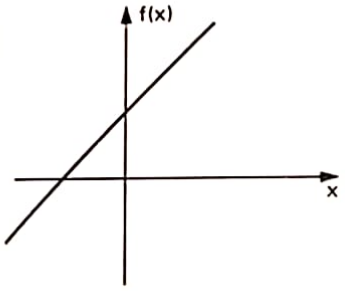
$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ sendo } f(x) = a \cdot x + b;\ a \neq 0}$$

Exemplos

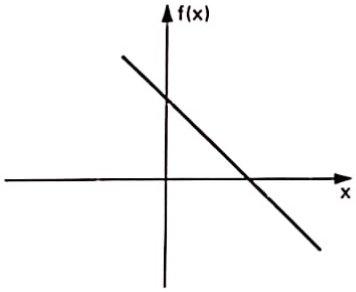
1. $f(x) = 2x + 1$.
2. $y = -2x - 5$.
3. $f(x) = 3x$ (neste caso particularmente como $b = 0$ a função é também chamada linear).

Gráfico: o gráfico da função $f(x) = a \cdot x + b$ é uma reta não paralela aos eixos x e y.

1.º caso: $a > 0$
(função crescente)



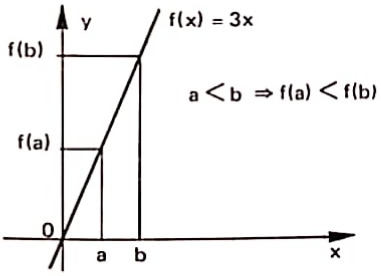
2.º caso: $a < 0$
(função decrescente)



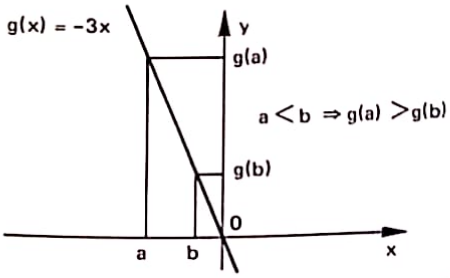
O domínio de $f(x) = a \cdot x + b$ é $D(f) = \mathbb{R}$.
A imagem de $f(x) = a \cdot x + b$ é $Im(f) = \mathbb{R}$.

Exemplos

1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x$, é crescente em $\mathbb{R}$.



2. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -3x$, é decrescente em $\mathbb{R}$.



OBSERVAÇÃO quando nada for mencionado sobre domínio de uma função ele será o conjunto dos números reais.

EXERCÍCIOS

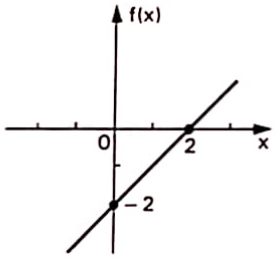
1. Representar graficamente as seguintes funções:
a) $f(x) = x - 2$; b) $f(x) = -2x - 4$.

Solução

Como os gráficos das funções são retas, dois pontos distintos são suficientes para determiná-las.

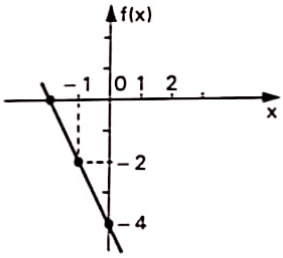
a) Escolhemos, portanto, dois valores para x (pertencentes ao domínio da função), e encontramos as respectivas imagens desses valores. Por exemplo, vamos escolher $x = 0$ e $x = 2$.

Para $x = 0$, vem: $f(0) = 0 - 2 = -2 \therefore f(0) = -2$;
Para $x = 2$, vem: $f(2) = 2 - 2 = 0 \therefore f(2) = 0$.
Com esses dados podemos fazer o gráfico da função.



b) Analogamente ao item anterior escolhemos dois valores pertencentes a D(f) e calculamos as respectivas imagens desses valores.

Para $x = -1$, obtemos $f(-1) = -2(-1) - 4 = -2$;
Para $x = 0$, obtemos $f(0) = -2(0) - 4 = -4$.



2. Determinar $k \in \mathbb{R}$, de modo que a função $f(x) = \left(\frac{k}{2}\right)x - 2$ seja crescente.

Solução

Para que f(x) seja crescente, $a = \frac{k}{2}$ deve ser positivo; portanto $\frac{k}{2}$ deve ser maior que zero, logo $k > 0$.

3. Determinar os zeros (ou raízes) das seguintes funções:
a) $f(x) = 2x - 4$; c) $f(x) = 5x$.
b) $y = \frac{-3x}{2} - 1$;

Solução

Lembrando que raiz da função é o valor de x tal que $f(x) = 0$ temos:

a) $f(x) = 2x - 4 \Rightarrow 0 = -2x - 4 \Rightarrow \boxed{x = -2}$;

b) $y = \frac{-3x}{2} - 1 \Rightarrow 0 = \frac{-3x}{2} - 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-2}{3}}$;

c) $f(x) = 5x \Rightarrow 0 = 5x \Rightarrow \boxed{x = 0}$

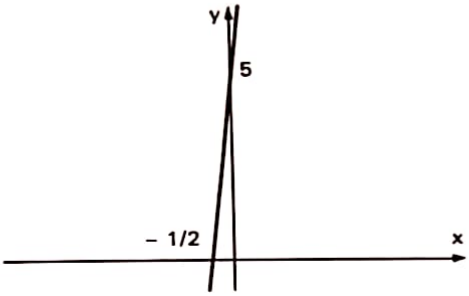
Scanned by CamScanner

4. (Fuvest, SP) Esboce o gráfico da curva $y = (x + 3)^2 + (x - 2)^2$.

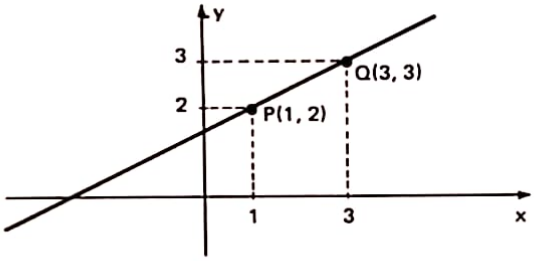
Solução

$$y = (x + 3)^2 - (x - 2)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = (x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 4x + 4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = x^2 + 6x + 9 - x^2 + 4x - 4 \Leftrightarrow$$
$$\boxed{y = 10x + 5}$$

A curva pedida é, então, uma reta, pois $y = 10x + 5$ é uma função afim. Essa reta está desenhada a seguir:



5.



A reta acima é o gráfico da função $y = ax + b$. Determine as constantes a e b.

Solução

Se o ponto $P = (1, 2)$ pertence ao gráfico da função, então, fazendo $x = 1$ e $y = 2$ na igualdade $y = ax + b$, obtemos uma sentença verdadeira, ou seja, ocorre: $2 = a \cdot 1 + b$ ou $\boxed{a + b = 2}$ (I).

De maneira análoga, para o ponto $Q = (3, 3)$, obtemos $3 = a \cdot 3 + b$ ou $\boxed{3a + b = 3}$ (II).

Agora, (II) – (I) nos dá: $2a = 1$ ou $\boxed{a = \frac{1}{2}}$.

Substituindo $a = \frac{1}{2}$ em (I), vem $\frac{1}{2} + b = 2$ ou $\boxed{b = \frac{3}{2}}$.

Portanto, as constantes procuradas são:

$\boxed{a = \frac{1}{2} \text{ e } b = \frac{3}{2}}$ e a função é $\boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$

Função polinomial do 2º grau

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de função polinomial de 2º grau, ou função quadrática, quando associa a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, onde a, b e c são números reais dados e a é não nulo.

Resumindo:

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será quadrática quando for da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exemplos

São quadráticas as funções:

$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, onde $a = 3$, $b = -2$ e $c = 1$;
$g(x) = -x^2 + 3x + 2$, onde $a = -1$, $b = 3$ e $c = 2$;
$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x$, onde $a = \frac{1}{2}$, $b = 5$ e $c = 0$;
$p(x) = -x^2 - 1$, onde $a = -1$, $b = 0$ e $c = -1$;
$q(x) = x^2$, onde $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$.

EXERCÍCIOS

1. Determine os coeficientes a, b e c de cada função quadrática seguinte:

a) $f(x) = (2x - 3)^2 - (x - 1)^2$;
b) $g(x) = (x - 1)(x + 2)$;
c) $h(x) = (mx + 1)^2 - 3$, $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.

Solução

Desenvolvendo cada uma das expressões dadas, obtemos:

a) $f(x) = 4x^2 - 12x + 9 - x^2 + 2x - 1 = 3x^2 - 10x + 8$;
b) $g(x) = (x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$;
c) $h(x) = m^2x^2 + 2mx + 1 - 3 = m^2x^2 + 2mx - 2$.

Portanto, os coeficientes a, b e c são:

a) Para a função f: $a = 3$, $b = -10$, $c = 8$;
b) Para a função g: $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$;
c) Para a função h: $a = m^2$, $b = 2m$, $c = -2$.

2. É dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (m^2 - 1)x^2 + 3mx - 1$, onde m é um número real. Para quais valores de m, f será uma função quadrática?

Solução

Para que f seja uma função quadrática de x, basta impormos que o coeficiente de x^2 seja não nulo. Como esse coeficiente é $m^2 - 1$ e seu anulamento ocorre para $m = -1$ ou $m = 1$, segue-se que: f é função quadrática de x $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \boxed{m \neq -1}$ e $\boxed{m \neq 1}$.

Gráfico: o gráfico da função quadrática é uma curva denominada parábola, que pode ter a concavidade voltada para cima se $a > 0$ ou voltada para baixo se $a < 0$.

Exemplos

1. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

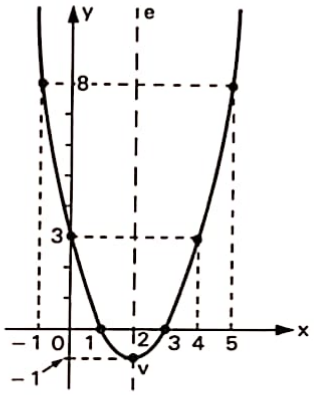
Vamos escolher alguns valores de x pertencentes ao domínio desta função e calcular suas respectivas imagens.

$f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 3 = 8 \longrightarrow f(-1) = 8$;
$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \longrightarrow f(0) = 3$;

Scanned by CamScanner

$f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0 \longrightarrow f(1) = 0;$
$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \longrightarrow f(2) = -1;$
$f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0 \longrightarrow f(3) = 0;$
$f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3 \longrightarrow f(4) = 3;$
$f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 8 \longrightarrow f(5) = 8.$

x	y
−1	8
0	3
1	0
2	−1
3	0
4	3
5	8



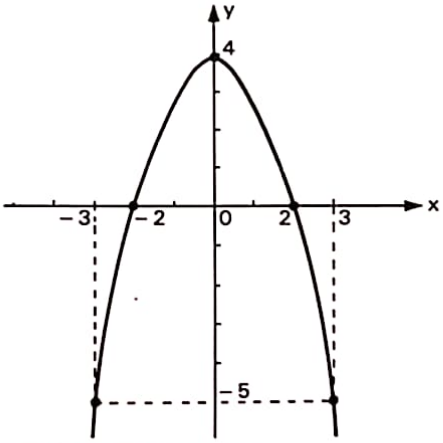
Observe o gráfico e verifique que:
- $D(f) = \mathbb{R}$;
- $Im(f) = [-1; +\infty[$;
- a parábola tem concavidade voltada para cima pois $a > 0$ ($a = 1$);
- a reta e, paralela ao eixo das ordenadas, é o eixo de simetria da parábola;
- o ponto V, onde o eixo de simetria e corta a curva, é denominado vértice da parábola.

2. Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -x^2 + 4$.

De modo análogo ao exercício anterior escolheremos alguns valores de x pertencentes ao domínio da função, calculando suas respectivas imagens.

$f(-3) = -(-3)^2 + 4 = -5 \longrightarrow f(-3) = -5;$
$f(-2) = -(-2)^2 + 4 = 0 \longrightarrow f(-2) = 0;$
$f(0) = -0^2 + 4 = 4 \longrightarrow f(0) = 4;$
$f(2) = -2^2 + 4 = 0 \longrightarrow f(2) = 0;$
$f(3) = -3^2 + 4 = -5 \longrightarrow f(3) = -5.$

x	y
−3	−5
−2	0
0	4
2	0
3	−5

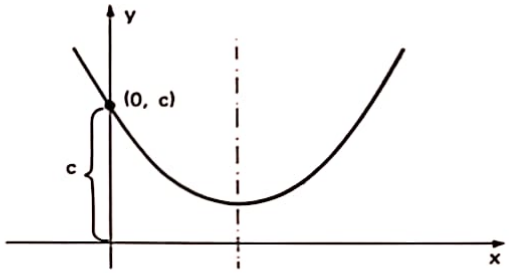


Observe o gráfico e verifique que:
- $D(f) = \mathbb{R}$;
- $Im(f) =]-\infty; 4]$;
- a parábola tem concavidade voltada para baixo pois $a < 0$ ($a = -1$);
- o eixo de simetria da parábola coincide com o eixo das ordenadas (isto ocorrerá sempre que $b = 0$);
- o vértice da parábola pertence ao eixo y (pois $b = 0$).

Intersecção com os eixos

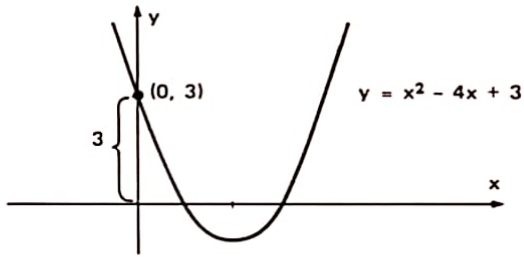
- intersecção com o eixo dos y:

a parábola $y = ax^2 + bx + c$ corta o eixo dos y no ponto (0, c). Obtém-se esse ponto fazendo $x = 0$ em $y = ax^2 + bx + c$.



Exemplo

A parábola $y = x^2 - 4x + 3$ corta o eixo dos y no ponto (0, 3). Veja que $x = 0$ implica $y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$



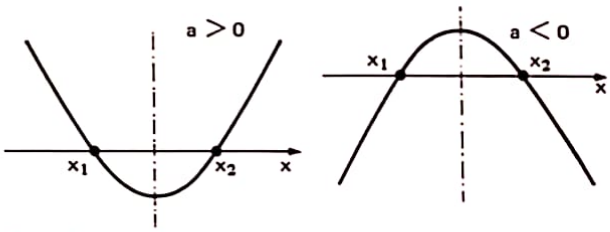
- intersecção com o eixo dos x:

em relação ao eixo dos x, podem ocorrer três casos:

1º) $\Delta > 0$

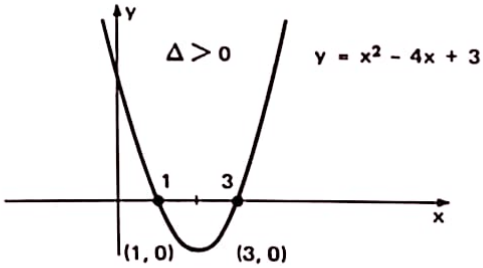
A parábola corta o eixo x em dois pontos distintos. As abscissas desses dois pontos são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$; são elas:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$



Exemplo

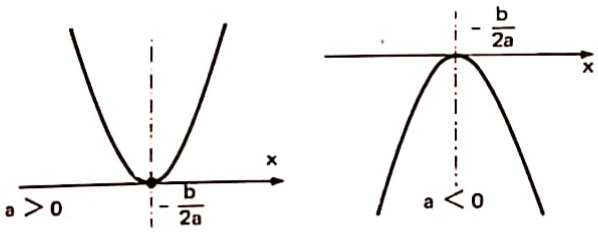
A parábola $y = x^2 - 4x + 3$ corta o eixo dos x nos pontos (1, 0) e (3, 0). Obtemos esses pontos, fazendo $x^2 - 4x + 3 = 0$ e calculando x.



Scanned by CamScanner

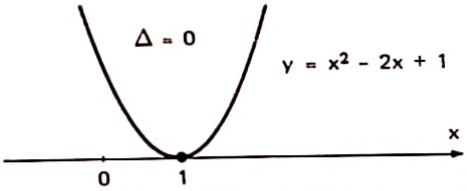
2º) $\Delta = 0$

A parábola tangencia o eixo dos x no ponto de abscissa $x = -\frac{b}{2a}$ (a equação $ax^2 + bx + c = 0$ agora tem duas raízes iguais).



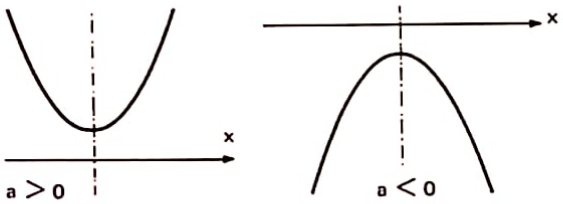
Exemplo

Na função $y = x^2 - 2x + 1$, temos $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$ e, portanto, $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$. A parábola correspondente tangencia o eixo dos x no ponto de abscissa $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$.



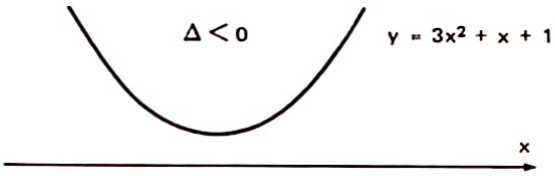
3º) $\Delta < 0$

A parábola não corta o eixo dos x (a equação $ax^2 + bx + c = 0$ agora não tem raízes reais).



Exemplo

Na função $y = 3x^2 + x + 1$ $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$ e, portanto, $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 1 - 12 = -11 < 0$. Seu gráfico não corta o eixo dos x.



Coordenadas do vértice: as coordenadas do vértice da parábola são dadas por:

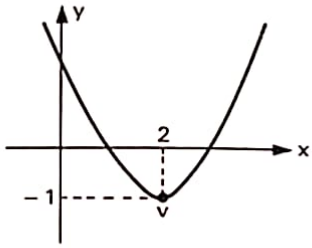
$\boxed{x_v = \frac{-b}{2 \cdot a}}$ e $\boxed{y_v = \frac{-\Delta}{4 \cdot a}}$ onde $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Exemplo

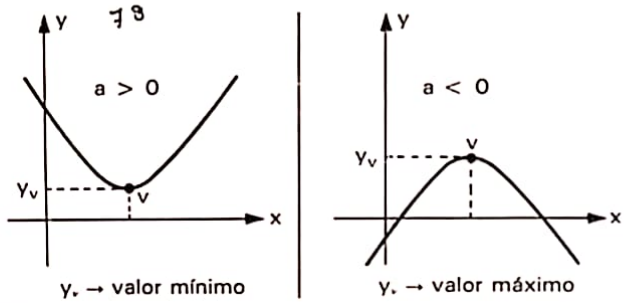
Para $y = x^2 - 4x + 3$, temos $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$, $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$. Portanto o vértice da respectiva parábola é obtido por:

$x_v = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ e $y_v = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1$

$\boxed{V = (2; -1)}$



Valor mínimo e valor máximo: quando na função $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, $a > 0$, esta função assume um valor mínimo que é dado por y_v. Quando $a < 0$, a função assume um valor máximo também dado por y_v.



Exemplo

A função $y = 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1$ tem um valor mínimo pois $a > 0$ ($a = 2$). Esse valor mínimo é dado por:

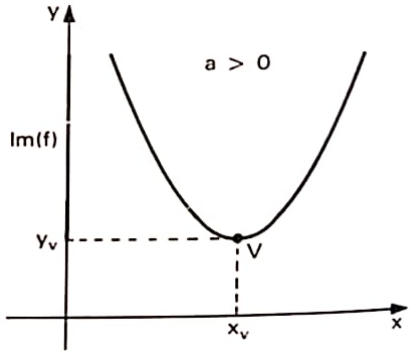
$V_{min} = y_v = -\frac{\Delta}{4 \cdot a} = \frac{-1}{8}$

Imagem: para determinar a imagem de $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, considerem-se dois casos:

• $a > 0$

A projeção do gráfico sobre o eixo dos y nos dá:

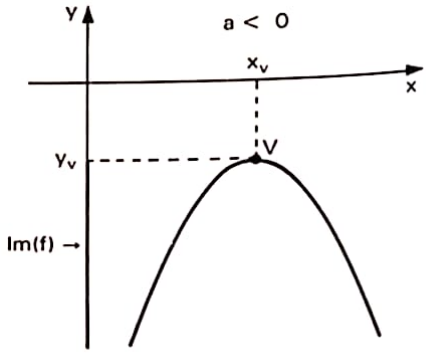
$\boxed{Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant y_v\}}$



• $a < 0$

Agora, a projeção do gráfico sobre o eixo dos y nos dá:

$\boxed{Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant y_v\}}$

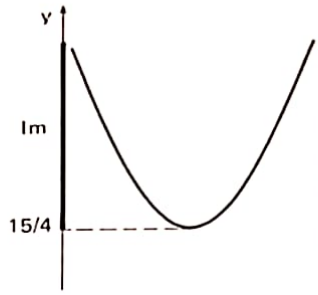


Exemplos

1. $f(x) = x^2 - 5x + 10$ tem concavidade para cima ($a = 1 > 0$) e valor mínimo

$y_{min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}{4 \cdot 1} = \frac{15}{4}$

Scanned by CamScanner



Seu conjunto imagem é:

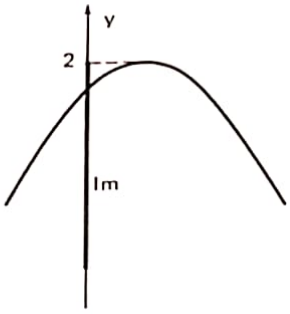
$$Im(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{15}{4} \right\}$$

2. $g(x) = -2x^2 + 4x$ tem concavidade para baixo ($a = -2 < 0$) e valor máximo

$$y_{max} = -\frac{\Delta}{4a} =$$

$$-\frac{4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0}{4 \cdot (-2)} =$$

$$= -\frac{16}{-8} = 2.$$



Sua imagem é: $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 2\}$.

EXERCÍCIOS

1. Esboçar os gráficos das funções abaixo. Em cada uma delas deve figurar: eixo de simetria, vértice e intersecções com os eixos coordenados.

a) $y = x^2$;
b) $y = x^2 - 4$;
c) $y = x^2 - 4x$;
d) $y = -x^2 + x - 2$.

Solução

a) $y = x^2$;
$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0,$
$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$

A concavidade é para cima, pois $a = 1 > 0$.

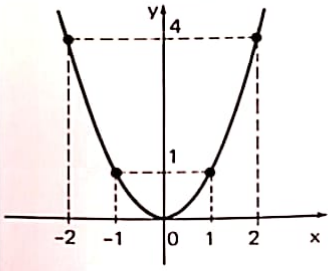
O vértice V tem coordenadas $x_v = -\frac{b}{2a} = 0$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = 0$.

$V = (0, 0)$ é ponto de mínimo da função, pois $a > 0$.

A intersecção da parábola com o eixo dos y é o ponto (0, 0). Insistimos: obtenha esse ponto, fazendo $x = 0$ na expressão $y = x^2$.

Como $\Delta = 0$, a parábola tangencia o eixo dos x no vértice $V = (0, 0)$.

Gráfico:



x	$y = x^2$
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4

O eixo de simetria é a reta vertical passando pelo ponto (0, 0) (o próprio eixo dos y).

b) $y = x^2 - 4$;
$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -4,$
$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16.$

Concavidade: para cima ($a > 0$).

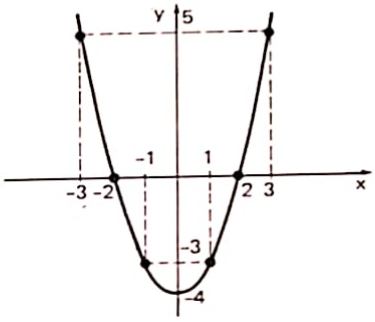
Vértice: $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(0, -\frac{16}{4 \cdot 1}\right) = (0, -4).$

$V = (0, -4)$ é ponto de mínimo.

A intersecção com o eixo dos y é o ponto $(0, -4)$ ($x = 0 \Leftrightarrow y = 0^2 - 4 = -4$).

As intersecções com o eixo dos x são $(-2, 0)$ e $(2, 0)$. ($y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$).

Gráfico:



x	$y = x^2 - 4$
0	-4
1	-3
-1	-3
2	0
-2	0
3	5
-3	5

Eixo de simetria: reta vertical passando por (0, 0).

c) $y = x^2 - 4x$;
$a = 1, \quad b = -4, \quad c = 0,$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 16.$

Concavidade: para cima ($a > 0$).

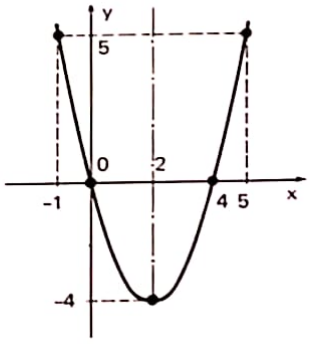
Vértice: $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (2, -4).$

$V = (2, -4)$ é ponto de mínimo.

A intersecção com o eixo dos y é o ponto $(0, 0)$ ($x = 0 \Leftrightarrow y = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0$).

As intersecções com o eixo dos x são (0, 0) e (4, 0) · ($y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$).

Gráfico:



x	$y = x^2 - 4x$
0	0
4	0
2	-4
5	5
-1	5

Eixo de simetria: reta vertical passando pelo ponto (2, 0).

d) $y = -x^2 + x - 2$;
$a = -1, \quad b = 1, \quad c = -2,$
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = -7.$

Concavidade: para baixo ($a < 0$).

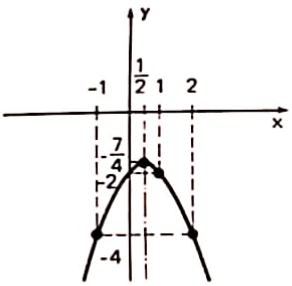
Vértice: $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right).$

$V = \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$ é ponto de máximo.

Scanned by CamScanner

Intersecção com o eixo dos y: $(0, -2)$ $(x = 0 \Leftrightarrow y = -0^2 + 0 - 2 = -2)$.
A parábola não intercepta o eixo dos x, pois $\Delta < 0$.

Gráfico:



x	$y = -x^2 + x - 2$
0	-2
1/2	-7/4
1	-2
-1	-4
2	-4

Eixo de simetria: reta vertical passando por $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

2. Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$, responda os itens seguintes, sem esboçar o gráfico de f.
a) Qual é o eixo de simetria da parábola que representa f?
b) Qual é seu vértice V?
c) V é ponto de máximo ou de mínimo da função f?
d) Qual é o menor valor da função f? Para qual valor da variável x ocorre o valor mínimo de f(x)?
e) Em que ponto(s) a parábola corta o eixo dos y?
f) Em que pontos a parábola corta o eixo dos x?

Solução
Para a função $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$, temos:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = 4 \\ \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 4 - 48 = -44 \end{cases}$$

Portanto:
a) O eixo de simetria da parábola que representa f é a reta paralela ao eixo dos y, passando pelo ponto
$$\left(-\frac{b}{2a}, 0\right) = \left(\frac{2}{6}, 0\right) = \left(\frac{1}{3}, 0\right);$$
b) O vértice da parábola é o ponto
$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{44}{12}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right);$$
c) $V = \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$ é ponto de mínimo da função f, pois a parábola tem concavidade para cima, já que $a = 3 > 0$;
d) O menor valor da função f é $y_{min} = y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{11}{3}$.

Esse valor mínimo de f ocorre para $x = x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{3}$;
e) A parábola corta o eixo dos y no ponto (0, 4). (Observe que $x = 0 \Leftrightarrow y = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 4 = 4$);
f) A parábola não corta o eixo dos x, pois $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ não tem raízes reais, já que $\Delta = -44 < 0$.

3. Determinar a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, tal que $f(1) = 4$, $f(-1) = 6$ e $f(0) = 9$.

Solução
$f(1) = 4 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 4 \Rightarrow a + b + c = 4$ (I)
$f(-1) = 6 \Rightarrow a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 6 \Rightarrow a - b + c = 6$ (II)
$f(0) = 9 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 9 \Rightarrow \boxed{c = 9}$ (III)

Substituindo (III) em (I) e (II), obtemos:
$$\begin{cases} a + b = -5 & \text{(IV)} \\ a - b = -3 & \text{(V)} \end{cases}$$

(IV) + (V) $\Rightarrow 2a = -8 \Rightarrow \boxed{a = -4}$ (VI)

(IV) − (V) $\Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow \boxed{b = -1}$ (VII)

Finalmente, substituindo (III), (VI) e (VII) em

$f(x) = ax^2 + bx + c$, obtemos: $\boxed{f(x) = -4x^2 - x - 9}$

4. Qual deve ser o valor de m para que o valor mínimo da função $f(x) = 2x^2 - 3x + m - 1$ seja 1?

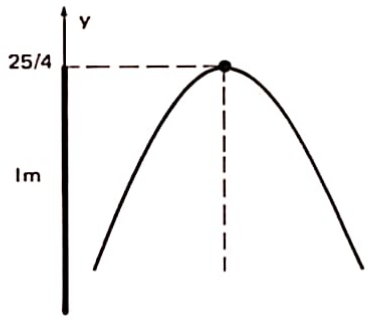
Solução

Inicialmente, temos: $\begin{cases} a = 2; \\ b = -3; \\ c = m - 1; \\ \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m - 1) = \\ \quad = 9 - 8m + 8 = 17 - 8m. \end{cases}$

O valor mínimo da função é $y_{min} = y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{17 - 8m}{8}$ e, como esse valor mínimo é dado e igual a 1, vem: $-\frac{17 - 8m}{8} = 1$ ou $-17 + 8m = 8$, obtendo-se $\boxed{m = \frac{25}{8}}$.

5. Determinar a imagem das funções quadráticas seguintes:
a) $y = -x^2 + 5x$;
b) $y = 4x^2 - 5x + 2$.

Solução
a)



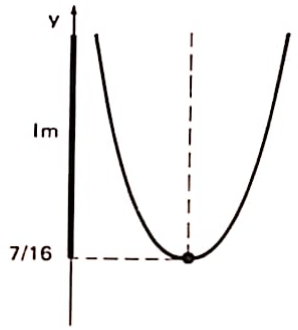
$y = -x^2 + 5x$ tem concavidade para baixo e seu valor máximo é

$$y_{max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)} = \frac{25}{4}.$$

Scanned by CamScanner

Sua imagem é: $\left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{25}{4}\right\}$.

b)



$y = 4x^2 - 5x + 2$ tem concavidade para cima e seu valor mínimo é

$$y_{min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2}{4 \cdot 4} = -\frac{25 - 32}{16} = \frac{7}{16}.$$

Sua imagem é: $\left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{7}{16}\right\}$.

Função modular

Módulo de um número real: Sendo $x \in \mathbb{R}$, temos $|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$

Exemplos

1. $|5| = 5$; **2.** $|-7| = 7$; **3.** $|0| = 0$.

Da definição podemos concluir que se o valor que estiver entre módulo for maior ou igual a zero o resultado será esse próprio valor (veja os exemplos 1 e 3); mas se o valor que estiver entre módulo for negativo o resultado será o oposto desse valor (veja o exemplo 2).

EXERCÍCIO

Calcular:

1. $|1 + \sqrt{3}|$; 2. $|\pi - 1|$; 3. $|\sqrt{2} - \sqrt{3}|$.

Solução

1. Como $1 + \sqrt{3}$ é positivo, o módulo é o próprio número, isto é: $|1 + \sqrt{3}| = 1 + \sqrt{3}$.
2. Como $\pi - 1$ é positivo, o módulo é o próprio número, isto é $|\pi - 1| = \pi - 1$.
3. Como $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ é negativo, o módulo será o oposto deste valor, isto é, $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

> **OBSERVAÇÃO** Como para todo $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x|$.

Exemplo

Calcular:

a) $\sqrt{(-5)^2}$;

b) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$.

Solução

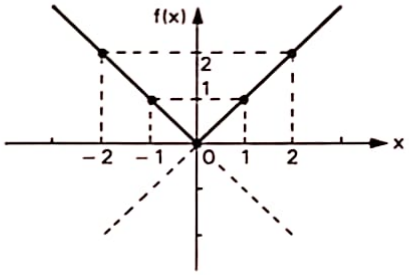
a) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$;

b) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$.

Estudo da função modular: toda função $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$.

Gráfico: Aplicando a definição de módulo teríamos:

$f(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$, portanto o gráfico será:



O domínio e a imagem da função modular serão respectivamente: $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$ (reais não negativos).

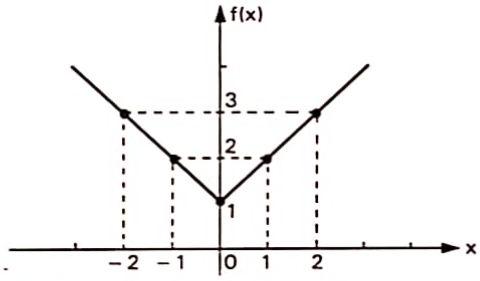
EXERCÍCIOS

1. Esboçar o gráfico das funções seguintes, dando o domínio e a imagem de cada uma delas.

a) $f(x) = 1 + |x|$; b) $y = -|x|$; c) $y = |x^2 - 1|$.

Solução

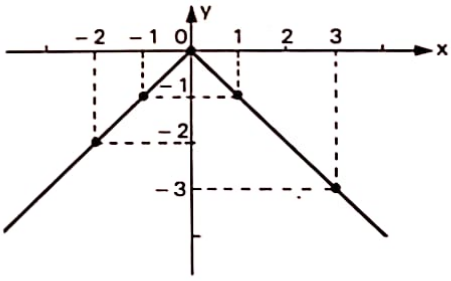
a) Se $x \geqslant 0$, a função se reduz a: $f(x) = 1 + x$.
Se $x < 0$, a função se reduz a: $f(x) = 1 - x$.



O domínio da função será: $D(f) = \mathbb{R}$.
A imagem da função será: $Im(f) = [1; +\infty[$.

b) Se $x \geqslant 0$, a função se reduz a: $y = -x$.
Se $x < 0$, a função se reduz a: $y = -(-x) = x$.

x	y
0	0
1	−1
3	−3
−1	−1
−2	−2



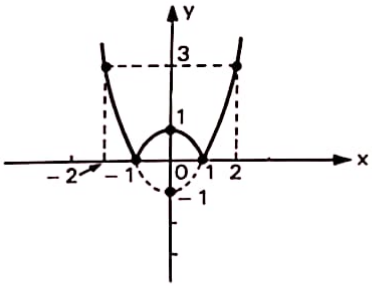
O domínio da função será: $D(f) = \mathbb{R}$.
A imagem da função será: $Im(f) = \mathbb{R}_-$ (reais não positivos).

c) Quando temos entre módulo, uma função g(x), fazemos primeiramente o gráfico de g(x), rebatendo em seguida toda parte que estiver abaixo do eixo x para cima. Acompanhe pelo gráfico da página seguinte.

Scanned by CamScanner

$$y = |\overbrace{x^2 - 1}^{g(x)}|$$

x	g(x)	y
0	−1	1
1	0	0
2	3	3
−1	0	0
−2	3	3



O domínio da função será: D(f) = ℝ.
A imagem da função será: Im(f) = ℝ+

2. Resolver as equações:

a) $|x - 3| = 2$; c) $|3x - 4| = x + 3$;
b) $|3x - 1| = |2x + 3|$; d) $|2 + |1 - 3x|| = 3$.

Solução

a) Se $|x - 3| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 2 \Rightarrow x = 5 \\ \text{ou} \\ x - 3 = -2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$ $\boxed{S = \{1; 5\}}$,

b) $|3x - 1| = |2x + 3| \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 2x + 3 \Rightarrow x = 4 \\ \text{ou} \\ 3x - 1 = -(2x + 3) \Rightarrow x = -2/5 \end{cases}$

$\boxed{S = \{-2/5; 4\}}$;

c) $|3x - 4| = x + 3 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4 = x + 3 \Rightarrow x = 7/2 \\ \text{ou} \\ 3x - 4 = -(x + 3) \Rightarrow x = 1/4 \end{cases}$

$\boxed{S = \{1/4; 7/2\}}$;

d) $|2 + |1 - 3x|| = 3$.

1º) $2 + |1 - 3x| = 3 \Rightarrow |1 - 3x| = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 - 3x = -1$ ou $1 - 3x = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 2/3$ ou $x = 0$;

2º) $2 + |1 - 3x| = -3 \Rightarrow |1 - 3x| = -5$ (impossível, o resultado de um módulo não pode ser negativo)

$\boxed{S = \{0; 2/3\}}$

3. O produto dos valores reais de x, que satisfazem a igualdade $|x^2 + 3x - 4| = 6$, é:

a) −12; b) −16; c) −20; d) −24; e) −30.

Solução

$$|x^2 + 3x - 4| = 6 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 6 & \text{(I)} \\ x^2 + 3x - 4 = -6 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo as equações (I) e (II) encontraremos os seguintes resultados: para a equação (I): $x_1 = -5$; $x_2 = 2$. Para a equação (II): $x_3 = -2$; $x_4 = -1$.
Portanto o produto das raízes será:
$(-5) \cdot (2) \cdot (-2) \cdot (-1) = -20$.
Logo a alternativa correta é a **c**.

4. O conjunto solução da equação $|3x^2 - 4| = x^2 - 4$, em ℝ, é igual a:

a) $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$; c) $\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$; e) ∅.
b) {0}; d) ℝ;

Solução

Vamos desmembrar a solução em duas partes:

1º) $|3x^2 - 4| = x^2 - 4 \Rightarrow 3x^2 - 4 = x^2 - 4 \Rightarrow x = 0$;
2º) $|3x^2 - 4| = x^2 - 4 \Rightarrow 3x^2 - 4 = -(x^2 - 4) \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Agora, atenção, verifique que os três valores encontrados tornam negativo o resultado do módulo (Faça a verificação, substitua x por 0, por $-\sqrt{2}$ e por $\sqrt{2}$ e confirme essa afirmação). Nessa verificação você percebe que nenhuma das três soluções satisfazem a equação, logo a alternativa certa é a **e** (conjunto ∅).

SINAL DAS FUNÇÕES DE 1º E 2º GRAUS

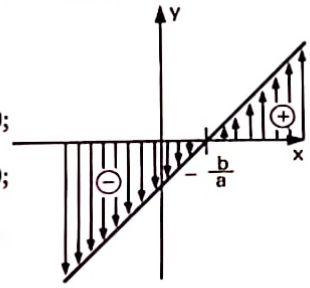
Função y = a . x + b

Para estudar o sinal desta função é necessário determinar para quais valores de $x \in D(f)$, $y > 0$ ou $y < 0$ ou $y = 0$. Temos dois casos a considerar:

1º) $a > 0$; f. crescente.

Neste caso temos:

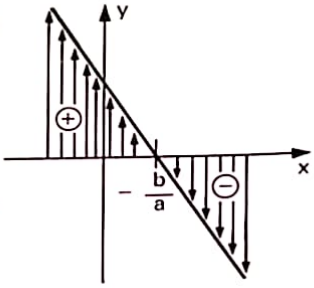
se $x < -\frac{b}{a}$ então $y < 0$;
se $x > -\frac{b}{a}$ então $y > 0$;
se $x = -\frac{b}{a}$ então $y = 0$.



2º) $a < 0$; f. decrescente.

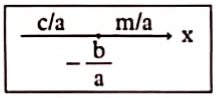
Neste caso temos:

se $x < -\frac{b}{a}$ então $y > 0$
se $x > -\frac{b}{a}$ então $y < 0$;
se $x = -\frac{b}{a}$ então $y = 0$.



OBSERVAÇÃO Lembre-se de que $x = -\frac{b}{a}$ é zero ou raiz da função e que pode ser obtido, substituindo y por zero na função $y = a \cdot x + b$.

Da observação dos gráficos podemos tirar a seguinte regra prática:



onde: c/a indica que o sinal de y é contrário ao sinal de a;
m/a indica que o sinal de y é o mesmo sinal de a.

Scanned by CamScanner

EXERCÍCIOS

1. Fazer o estudo do sinal das seguintes funções:
a) $y = 2 \cdot x - 4$; b) $y = -x + 3$.

Solução

a) Primeiramente vamos encontrar a raiz da função, para isso substituímos o y por zero na função:

$0 = 2 \cdot x - 4 \Rightarrow \boxed{x = 2}$.

Aplicando a regra prática vem: $\overset{c/a}{\ominus}\ \overset{m/a}{\oplus}$ $\underset{2}{\longrightarrow}$ x

Resposta: $\begin{cases} \text{se } x < 2,\ y < 0; \\ \text{se } x > 2,\ y > 0; \\ \text{se } x = 2,\ y = 0. \end{cases}$

b) Analogamente temos para este exercício que a raiz da função é $x = 3$.
Fazendo o esquema obtemos: $\overset{c/a}{\oplus}\ \overset{m/a}{\ominus}$ $\underset{3}{\longrightarrow}$ x

Resposta: $\begin{cases} \text{se } x < 3,\ y > 0; \\ \text{se } x > 3,\ y < 0; \\ \text{se } x = 3,\ y = 0. \end{cases}$

2. Resolver as seguintes inequações:
a) $5x - 7 + 3 + x \leqslant 10x - 2$;

b) $\dfrac{3x + 5}{2} - \dfrac{2x - 9}{3} < 8$;

c) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{2x - 1}{3} > \dfrac{x + 1}{6}$.

Solução

a) Procedemos de maneira análoga à resolução de uma equação do 1º grau, isto é, isolamos os valores de x no primeiro membro e os valores independentes de x no 2º membro: $5x + x - 10x \geqslant -2 + 7 - 3 \Longrightarrow -4x \geqslant 2$, multiplicando ambos os membros da desigualdade por -1, invertemos o sentido da desigualdade (preste atenção nisso).

Voltando para a inequação obtemos:

$-4x \geqslant 2 \overset{\times(-1)}{\Longrightarrow} 4x \leqslant -2 \Rightarrow x \leqslant \dfrac{-2}{4} \Rightarrow \boxed{x \leqslant \dfrac{-1}{2}}$.

Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{-1}{2}\right\}$.

b) Achando o m.m.c. entre 2 e 3, que é 6, obtemos:

$$\frac{3 \cdot (3x + 5)}{\cancel{6}} - \frac{2 \cdot (2x - 9)}{\cancel{6}} < \frac{48}{\cancel{6}}$$

$9x + 15 - 4x + 18 < 48 \Rightarrow 5x < 15 \Rightarrow \boxed{x < 3}$.

Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.

c) O m.m.c. entre 4, 3 e 6 é 12, procedemos agora de modo análogo ao exercício anterior.

$$\frac{3x}{\cancel{12}} - \frac{4(2x - 1)}{\cancel{12}} > \frac{2(x + 1)}{\cancel{12}}$$

$3x - 8x + 4 > 2x + 2 \Longrightarrow 3x - 8x - 2x > 2 + - 4 \Longrightarrow -7x > -2 \overset{\times(-1)}{\Longrightarrow}$

$7x < 2 \Longrightarrow \boxed{x < 2/7}$.

Resposta: $S = \{x < \mathbb{R} \mid x < 2/7\}$.

Função $y = ax^2 + bx + c$

Os sinais desta função ficam determinados a partir dos sinais do coeficiente a e do discriminante Δ. Três casos são possíveis:

1º caso: $\Delta > 0$.

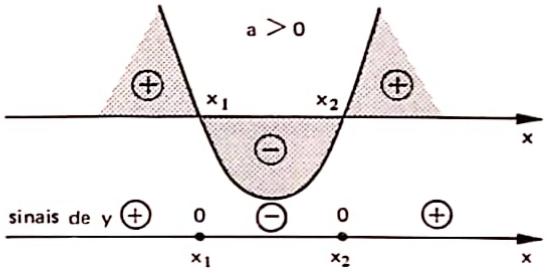
Neste caso, o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ intercepta o eixo dos x em dois pontos distintos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$, onde

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Lembre que se obtém x_1 e x_2 resolvendo a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

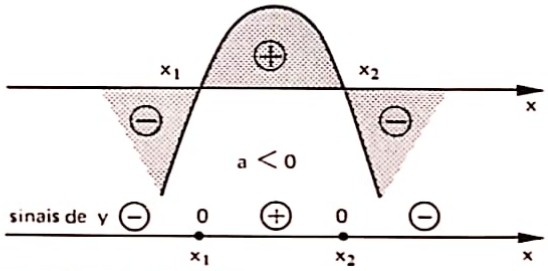
Colocando sempre $x_1 < x_2$, há duas possibilidades para o gráfico e para a distribuição de sinais:

1.a



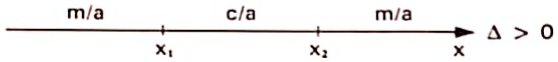
$\begin{cases} y > 0 \Leftrightarrow x < x_1 \text{ ou } x > x_2 \\ y = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \text{ ou } x = x_2 \\ y < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2 \end{cases}$

1.b



$\begin{cases} y > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2 \\ y = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \text{ ou } x = x_2 \\ y < 0 \Leftrightarrow x < x_1 \text{ ou } x > x_2 \end{cases}$

Os casos 1 · a e 1 · b são resumidos assim:



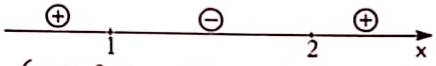
m/a → sinal de y é o mesmo sinal de a.
c/a → sinal de y é contrário ao sinal de a.

Exemplos

1. Para $y = x^2 - 3x + 2$, temos:

$\begin{cases} a = 1 > 0 \quad b = -3 \quad c = 2 \\ \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0 \\ x_1 = \dfrac{3 - 1}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{3 + 1}{2} = 2 \end{cases}$

A variação de sinais de y é: $a > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m/a = \oplus \\ c/a = \ominus \end{cases}$



$\begin{cases} y > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ou } x > 2 \\ y = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2 \\ y < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

2. Para $y = -3x^2 + 2x$, temos:

$$\begin{cases} a = -3 < 0 \quad b = 2 \quad c = 0 \\ \Delta = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 0 = 4 > 0 \\ x_1 = \dfrac{-2+2}{-6} = 0 \\ x_2 = \dfrac{-2-2}{-6} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

A variação de sinais de y é: $a < 0 \Rightarrow \begin{cases} m/a = \ominus \\ c/a = \oplus \end{cases}$

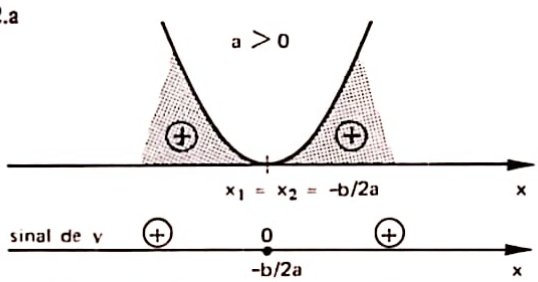
$$\begin{cases} y > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{2}{3} \\ y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \dfrac{2}{3} \\ y < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

2º caso: $\Delta = 0$

Agora, temos $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ e o gráfico intercepta o eixo dos x num único ponto, ou seja, tangencia o eixo dos x.

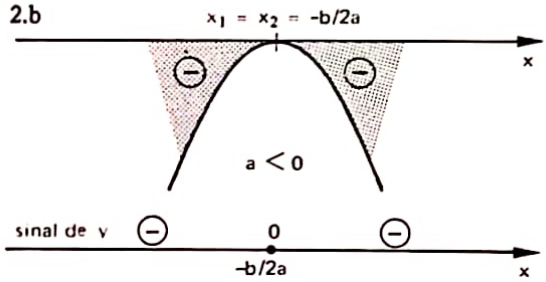
Novamente, dois casos, conforme o sinal de a:

2.a



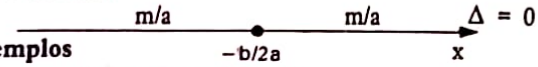
$$\begin{cases} y > 0 \Leftrightarrow x \text{ é qualquer real, } x \neq -b/2a \\ y = 0 \Leftrightarrow x = -b/2a \\ y < 0 \text{ para nenhum } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2.b



$$\begin{cases} y > 0 \text{ para nenhum } x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \Leftrightarrow x = -b/2a \\ y < 0 \Leftrightarrow x \text{ é qualquer real, } x \neq -b/2a \end{cases}$$

Resumindo:



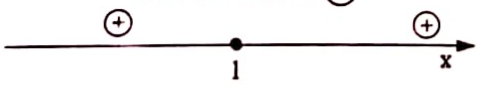
Exemplos

1. Para $y = x^2 - 2x + 1$, temos:

$$\begin{cases} a = 1 > 0, b = -2, c = 1 \\ \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0 \\ x_1 = x_2 = -\dfrac{-2}{2 \cdot 1} = 1 \end{cases}$$

A variação de sinais de y é:

$a > 0 \Rightarrow m/a = \oplus$



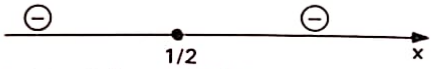
$$\begin{cases} y > 0 \Leftrightarrow x \text{ é qualquer real, } x \neq 1 \\ y = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ y < 0 \text{ para nenhum } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Para $y = -4x^2 + 4x - 1$, temos:

$$\begin{cases} a = -4, b = 4, c = -1 \\ \Delta = 4^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1) = 16 - 16 = 0 \\ x_1 = x_2 = -\dfrac{4}{2 \cdot (-4)} = -\dfrac{4}{-8} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

A variação de sinais de y é:

$a < 0 \Rightarrow m/a = \ominus$



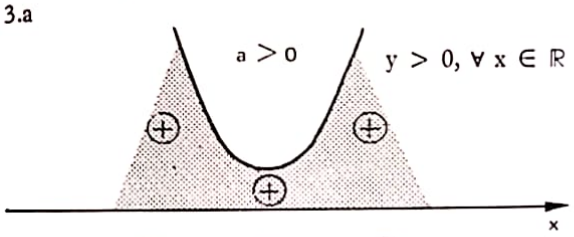
$$\begin{cases} y > 0 \text{ para nenhum } x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \\ y < 0 \Leftrightarrow x \text{ é qualquer real, } x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

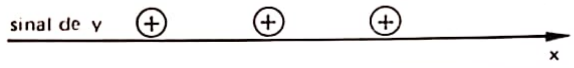
3º caso: $\Delta < 0$

Agora, o gráfico não intercepta o eixo dos x. A função $y = ax^2 + bx + c$, com $\Delta < 0$, não possui raízes reais.

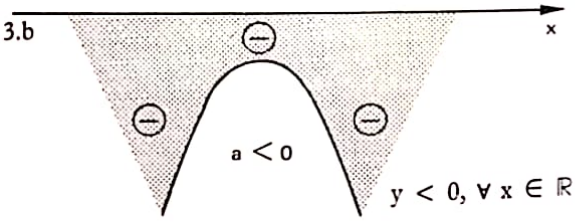
De novo, dois casos:

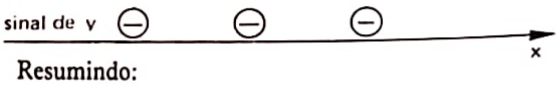
3.a



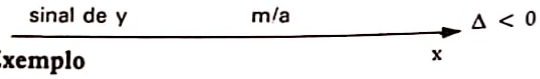


3.b





Resumindo:



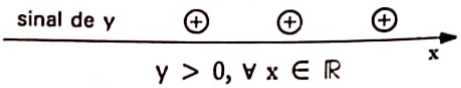
Exemplo

1. Para $y = 3x^2 - 4x + 5$, temos:

$$\begin{cases} a = 3 > 0, b = -4, c = 5 \\ \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 16 - 60 = -44 < 0 \end{cases}$$

Portanto, y não admite raízes reais e seu sinal é o mesmo de a, ou seja, é sempre positivo.

$a > 0 \Rightarrow m/a = \oplus$



$y > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

EXERCÍCIO

Dar a variação de sinais de:

a) $y = x^2 - 4x$;

b) $y = -x^2 + 4x - 3$;

c) $y = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$;

d) $y = -x^2$;

e) $y = 3x^2 + x + 1$.

Scanned by CamScanner

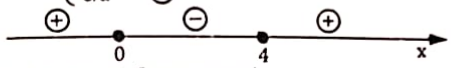
Solução

a) $y = x^2 - 4x$.

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ b = -4 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 16 > 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Há duas raízes: $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$. Então:

$$a > 0 \Rightarrow \begin{cases} m/a = \oplus \\ c/a = \ominus \end{cases}$$



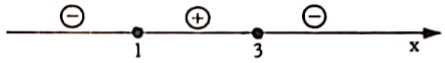
$$\begin{cases} y > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > 4 \\ y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4 \\ y < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4 \end{cases}$$

b) $y = -x^2 + 4x - 3$.

$$\begin{cases} a = -1 < 0 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 16 - 12 = 4 > 0$$

Há duas raízes: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+2}{-2} = \dfrac{-2}{-2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-4-2}{-2} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \end{cases}$

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} m/a = \ominus \\ c/a = \oplus \end{cases}$$



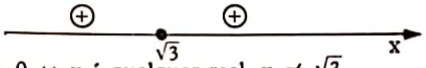
$$\begin{cases} y > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3 \\ y = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3 \\ y < 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

c) $y = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$.

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ b = -2\sqrt{3} \Rightarrow \Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 12 - 12 = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

Há raiz dupla: $x_1 = x_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$a > 0 \Rightarrow m/a = \oplus$



$$\begin{cases} y > 0 \Leftrightarrow x \text{ é qualquer real, } x \neq \sqrt{3} \\ y = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \\ y < 0 \text{ para nenhum } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

d) $y = -x^2$

$$\begin{cases} a = -1 < 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 0$$

Há raiz dupla: $x_1 = x_2 = 0$

$a < 0 \Rightarrow m/a = \ominus$

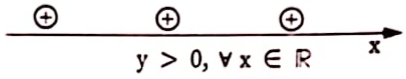
$$\begin{cases} y > 0 \text{ para nenhum } x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ y < 0 \Leftrightarrow x \text{ é qualquer real, } x \neq 0 \end{cases}$$

e) $y = 3x^2 + x + 1$.

$$\begin{cases} a = 3 > 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 1 - 12 = -11 < 0$$

Não há raízes reais.

$a > 0 \Rightarrow m/a = \oplus$



$y > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Inequação do 2º grau: inequações do 2º grau são aquelas redutíveis à forma $ax^2 + bx + c > 0$, onde $a \neq 0$ (ou $\geqslant, <, \leqslant, \neq$).

A variação de sinais da função quadrática é a "ferramenta" indispensável para a resolução destas inequações.

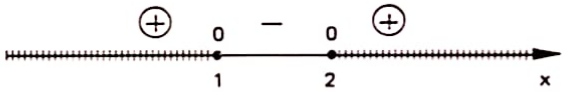
EXERCÍCIOS

1. Resolver a inequação: $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$.

Solução

A função $y = x^2 - 3x + 2$ tem: $a = 1 > 0$, $\Delta = 1 > 0$, raízes $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, e a seguinte variação de sinais:

$$a > 0 \Rightarrow \begin{cases} m/a = \oplus \\ c/a = \ominus \end{cases}$$



Como a inequação proposta é $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$, ou seja, é $y \geqslant 0$, temos o conjunto-solução

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}.$$

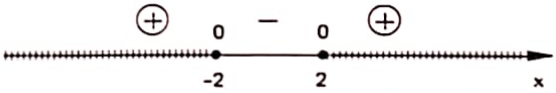
2. Resolver a inequação: $x^2 \geqslant 4$.

Solução

$$x^2 \geqslant 4 \Rightarrow x^2 - 4 \geqslant 0$$

A função $y = x^2 - 4$ tem: $a = 1 > 0$, $\Delta = 16 > 0$, raízes $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ e a seguinte variação de sinais:

$$a > 0 \Rightarrow \begin{cases} m/a = \oplus \\ c/a = \ominus \end{cases}$$



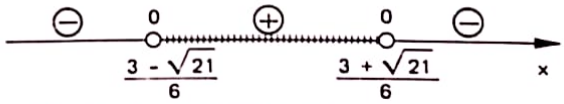
Como queremos $y \geqslant 0$, vem: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2\}$.

3. Resolver a inequação: $-3x^2 + 3x + 1 > 0$.

Solução

A função $y = -3x^2 + 3x + 1$ tem: $a = -3 < 0$, $\Delta = 21 > 0$, raízes $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{21}}{6}$, $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{21}}{6}$ e a seguinte variação de sinais:

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} m/a = \ominus \\ c/a = \oplus \end{cases}$$



Como queremos $y > 0$, vem:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{3 - \sqrt{21}}{6} < x < \frac{3 + \sqrt{21}}{6}\right\}$$

Scanned by CamScanner

Sistemas de inequações: inequações simultâneas são inequações ligadas pela conjunção e, como, por exemplo:

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ \quad e \\ x^2 - 3x + 1 < 0 \end{cases}$$

Para resolvermos o sistema de inequações, efetuamos cada uma delas separadamente encontrando a seguir a intersecção de seus conjuntos soluções (a intersecção é feita para atender à conjunção e, que liga as inequações).

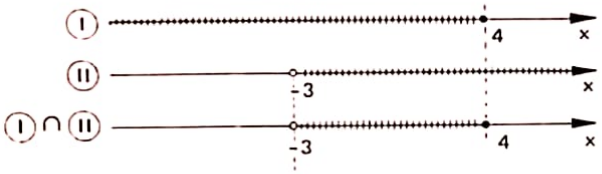
EXERCÍCIOS

1. Resolver o sistema $\begin{cases} 2x - 3 \leqslant x + 1 \\ 3x + 2 > x - 4 \end{cases}$

Solução

$$\begin{cases} \text{I}\ 2x - 3 \leqslant x + 1 \Rightarrow 2x - x \leqslant 1 + 3 \Rightarrow x \leqslant 4 \\ \text{II}\ 3x + 2 > x - 4 \Rightarrow 3x - x > -4 - 2 \Rightarrow 2x > -6 \Rightarrow \\ \Rightarrow x > -3 \end{cases}$$

A intersecção de I e II é:

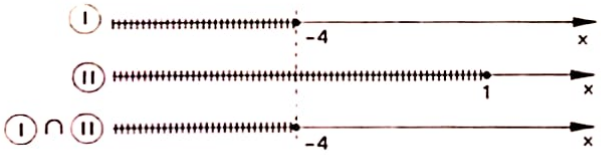


Então: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant 4\}$

2. Resolver o sistema $\begin{cases} 3x - 4 \geqslant 4x \\ 5x + 2 \geqslant 7x \end{cases}$

Solução

$$\begin{cases} 3x - 4 \geqslant 4x \Rightarrow 3x - 4x \geqslant 4 \Rightarrow -x \geqslant 4 \Rightarrow x \leqslant -4\ \text{I} \\ 5x + 2 \geqslant 7x \Rightarrow 5x - 7x \geqslant -2 \Rightarrow -2x \geqslant -2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x \leqslant 1\ \text{II} \end{cases}$$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -4\}$

3. Resolver o sistema $\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases}$

Solução

Resolução de $x^2 - 1 < 0$

$y_1 = x^2 - 1$ tem raízes -1 e 1 e a seguinte variação de sinais:

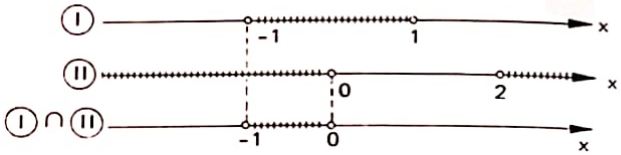
Portanto, $y_1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1$ I

Resolução de $x^2 - 2x > 0$

$y_2 = x^2 - 2x$ tem raízes 0 e 2 e a seguinte variação de sinais:

Portanto, $y_2 > 0 \Rightarrow x < 0$ ou $x > 2$ II

I ∩ II



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$

4. Resolver a dupla desigualdade:

$$3x - 2 \leqslant x + 3 \leqslant 3x - 1$$

Solução

A dupla desigualdade $a \leqslant b \leqslant c$ é equivalente ao sistema de desigualdades $\begin{cases} a \leqslant b \\ e \\ b \leqslant c \end{cases}$ Então, a dupla desigualdade $3x - 2 \leqslant x + 3 \leqslant 3x - 1$ é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2 \leqslant x + 3 & \text{I} \\ x + 3 \leqslant 3x - 1 & \text{II} \end{cases}$$

Agora, temos:

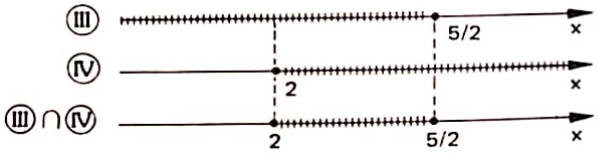
I $3x - 2 \leqslant x + 3 \Rightarrow 3x - x \leqslant 3 + 2 \Rightarrow 2x \leqslant 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x \leqslant \frac{5}{2}}$ III

II $x + 3 \leqslant 3x - 1 \Rightarrow x - 3x \leqslant -1 - 3 \Rightarrow -2x \leqslant -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x \geqslant 4 \Rightarrow \boxed{x \geqslant 2}$ IV

III ∩ IV



Obtemos $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$

Inequação produto: chamam-se inequações produto as inequações redutíveis à forma $f(x) \cdot g(x) > 0$ (ou $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, $\neq$), onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções na variável x.

Há uma técnica toda especial para a resolução deste tipo de inequações. Acompanhe os exercícios seguintes.

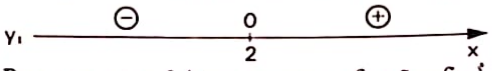
EXERCÍCIOS

1. Resolver a inequação: $(x - 2)(x - 3) > 0$

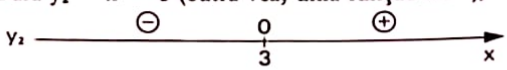
Solução

Inicialmente, estudamos, em separado, a variação de sinais das funções $y_1 = x - 2$ e $y_2 = x - 3$, que compõem o produto $(x - 2)(x - 3)$.

Para $y_1 = x - 2$ (que é uma função afim), temos:

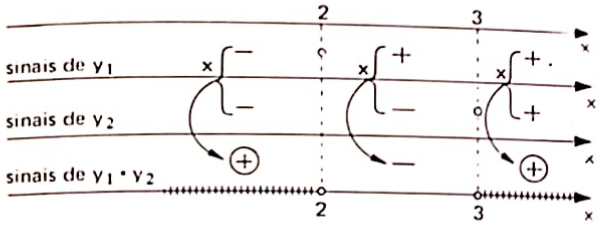


Para $y_2 = x - 3$ (outra vez, uma função afim), temos:



Scanned by CamScanner

Elaboramos, agora, um quadro de sinais como o seguinte:

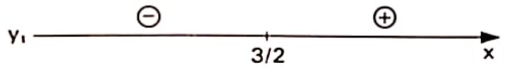


Como queremos $y_1 \cdot y_2 > 0$, os valores de x que nos interessam estão assinalados onde $y_1 \cdot y_2$ tem sinal de ⊕. O conjunto-solução é, então:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$.

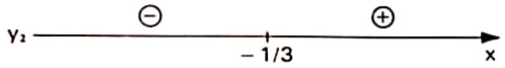
2. Resolver a inequação: $(2x - 3)(3x + 1)(-x + 2) \leqslant 0$

Solução

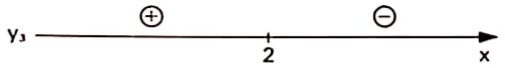
Para $y_1 = 2x - 3$, temos a raiz $\frac{3}{2}$ e a seguinte variação de sinais:



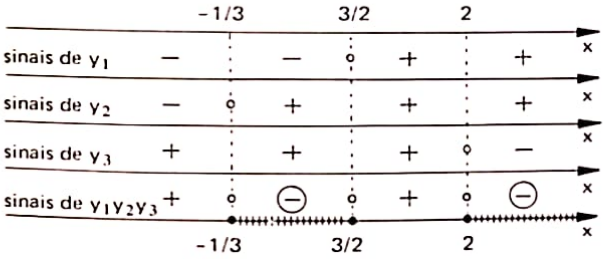
Para $y_2 = 3x + 1$, temos a raiz $-\frac{1}{3}$ e a seguinte distribuição de sinais:



Para $y_3 = -x + 2$, temos a raiz 2 e a seguinte variação de sinais:



Quadro de sinais:



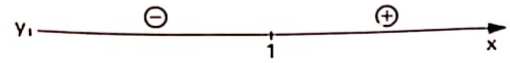
Como queremos $y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \leqslant 0$, segue-se:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \text{ ou } x \geqslant 2\right\}$$

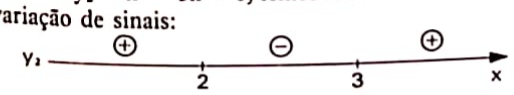
3. Resolver a inequação: $(x - 1)(x^2 - 5x + 6) \leqslant 0$

Solução

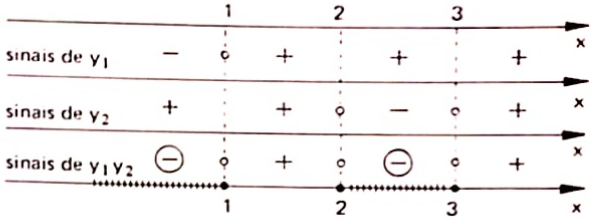
Para $y_1 = x - 1$, temos a raiz 1 e a seguinte variação de sinais:



Para $y_2 = x^2 - 5x + 6$, temos as raízes 2 e 3 e a seguinte variação de sinais:



Quadro de sinais:



Como queremos $y_1 \cdot y_2 \leqslant 0$, obtemos:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

Inequação quociente: chamam-se inequações quociente as inequações redutíveis à forma $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ (ou $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, $\neq$), onde f(x) e g(x) são funções na variável x.

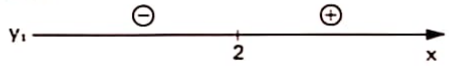
Para a resolução destas inequações, basta lembrar que as regras de sinais para o quociente são as mesmas do produto, ou seja, a resolução é análoga à das inequações produto, observando, apenas, que o denominador de uma fração não pode ser nulo. Repetimos a mesma técnica utilizada nas inequações produto, eliminando do conjunto-solução os valores de x para os quais ocorre g(x) = 0.

EXERCÍCIOS

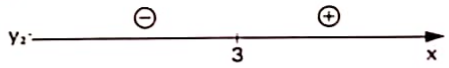
1. Resolver a inequação: $\frac{x - 2}{x - 3} > 0$.

Solução

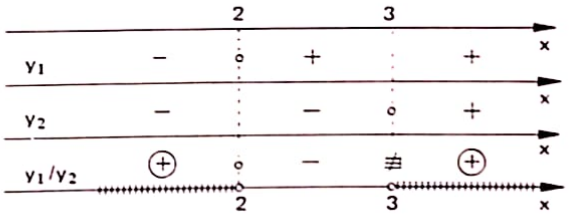
Para $y_1 = x - 2$, temos a raiz 2 e a seguinte variação de sinais:



Para $y_2 = x - 3$ temos a raiz 3 e a seguinte variação de sinais:



Quadro de sinais:



Observe que a fração $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x - 2}{x - 3}$, para x = 2, vale $\frac{2 - 2}{2 - 3} = \frac{0}{-1} = 0$, mas, para x = 3, não está definida, pois o denominador se anula; este último fato é indicado com o símbolo ∄ (não existe) no quadro de sinais.

Como queremos $\frac{y_1}{y_2} > 0$, obtemos:

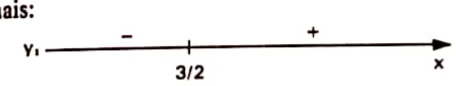
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$.

Scanned by CamScanner

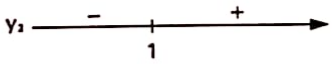
2. Resolver a inequação: $\frac{2x - 3}{x - 1} \leqslant 0$

Solução

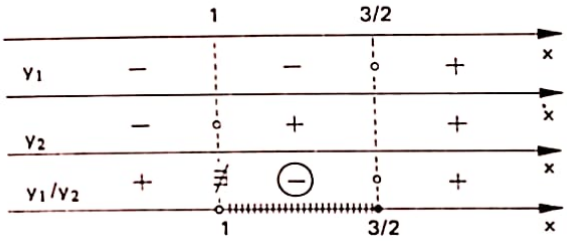
Para $y_1 = 2x - 3$, temos a raiz $\frac{3}{2}$ e a seguinte variação de sinais:



Para $y_2 = x - 1$, temos a raiz 1 e a seguinte variação de sinais:



Quadro de sinais:



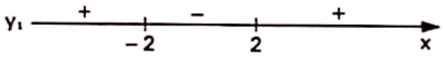
Como queremos $\frac{y_1}{y_2} \leqslant 0$, vem:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$.

3. Resolver a inequação: $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \geqslant 0$

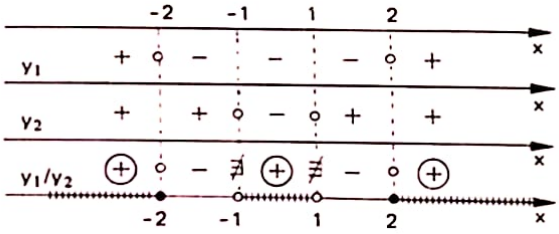
Solução

Para $y_1 = x^2 - 4$, temos as raízes -2 e 2 e a variação de sinais:



Para $y_2 = x^2 - 1$, temos as raízes -1 e 1 e a variação de sinais:

Quadro de sinais:



Como queremos $\frac{y_1}{y_2} \geqslant 0$, obtemos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } -1 < x < 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$.

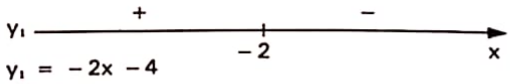
4. Resolver a inequação: $\frac{x - 1}{x + 1} \geqslant 3$

Solução

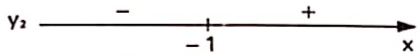
Inicialmente, temos: $\frac{x - 1}{x + 1} \geqslant 3 \Leftrightarrow \frac{x - 1}{x + 1} - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x - 1 - 3x - 3}{x + 1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-2x - 4}{x + 1} \geqslant 0$

Agora, temos:

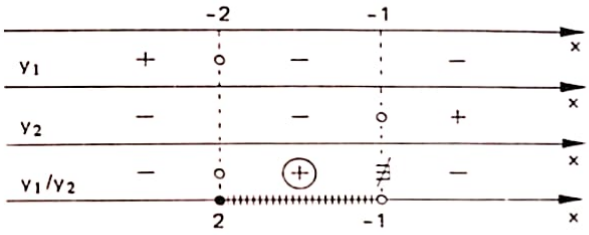


$y_1 = -2x - 4$



$y_2 = x + 1$

Quadro de sinais:



Como queremos $\frac{y_1}{y_2} \geqslant 0$, vem:

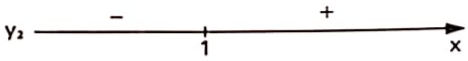
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < -1\}$.

5. Resolver a inequação: $\frac{x^2 - 3x}{(x - 1)(2x + 3)} > 0$

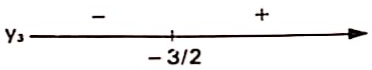
Solução

Para $y_1 = x^2 - 3x$, temos as raízes 0 e 3 e a variação de sinais:

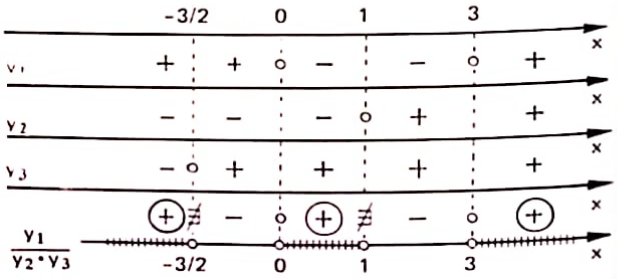
Para $y_2 = x - 1$, temos a raiz 1 e a variação de sinais:



Para $y_3 = 2x + 3$, temos a raiz $-\frac{3}{2}$ e a variação de sinais:



Quadro de sinais:



Observe que, para $x = 1$ e para $x = -\frac{3}{2}$, a fração $\frac{x^2 - 3x}{(x - 1)(2x + 3)}$ não está definida, pois esses valores de x

Scanned by CamScanner

anulam seu denominador. Lembrando que queremos $\frac{y_1}{y_2 \cdot y_3} > 0$, obtemos:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{3}{2} \text{ ou } 0 < x < 1 \text{ ou } x > 3 \right\}$$

6. Dar o domínio das seguintes funções:
a) $f(x) = \sqrt{1 - 3x}$
b) $g(x) = \sqrt{2x + 1} - \sqrt{x - 1}$
c) $h(x) = \sqrt{\frac{2x + 1}{x - 1}}$

Solução
a) Para que a função $f(x) = \sqrt{1 - 3x}$ seja definida, devemos ter $1 - 3x$ (que é o radicando) maior ou igual a zero. Portanto:
$1 - 3x \geqslant 0 \Rightarrow -3x \geqslant -1 \Rightarrow 3x \leqslant 1 \Rightarrow x \leqslant \frac{1}{3}$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{3} \right\}$$

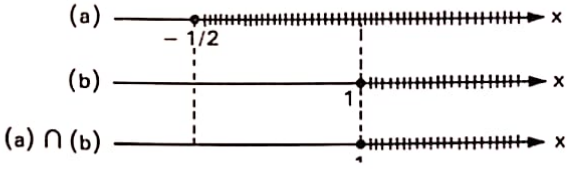
b) Para que a função g(x), seja definida, devemos ter separadamente $2x + 1$ e $x - 1$ (que são os radicandos) maiores ou iguais a zero. Logo:

$$\begin{cases} 2x + 1 \geqslant 0 \ \text{(I)} \\ x - 1 \geqslant 0 \ \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo a inequação (I), obtemos:

$$2x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow 2x \geqslant -1 \Rightarrow x \geqslant -\frac{1}{2} \text{ (a)}$$

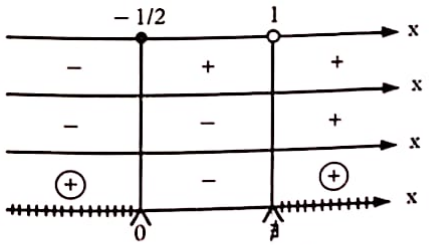
Resolvendo a inequação (II), obtemos:
$x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$ (b)
Fazendo (a) $\cap$ (b), vamos ter:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

c) Na função h(x), devemos ter o quociente $\frac{2x + 1}{x - 1}$ (que é o radicando) maior ou igual a zero, para que a função esteja definida. Portanto, teremos para resolver uma inequação do tipo quociente:

$$\frac{2x + 1}{x - 1} \geqslant 0$$

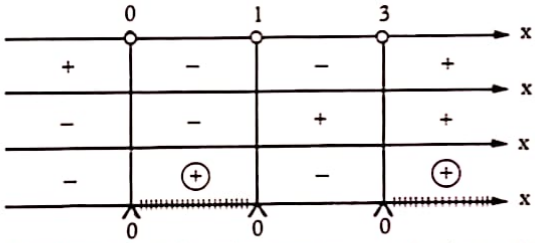


$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 1 \right\}$$

7. Dada a função $y = (x^2 - 3x) \cdot (x - 1)$, determinar:
a) Os pontos de intersecção do gráfico da função com os eixos coordenados.
b) O conjunto dos valores de *x* para os quais a função é positiva.

Solução
a) Para determinar a intersecção com o eixo y, substituímos na função o *x* por zero:
$y = (x^2 - 3x) \cdot (x - 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow y = (0^2 - 3 \cdot 0) \cdot (0 - 1) = 0$
A intersecção com o eixo *y* ocorre no ponto (0; 0).
Para determinar a intersecção com o eixo *x*, substituímos na função o *y* por zero:
$(x^2 - 3x) \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$
ou
$\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
As intersecções com o eixo x, ocorrem nos pontos (0; 0), (1; 0) e (3; 0).

b) Para encontrar os valores de x que tornam a função positiva devemos fazer o estudo da variação de sinal da função, utilizando o mesmo processo usado na resolução das inequações produto:



O conjunto dos valores de x que tornam a função positiva é $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 3\}$.

8. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:
$f(x) = x^2 - 4x + c$.
Determine o menor valor inteiro do parâmetro *c* de modo que a função f assuma valores positivos para todo *x* real.

Solução
A função f do enunciado é uma função de 2º grau com concavidade "voltada para cima" pois o coeficiente do x^2 é positivo. Portanto, concluímos que f possui um valor mínimo que se calcula por $\frac{-\Delta}{4a}$.

Como a função f deve assumir somente valores positivos, inclusive seu valor mínimo deve ser positivo, isto é: $\frac{-\Delta}{4a} > 0 \Rightarrow \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} > 0 \Rightarrow \frac{-(16 - 4 \cdot 1 \cdot c)}{4 \cdot 1} > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{-16 + 4c}{4} > 0 \Rightarrow -16 + 4c > 0 \Rightarrow 4c > 16 \Rightarrow$$

$$\boxed{c > 4}$$

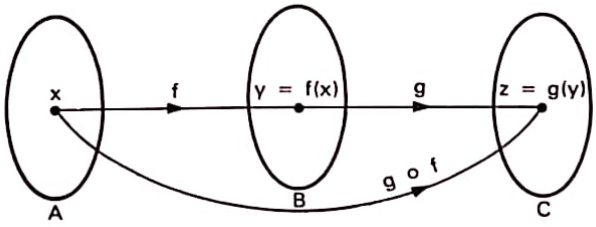
Portanto, o menor valor inteiro do parâmetro *c* é 5.

$$\boxed{c = 5}$$

Scanned by CamScanner

FUNÇÃO COMPOSTA

Observe o diagrama seguinte:



Temos uma função f que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$ e uma função g que associa a cada elemento $y \in B$ um único elemento $z = g(y) \in C$.

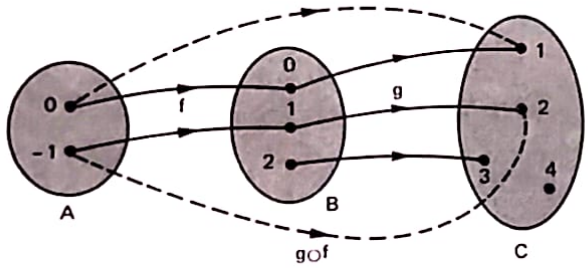
Se lembrarmos, porém, que $y = f(x)$, veremos que o elemento $z = g(y) \in C$ é, na verdade, igual a $g(f(x))$. É natural, então, que pensemos numa nova função h, de A em C, que associe o elemento $x \in A$ diretamente com o elemento $z = g(f(x)) \in C$, ou seja, que faça de uma só vez o que a f e a g fazem em duas operações. Essa nova função, que é indicada por $g \circ f$ (leia: g "bola" f), é chamada de função composta de g e f.

Veja bem: a função $g \circ f$, quando aplicada no elemento $x \in A$ nos dá como imagem o elemento $g(f(x)) \in C$, ou seja:

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

Outra observação importante é a ordem segundo a qual se aplicam as funções: quando escrevemos $g(f(x))$, primeiro aplicamos a função f ao elemento x, obtendo $f(x)$, e depois aplicamos g a $f(x)$, obtendo $g(f(x))$. Acompanhe atentamente os exemplos "concretos" a seguir:

1. Sejam os conjuntos $A = \{0, -1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ e as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$ definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$.



A partir das funções f e g construímos a função composta $g \circ f$, de A em C, substituindo duas flechas consecutivas por uma só no diagrama anterior. Por exemplo: -1 é levado em 1 pela f e 1 é levado em 2 pela g; então, -1 é levado diretamente em 2 pela função $g \circ f$.

Obtemos $g(f(x))$ substituindo x por $f(x)$ na expressão $g(x) = x + 1$, isto é: $g(\underbrace{f(x)}_{f(x) \text{ no lugar de } x}) = f(x) + 1$, e, como $f(x) = x^2$, vem, por substituição: $g(f(x)) = x^2 + 1$.

2. Sendo $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $g(x) = 3x - 1$ e $f(x) = x^2 + 5$, temos:

$$g(x) = 3x - 1 \Rightarrow \underbrace{g(f(x))}_{f(x) \text{ no lugar de } x} = 3 \cdot \overbrace{f(x)}^{f(x) = x^2 + 5} - 1 = 3 \cdot (x^2 + 5) - 1 =$$

$$= 3x^2 + 15 - 1 = 3x^2 + 14 \Rightarrow \boxed{g(f(x)) = 3x^2 + 14}$$

$$f(x) = x^2 + 5 \Rightarrow \underbrace{f(g(x))}_{g(x) \text{ no lugar de } x} = \overbrace{[g(x)]^2}^{g(x) = 3x - 1} + 5 = (3x - 1)^2 +$$

$$+ 5 = 9x^2 - 6x + 1 + 5 = 9x^2 - 6x + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f(g(x)) = 9x^2 - 6x + 6}$$

EXERCÍCIOS

1. Dadas as funções $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = x^2 + 2$, calcular:

a) $f(g(0))$, $g(f(0))$, $f(g(1))$ e $g(f(1))$;

b) $(f \circ g)(-1)$, $(g \circ f)(-1)$, $(f \circ g)(2)$ e $(g \circ f)(2)$;

c) $f(g(x))$ e $g(f(x))$.

Solução

Com $\boxed{f(x) = 2x - 1}$ (I) e $\boxed{g(x) = x^2 + 2}$ (II), temos:

a)
$$\begin{cases} g(0) = 0^2 + 2 = 2 \Rightarrow f(g(0)) = f(2) = \\ \quad = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 \\ f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow g(f(0)) = \\ \quad = g(-1) = (-1)^2 + 2 = 1 + 2 = 3 \\ g(1) = 1^2 + 2 = 3 \Rightarrow f(g(1)) = f(3) = \\ \quad = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5 \\ f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \Rightarrow g(f(1)) = g(1) = \\ \quad = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} g(-1) = (-1)^2 + 2 = 3 \Rightarrow (f \circ g)(-1) = \\ \quad = f(g(-1)) = f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \\ f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = \\ \quad = -3 \Rightarrow (g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = \\ \quad = g(-3) = (-3)^2 + 2 = 11 \\ g(2) = 2^2 + 2 = 6 \Rightarrow (f \circ g)(2) = \\ \quad = f(g(2)) = f(6) = 2 \cdot 6 - 1 = 11 \\ f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \Rightarrow (g \circ f)(2) = \\ \quad = g(f(2)) = g(3) = 3^2 + 2 = 11 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} f(g(x)) \overset{\text{I}}{=} 2 \cdot [g(x)] - 1 \overset{\text{II}}{=} 2 \cdot (x^2 + 2) - 1 = \\ \quad = 2x^2 + 4 - 1 = 2x^2 + 3 \\ g(f(x)) \overset{\text{II}}{=} [f(x)]^2 + 2 \overset{\text{I}}{=} (2x - 1)^2 + 2 = \\ \quad = 4x^2 - 4x + 1 + 2 = 4x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

2. Sendo $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x + 1$, determinar os valores de x para os quais ocorre $f(g(x)) = g(f(x))$.

Solução

Temos: $\begin{cases} f(g(x)) = [g(x)]^2 - 1 = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x \\ g(f(x)) = f(x) + 1 = x^2 - 1 + 1 = x^2 \end{cases}$

Portanto, ocorre $f(g(x)) = g(f(x)) \Leftrightarrow x^2 + 2x = x^2 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Scanned by CamScanner

TRIGONOMETRIA

As origens da trigonometria, assim como as da geometria, remontam à Antiguidade; as primeiras tabelas trigonométricas são da época da Babilônia antiga (1900 a 1600 aC).

A trigonometria surgiu da necessidade de se relacionar o "tamanho" dos lados com o "tamanho" dos ângulos de um triângulo e seu desenvolvimento ao longo da história da humanidade foi tal que hoje ela representa um capítulo à parte dentro da Matemática. Atualmente a trigonometria é utilizada para resolver problemas de medição de terras (agrimensura), de astronomia e de muitos campos da física e da engenharia. Ela é utilizada, por exemplo, para entender fenômenos ligados à acústica (estudo do som) e à óptica (estudo da luz); ao nosso redor, na parafernália de luz e som que nos envolve, está sempre presente a aplicação direta da trigonometria.

Nesta obra, faremos o estudo da trigonometria seguindo, aproximadamente, seu desenvolvimento histórico: definimos inicialmente as razões trigonométricas usando os triângulos retângulos e, posteriormente, generalizamos estes conceitos para os arcos trigonométricos.

MEDIDAS DE ARCOS E ÂNGULOS

Neste capítulo inicial estudaremos o grau e o radiano, que são as unidades de medida de arcos e de ângulos normalmente utilizadas na trigonometria.

Unidades de medida de arco e ângulo

Grau: na geometria trabalhamos com a unidade grau para medir ângulos; na trigonometria também usamos a unidade grau, agora para medir arcos. A utilização da unidade grau para a medida de arcos passa a ser possível a partir da seguinte associação:

o arco de uma circunferência completa mede 360°.

Disto concluímos que: $1° = \frac{1}{360}$ da circunferência

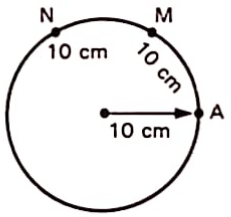
As subdivisões do grau são:

$$\begin{cases} 1' = \frac{1°}{60} \ (1' = 1 \text{ minuto}) \\ 1'' = \frac{1'}{60} \ (1'' = 1 \text{ segundo}) \Rightarrow 1'' = \frac{1°}{3600} \end{cases}$$

Radiano: é um arco de circunferência cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém; abrevia-se rad.

Exemplos

1. Numa circunferência de raio 10 cm, um arco de 10 cm de comprimento mede 1 rad; um arco de 20 cm mede 2 rad:

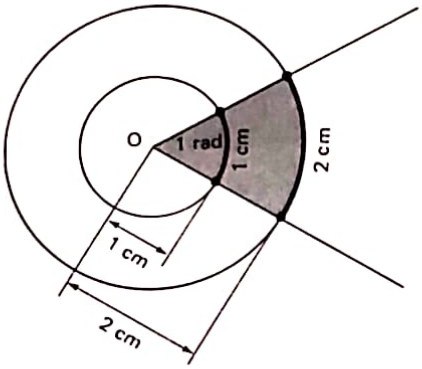


$\widehat{AM} = 10 \text{ cm} = \text{raio} \Rightarrow$
$\Rightarrow \widehat{AM} = 1 \text{ rad}$
$\widehat{MN} = 10 \text{ cm} = \text{raio} \Rightarrow$
$\Rightarrow \widehat{NM} = 1 \text{ rad}$
$\widehat{AN} = 20 \text{ cm} = 2 \times \text{raio} \Rightarrow$
$\Rightarrow \widehat{AN} = 2 \text{ rad}$

2. Numa circunferência de raio 4 cm, um arco de 2,5 rad tem comprimento de 2,5 × 4 cm = 10 cm, pois cada radiano, neste exemplo, mede 4 cm.

3. Numa circunferência de raio igual a 1 cm, o arco de 1 radiano tem comprimento também de 1 cm; se a circunferência tem raio de 2 cm, o arco de 1 radiano nessa circunferência tem comprimento de 2 cm; numa circunferência de raio 3 cm, o arco de 1 rad tem comprimento 3 cm; e assim por diante. Repare, porém, que o ângulo central determinado por esses arcos tem sempre a mesma abertura (veja a figura na página seguinte). A medida do ângulo central é sempre igual à medida do arco compreendido entre seus lados e, por isto, a medida do ângulo central da próxima figura é 1 rad.

Scanned by CamScanner



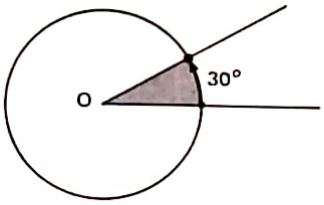
Vamos agora determinar quanto mede, em radianos, o arco de uma circunferência completa. Como o comprimento de uma circunferência de raio R é sempre $2.\pi.R$, concluímos que o arco de uma circunferência completa tem medida igual a 2π rad, pois o comprimento do raio é o comprimento do radiano.

Com esta conclusão, podemos estabelecer a correspondência entre a unidade radiano e a unidade grau:

$\boxed{2\,\pi \text{ rad} = 360°}$ ou $\boxed{\pi \text{ rad} = 180°}$

A igualdade acima permite-nos converter medidas de um sistema para outro, através de uma regra de três simples. Acompanhe os exemplos:

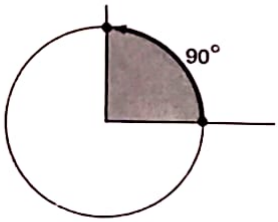
1. Converter 30° a radianos.



graus		radianos
180	———	π
30	———	$x = \frac{\cancel{30}^{1} \cdot \pi}{\cancel{180}_{6}} = \frac{\pi}{6}$ rad

Portanto: $30° = \frac{\pi}{6}$ rad.

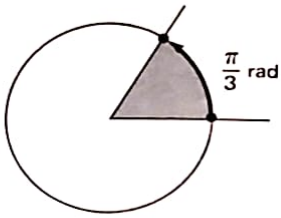
2. Converter 90° a radianos.



graus		radianos
180	———	π
90	———	$x = \frac{\cancel{90}^{1} \cdot \pi}{\cancel{180}_{2}} = \frac{\pi}{2}$ rad

Portanto: $90° = \frac{\pi}{2}$ rad.

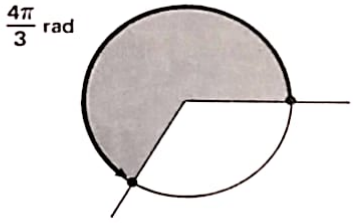
3. Converter $\frac{\pi}{3}$ rad a graus.



radianos		graus
π	———	180
$\frac{\pi}{3}$	———	$x = \frac{\frac{\pi}{3} \cdot 180}{\pi} = 60°$

Portanto: $\frac{\pi}{3}$ rad = 60°.

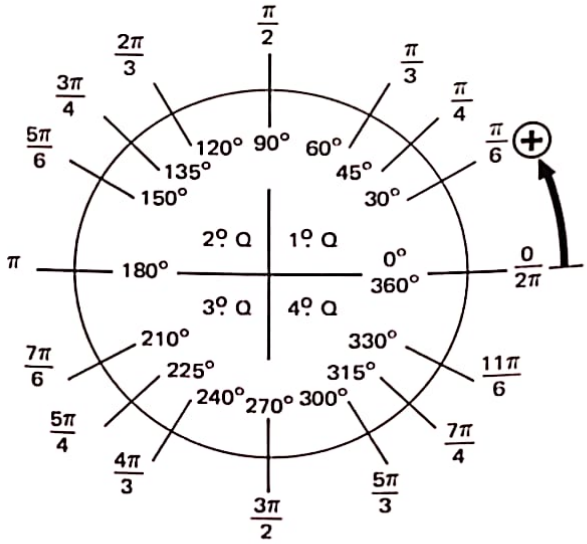
4. Converter $\frac{4\pi}{3}$ rad a graus.



radianos		graus
π	———	180
$\frac{4\pi}{3}$	———	$x = \frac{\frac{4\pi}{3} \cdot 180}{\pi} = 240°$

Portanto: $\frac{4\pi}{3}$ rad = 240°.

Repare bem na figura seguinte, pois nela você encontra os arcos mais freqüentes nos cálculos da trigonometria, expressos em graus e em radianos:



Scanned by CamScanner

EXERCÍCIOS

1. Escrever em graus os arcos de:

a) $\frac{\pi}{5}$ rad; b) $\frac{11\pi}{6}$ rad; c) $\frac{\pi}{18}$ rad; d) $\frac{\pi}{4}$ rad.

Solução

a) $\frac{\pi}{5}$ rad $= \frac{1}{5} \cdot (\pi \text{ rad}) = \frac{1}{5} \cdot 180° = 36°$;

b) $\frac{11\pi}{6}$ rad $= \frac{11}{6} \cdot (\pi \text{ rad}) = \frac{11}{6} \cdot 180° = 330°$;

c) $\frac{\pi}{18}$ rad $= \frac{1}{18} \cdot (\pi \text{ rad}) = \frac{1}{18} \cdot 180° = 10°$;

d) $\frac{\pi}{4}$ rad $= \frac{1}{4} \cdot (\pi \text{ rad}) = \frac{1}{4} \cdot 180° = 45°$;

2. Escrever em radianos os arcos de:

a) 15°; b) 22°30′; c) 10°; d) 135°.

Solução

a) graus — radianos

180° ——— π

15° ——— $x = \frac{15 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{12}$ rad

b) Para evitar contas, já vimos que $45° = \frac{\pi}{4}$ rad e, como $22°30' = \frac{45°}{2}$, obtemos $22°30' = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}$ rad

c) graus — radianos

180° ——— π

10° ——— $x = \frac{10 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{18}$ rad

d) graus — radianos

180° ——— π

135° ——— $x = \frac{135 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$ rad

3. Numa circunferência de raio 6 cm, qual o comprimento de um arco de medida 150°?

Solução

Inicialmente, calculamos o comprimento da circunferência pela fórmula $C = 2.\pi.R$; como $R = 6$ cm, temos que $C = 2.\pi.6$ cm $\Rightarrow$ $\boxed{C = 12\pi \text{ cm}}$

Concluímos agora que 12π cm representa 360°, que é a medida em graus da circunferência. Com isto, construímos a seguinte "regra de três":

medida em graus		comprimento
360	⟶	12π cm
150	⟶	x

Resolvendo, temos:

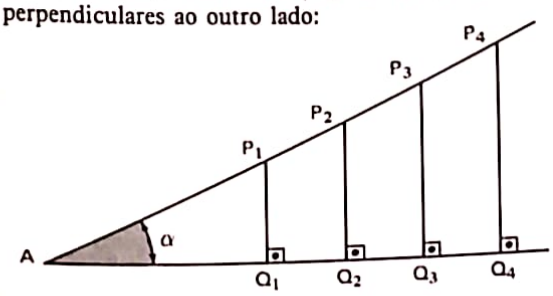
$$360.x = 150 \times 12\pi$$
$$360.x = 1800\pi$$
$$x = \frac{1800\pi}{360} = 5\pi \text{ cm}$$

TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO

Neste capítulo definiremos as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) de um ângulo agudo a partir de um triângulo retângulo e, a seguir, ampliaremos nosso estudo para os triângulos em geral.

Razões trigonométricas de um ângulo agudo

Dado um ângulo agudo de medida α, tomemos alguns pontos de um de seus lados ($P_1, P_2, P_3, P_4, ...$) e tracemos perpendiculares ao outro lado:



Obtemos assim uma série de triângulos semelhantes entre si. Devido a essa semelhança, podemos afirmar que os lados correspondentes destes triângulos são proporcionais; por isto, temos:

a) $\frac{P_1Q_1}{AP_1} = \frac{P_2Q_2}{AP_2} = \frac{P_3Q_3}{AP_3} = ... = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa correspondente}}$

b) $\frac{AQ_1}{AP_1} = \frac{AQ_2}{AP_2} = \frac{AQ_3}{AP_3} = ... = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa correspondente}}$

c) $\frac{P_1Q_1}{AQ_1} = \frac{P_2Q_2}{AQ_2} = \frac{P_3Q_3}{AQ_3} = ... = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}$

O quociente $\frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa correspondente}}$, obtido no item a, será chamado de seno do ângulo α e indicado por sen α. Temos, então:

$$\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}}$$

O quociente $\frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa correspondente}}$, obtido no

Scanned by CamScanner

item b, será chamado de cosseno do ângulo α e indicado por cos α. Temos, então:

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}}$$

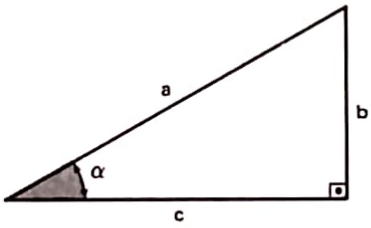
O quociente $\frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}$, obtido no item c, será chamado de tangente do ângulo α e indicado por tg α. Temos, então:

$$\boxed{\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}}$$

ATENÇÃO os números sen α, cos α e tg α não dependem do particular triângulo retângulo escolhido na figura inicial. Esses números são uma característica do ângulo α e independem do triângulo escolhido.

Triângulo retângulo

Consideremos então um triângulo retângulo; seja $\hat{a}$ um dos seus ângulos agudos e sejam a, b e c as medidas da hipotenusa e dos dois catetos, respectivamente:



Neste triângulo, temos: a: hipotenusa;
b: cateto oposto a $\hat{a}$;
c: cateto adjacente a $\hat{a}$.

Utilizando todos estes elementos, podemos escrever:

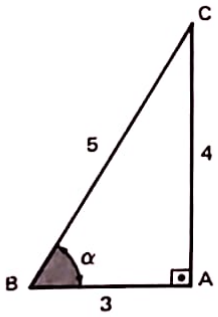
$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

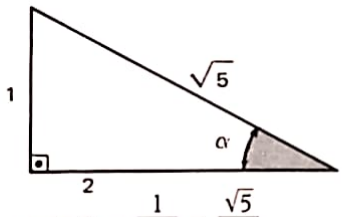
Exemplos

1. Consideremos o triângulo retângulo seguinte:



Temos:
$$\begin{cases} \text{sen } \alpha = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{4}{5} \\ \cos \alpha = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{5} \\ \text{tg } \alpha = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

2. Consideremos este outro:

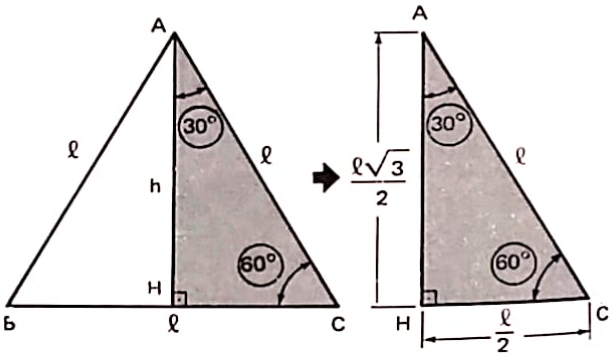


Agora, temos:
$$\begin{cases} \text{sen } \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos \alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ \text{tg } \alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Valores notáveis

Neste item vamos calcular o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°. Isto será feito escolhendo-se triângulos particulares para cada caso.

Ângulo de 30° e de 60°: partindo de um triângulo equilátero ABC de lado ℓ e traçando sua altura $\overline{AH}$, construímos o triângulo retângulo AHC, onde $C\hat{A}H = 30°$ e $H\hat{C}A = 60°$.



Já sabemos que $AH = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, pois $\overline{AH}$ é altura do triângulo equilátero, e que $HC = \frac{\ell}{2}$.

Analisando o triângulo AHC, temos:

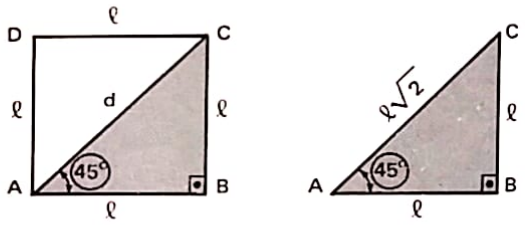
$$\begin{cases} \text{sen } 30° = \dfrac{HC}{AC} = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \dfrac{1}{2} \\ \cos 30° = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{tg } 30° = \dfrac{HC}{AH} = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

No mesmo triângulo AHC, ainda temos:

$$\begin{cases} \text{sen } 60° = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60° = \dfrac{HC}{AC} = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \dfrac{1}{2} \\ \text{tg } 60° = \dfrac{AH}{HC} = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Ângulo de 45°: partindo de um quadrado ABCD, de lado ℓ, e traçando sua diagonal $\overline{AC}$, obtemos o triângulo retângulo ABC, de ângulos agudos iguais a 45°, e cuja hipotenusa $\overline{AC}$ mede $\ell\sqrt{2}$ (pois $\overline{AC}$ é diagonal de um quadrado de lado ℓ).



No triângulo ABC, temos:

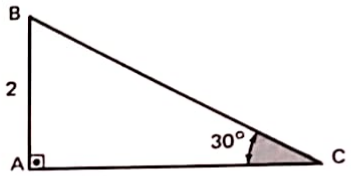
$$\begin{cases} \text{sen } 45° = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{tg } 45° = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\ell}{\ell} = 1 \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO Estes valores trigonométricos agora calculados têm grande utilização nos exercícios de trigonometria e, por isso, convém sabê-los de cor; então, vamos reapresentá-los na seguinte tabela:

	30° $\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$	45° $\left(\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right)$	60° $\left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS

1. Determinar a hipotenusa BC e o cateto AC no triângulo retângulo seguinte:



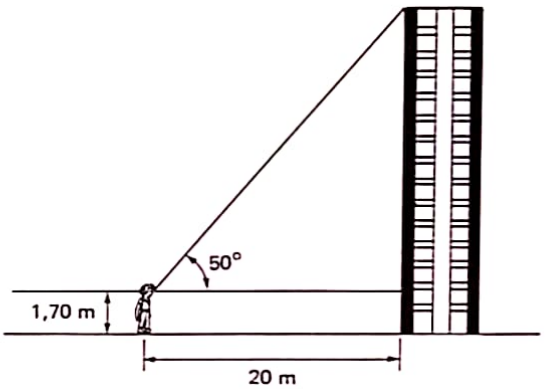
Solução

$$\text{sen } 30° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{BC} \Rightarrow BC = 4$$

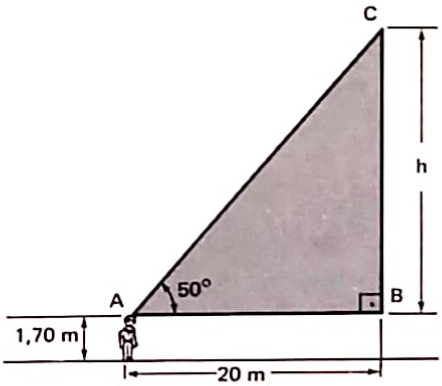
$$\text{tg } 30° = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{AC} \Rightarrow AC = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Você poderia usar também o teorema de Pitágoras, para obter AC, depois de obter BC trigonometricamente; isso fica a seu critério.

2. Um observador de 1,70 m de altura avista o topo de um edifício sob ângulo de 50° com a horizontal. Se a distância do observador ao edifício é 20 m, calcule a altura do edifício. Dado: tg 50° = 1,192.



Solução



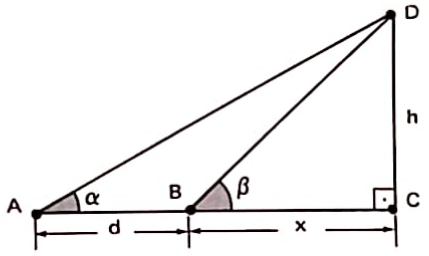
No triângulo retângulo ABC, temos tg 50° = $\frac{BC}{AB}$, ou seja, $1{,}192 = \frac{BC}{20} \Rightarrow BC = 1{,}192 \times 20 = 23{,}84$ m.

Portanto, a altura do edifício é h = BC + 1,70 = 23,84 + 1,70 = 25,54 m.

$$\boxed{h = 25{,}54 \text{ m}}$$

Scanned by CamScanner

3. Calcule a altura h da figura. Dados: tg α = 0,5; tg β = 1,5 e d = 40 m.



Solução

No triângulo retângulo BCD: $\text{tg}\,\beta = \frac{h}{x} \Rightarrow 1{,}5 = \frac{h}{x} \Rightarrow$

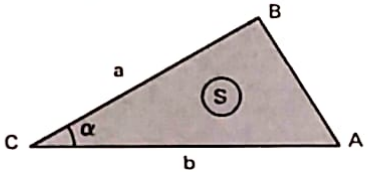
$\Rightarrow \boxed{h = 1{,}5x}$.

No triângulo ACD: $\text{tg}\,\alpha = \frac{h}{d + x} \Rightarrow \frac{1}{2} =$

$= \frac{1{,}5\,x}{40 + x} \Rightarrow 40 + x = 3x \Rightarrow 2x = 40 \Rightarrow x = 20$ m.

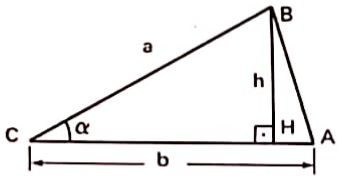
Como $h = 1{,}5\,x \Rightarrow h = 1{,}5 \times 20$ m $\Rightarrow \boxed{h = 30 \text{ m}}$.

4. Determine a área S do triângulo seguinte, em função dos lados a e b e do ângulo $\hat{\alpha}$ formado entre eles.



Solução

No triângulo ABC dado, construímos a altura BH = h relativa ao lado $\overline{AC}$:



Temos: $S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$ (I)

Agora, no triângulo CHB, retângulo em H, temos:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{HB}{BC} = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \text{sen}\,\alpha$ (II)

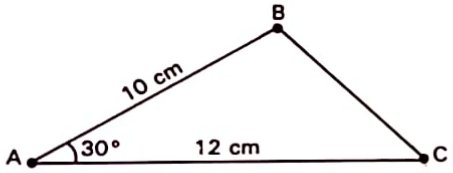
Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$\boxed{S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}}$$

5. Num triângulo ABC, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem, respectivamente, 10 cm e 12 cm. Determine a área desse triângulo sabendo que o ângulo $\hat{A}$ mede 30°.

Solução

Construímos um triângulo com os dados do problema:



Para calcular a área S do triângulo, usamos a fórmula do exercício anterior:

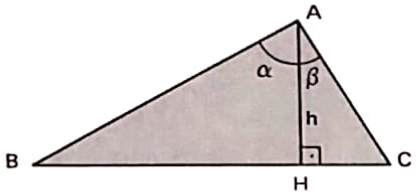
$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\alpha}{2} \Rightarrow S = \frac{10 \cdot 12 \cdot \text{sen}\,30°}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = 60 \cdot \text{sen}\,30°$.

Como sen 30° = 1/2, temos: $S = 60 \times 1/2 \Rightarrow$

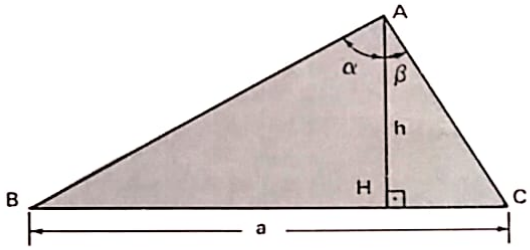
$\Rightarrow \boxed{S = 30 \text{ cm}^2}$.

6. Calcule a área S do triângulo seguinte, em função de h e dos ângulos $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$.



Solução

Fazemos BC = a:



Inicialmente, temos: $S = \frac{a \cdot h}{2}$ (I); falta-nos obter BC = a. Para isso, observe que:

No Δ AHB: $\text{tg}\,\alpha = \frac{BH}{AH} \Rightarrow BH = AH \cdot \text{tg}\,\alpha = h \cdot \text{tg}\,\alpha$

No Δ AHC: $\text{tg}\,\beta = \frac{HC}{AH} \Rightarrow HC = AH \cdot \text{tg}\,\beta = h \cdot \text{tg}\,\beta$

Agora:

$a = BC = BH + HC = h \cdot \text{tg}\,\alpha + h \cdot \text{tg}\,\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow a = h\,(\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta)$ (II)

Substituindo (II) em (I), temos finalmente:

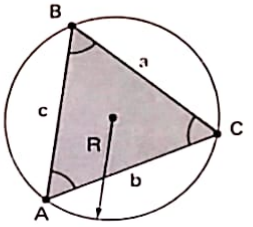
$$\boxed{S = \frac{h^2\,(\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta)}{2}}$$

Triângulos quaisquer

Estudaremos agora a lei dos senos e a lei dos cossenos; essas duas leis podem ser aplicadas em qualquer triângulo, inclusive em triângulos retângulos. Na verdade, o que ocorre é que para os triângulos retângulos normalmente usam-se as particulares definições de seno e de cosseno vistas anteriormente e não essas duas leis que vêm a seguir.

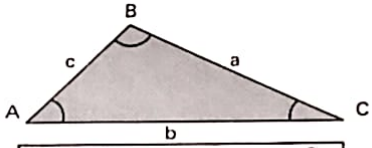
> Lei dos senos: em todo triângulo, a medida de cada lado é proporcional ao seno do ângulo oposto a esse lado; a razão da proporção é igual ao dobro do raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

Scanned by CamScanner



$$\Rightarrow \boxed{\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2 \cdot R}$$

Lei dos cossenos: em todo triângulo, o quadrado da medida de qualquer lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos o dobro do produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot ac \cdot \cos \hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos \hat{C} \end{aligned}}$$

Para a resolução de exercícios, baseie-se nas seguintes regras, válidas em geral:

- se são conhecidos dois lados e um ângulo do triângulo, usamos a lei dos cossenos.
- se são conhecidos dois ângulos e um lado do triângulo, usamos a lei dos senos.

ATENÇÃO Como agora estamos trabalhando com triângulos quaisquer, pode acontecer que um dos ângulos do triângulo seja obtuso (ângulo de medida entre 90° e 180°); por isto, agora, faz-se necessário saber o que é seno e cosseno de um ângulo obtuso.

Faremos então duas definições que serão justificadas posteriormente ao longo deste curso.

1ª definição:

O seno de um ângulo obtuso α é igual ao seno do seu suplemento $(180° - \alpha)$.

Simbolicamente, temos: $\boxed{\text{sen } \alpha = \text{sen } (180° - \alpha)}$.

Exemplos

1. $\text{sen } 120° = \text{sen } (180° - 120°) = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\text{sen } 135° = \text{sen } (180° - 135°) = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\text{sen } 150° = \text{sen } (180° - 150°) = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

2ª definição:

O cosseno de um ângulo obtuso α é igual ao oposto do cosseno do seu suplemento $(180° - \alpha)$.

Simbolicamente, temos: $\boxed{\cos \alpha = - \cos (180° - \alpha)}$.

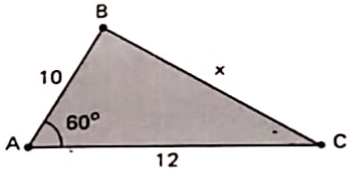
Exemplos

1. $\cos 120° = - \cos (180° - 120°) = - \cos 60° = - \frac{1}{2}$
2. $\cos 135° = - \cos (180° - 135°) = - \cos 45° = - \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos 150° = - \cos (180° - 150°) = - \cos 30° = - \frac{\sqrt{3}}{2}$

EXERCÍCIOS

1. Num triângulo ABC, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem 10 cm e 12 cm, respectivamente, e o ângulo formado por eles mede 60°. Calcule o lado $\overline{BC}$.

Solução

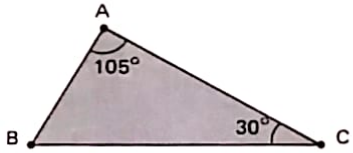


Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos 60° = 100 + 144 + 240 - (0,5)$

$x^2 = 124 \Rightarrow x = \sqrt{124} \Rightarrow \boxed{x = 2\sqrt{31} \text{ cm}}$.

2. (FEI-SP) Calcule a medida do lado $\overline{AC}$ do triângulo ABC, sabendo que o lado $\overline{AB}$ mede $10\sqrt{2}$ cm.



Solução

Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$, obtemos:

$105° + \hat{B} + 30° = 180°$ e, portanto, $\boxed{\hat{B} = 45°}$

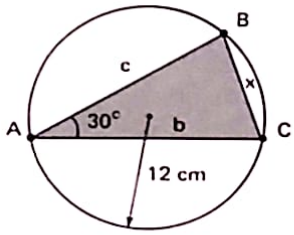
Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{AC}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{AB}{\text{sen } \hat{C}} \Rightarrow \frac{AC}{\text{sen } 45°} = \frac{10\sqrt{2}}{\text{sen } 30°} \Rightarrow AC \cdot \text{sen } 30° = 10\sqrt{2} \cdot \text{sen } 45° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC \cdot \frac{1}{2} = 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{AC = 20 \text{ cm}}.$$

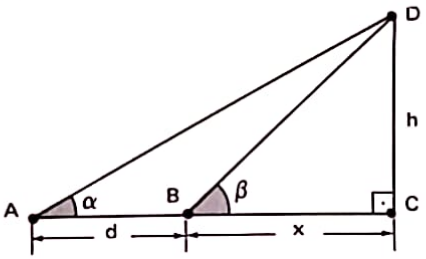
3. Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 12 cm. Calcule o lado $\overline{BC}$, sabendo que o ângulo interno $\hat{A}$ mede 30°.

Solução



Scanned by CamScanner

3. Calcule a altura h da figura. Dados: tg α = 0,5; tg β = 1,5 e d = 40 m.



Solução

No triângulo retângulo BCD: $\text{tg}\,\beta = \frac{h}{x} \Rightarrow 1{,}5 = \frac{h}{x} \Rightarrow$

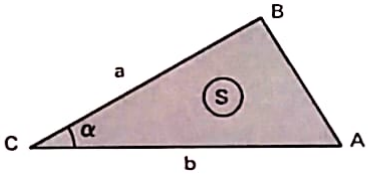
$\Rightarrow \boxed{h = 1{,}5x}$.

No triângulo ACD: $\text{tg}\,\alpha = \frac{h}{d + x} \Rightarrow \frac{1}{2} =$

$= \frac{1{,}5\,x}{40 + x} \Rightarrow 40 + x = 3x \Rightarrow 2x = 40 \Rightarrow x = 20$ m.

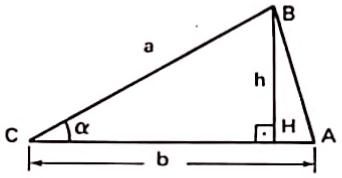
Como $h = 1{,}5\,x \Rightarrow h = 1{,}5 \times 20$ m $\Rightarrow \boxed{h = 30 \text{ m}}$.

4. Determine a área S do triângulo seguinte, em função dos lados a e b e do ângulo $\hat{\alpha}$ formado entre eles.



Solução

No triângulo $\underline{ABC}$ dado, construímos a altura BH = h relativa ao lado $\overline{AC}$:



Temos: $S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$ (I)

Agora, no triângulo CHB, retângulo em H, temos:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{HB}{BC} = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \text{sen}\,\alpha$ (II)

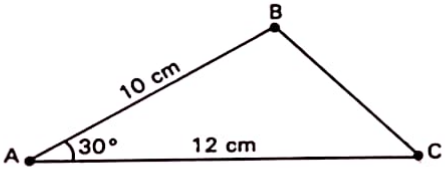
Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$\boxed{S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}}$$

5. Num triângulo ABC, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem, respectivamente, 10 cm e 12 cm. Determine a área desse triângulo sabendo que o ângulo $\hat{A}$ mede 30°.

Solução

Construímos um triângulo com os dados do problema:



Para calcular a área S do triângulo, usamos a fórmula do exercício anterior:

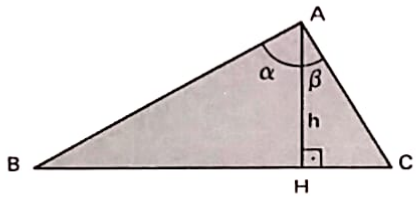
$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\alpha}{2} \Rightarrow S = \frac{10 \cdot 12 \cdot \text{sen}\,30°}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = 60 \cdot \text{sen}\,30°$.

Como sen 30° = 1/2, temos: $S = 60 \times 1/2 \Rightarrow$

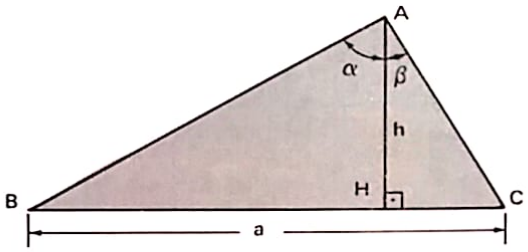
$\Rightarrow \boxed{S = 30 \text{ cm}^2}$.

6. Calcule a área S do triângulo seguinte, em função de h e dos ângulos $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$.



Solução

Fazemos BC = a:



Inicialmente, temos: $S = \frac{a \cdot h}{2}$ (I); falta-nos obter BC = a. Para isso, observe que:

No Δ AHB: $\text{tg}\,\alpha = \frac{BH}{AH} \Rightarrow BH = AH \cdot \text{tg}\,\alpha = h \cdot \text{tg}\,\alpha$

No Δ AHC: $\text{tg}\,\beta = \frac{HC}{AH} \Rightarrow HC = AH \cdot \text{tg}\,\beta = h \cdot \text{tg}\,\beta$

Agora:

$a = BC = BH + HC = h \cdot \text{tg}\,\alpha + h \cdot \text{tg}\,\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow a = h\,(\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta)$ (II)

Substituindo (II) em (I), temos finalmente:

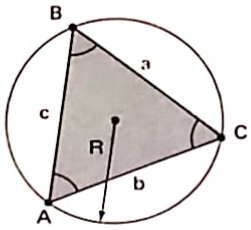
$$\boxed{S = \frac{h^2\,(\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta)}{2}}$$

Triângulos quaisquer

Estudaremos agora a lei dos senos e a lei dos cossenos; essas duas leis podem ser aplicadas em qualquer triângulo, inclusive em triângulos retângulos. Na verdade, o que ocorre é que para os triângulos retângulos normalmente usam-se as particulares definições de seno e de cosseno vistas anteriormente e não essas duas leis que vêm a seguir.

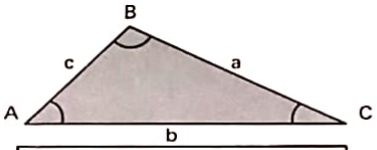
> Lei dos senos: em todo triângulo, a medida de cada lado é proporcional ao seno do ângulo oposto a esse lado; a razão da proporção é igual ao dobro do raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

Scanned by CamScanner



$$\Rightarrow \boxed{\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2 \cdot R}$$

Lei dos cossenos: em todo triângulo, o quadrado da medida de qualquer lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos o dobro do produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot ac \cdot \cos \hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos \hat{C} \end{aligned}}$$

Para a resolução de exercícios, baseie-se nas seguintes regras, válidas em geral:

- se são conhecidos dois lados e um ângulo do triângulo, usamos a lei dos cossenos.
- se são conhecidos dois ângulos e um lado do triângulo, usamos a lei dos senos.

ATENÇÃO Como agora estamos trabalhando com triângulos quaisquer, pode acontecer que um dos ângulos do triângulo seja obtuso (ângulo de medida entre 90° e 180°); por isto, agora, faz-se necessário saber o que é seno e cosseno de um ângulo obtuso.

Faremos então duas definições que serão justificadas posteriormente ao longo deste curso.

1ª definição:

O seno de um ângulo obtuso α é igual ao seno do seu suplemento $(180° - \alpha)$.

Simbolicamente, temos: $\boxed{\text{sen } \alpha = \text{sen } (180° - \alpha)}$.

Exemplos

1. $\text{sen } 120° = \text{sen } (180° - 120°) = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\text{sen } 135° = \text{sen } (180° - 135°) = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\text{sen } 150° = \text{sen } (180° - 150°) = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

2ª definição:

O cosseno de um ângulo obtuso α é igual ao oposto do cosseno do seu suplemento $(180° - \alpha)$.

Simbolicamente, temos: $\boxed{\cos \alpha = - \cos (180° - \alpha)}$.

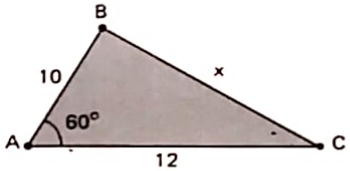
Exemplos

1. $\cos 120° = - \cos (180° - 120°) = - \cos 60° = - \frac{1}{2}$
2. $\cos 135° = - \cos (180° - 135°) = - \cos 45° = - \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos 150° = - \cos (180° - 150°) = - \cos 30° = - \frac{\sqrt{3}}{2}$

EXERCÍCIOS

1. Num triângulo ABC, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem 10 cm e 12 cm, respectivamente, e o ângulo formado por eles mede 60°. Calcule o lado $\overline{BC}$.

Solução

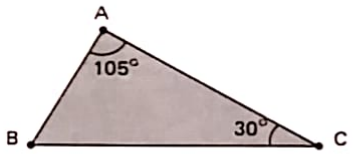


Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos 60° = 100 + 144 + 240 - (0,5)$

$x^2 = 124 \Rightarrow x = \sqrt{124} \Rightarrow \boxed{x = 2\sqrt{31} \text{ cm}}$.

2. (FEI-SP) Calcule a medida do lado $\overline{AC}$ do triângulo ABC, sabendo que o lado $\overline{AB}$ mede $10\sqrt{2}$ cm.



Solução

Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$, obtemos:

$105° + \hat{B} + 30° = 180°$ e, portanto, $\boxed{\hat{B} = 45°}$

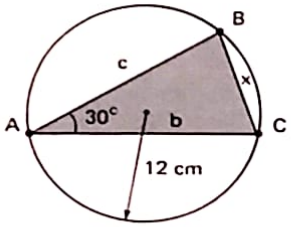
Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{AC}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{AB}{\text{sen } \hat{C}} \Rightarrow \frac{AC}{\text{sen } 45°} = \frac{10\sqrt{2}}{\text{sen } 30°} \Rightarrow AC \cdot \text{sen } 30° = 10\sqrt{2} \cdot \text{sen } 45° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC \cdot \frac{1}{2} = 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{AC = 20 \text{ cm}}.$$

3. Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 12 cm. Calcule o lado $\overline{BC}$, sabendo que o ângulo interno $\hat{A}$ mede 30°.

Solução



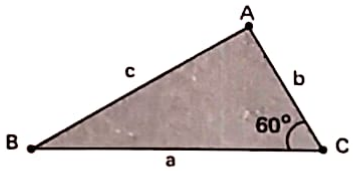
Scanned by CamScanner

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{x}{\text{sen } 30°} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R \Rightarrow \frac{x}{\text{sen } 30°} = 2R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \text{sen } 30° \cdot 2R = (0{,}5).\ 2.\ 12 \Rightarrow \boxed{x = 12 \text{ cm}}.$$

4. No triângulo ABC da figura, calcule o ângulo Â, sendo a = 2b.



Solução

Aplicando a lei dos cossenos para o lado $\overline{AB}$, vem: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 60°$ e, como $a = 2b$ e $\cos 60° = 1/2$, obtemos:

$$c^2 = 4b^2 + b^2 - 2.2b.b.(1/2) = 5b^2 - 2b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 3b^2 \Rightarrow \boxed{c = b\sqrt{3}}$$

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{c}{\text{sen } 60°} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \Rightarrow c \cdot \text{sen } \hat{A} = a \cdot \text{sen } 60° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \cdot \sqrt{3} \cdot \text{sen } \hat{A} = 2b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sen } \hat{A} = 1 \Rightarrow \boxed{\hat{A} = 90°}$$

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

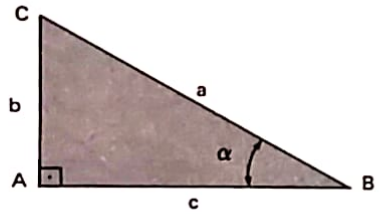
Neste capítulo vamos estabelecer as relações entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo e definir secante, cossecante e cotangente a partir das três primeiras relações já conhecidas.

Primeira relação fundamental

Para todo ângulo agudo α temos:

$$\boxed{\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

Esta relação decorre da análise do triângulo retângulo da figura seguinte:



Nesse triângulo temos: $\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$ e $\cos \alpha = \frac{c}{a}$. Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos: $b^2 + c^2 = a^2$; dividindo ambos os membros dessa igualdade por a^2, obtemos:

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1.$$

Nesta última igualdade, fazendo $b/a = \text{sen } \alpha$ e $c/a = \cos \alpha$, obtemos: $(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Nesta equação, as notações $\text{sen}^2 \alpha$ e $\cos^2 \alpha$ representam, respectivamente, $(\text{sen } \alpha)^2$ e $(\cos \alpha)^2$. Esta igualdade serve para se calcular o cos α a partir do sen α e vice-versa.

Segunda relação fundamental

Vamos demonstrar que, para todo ângulo agudo α, temos:

$$\boxed{\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}}$$

Chegamos a essa conclusão, analisando o mesmo triângulo do item anterior; nele, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{c},\ \text{sen } \alpha = \frac{b}{a} \text{ e } \cos \alpha = \frac{c}{a}.$$

Podemos então escrever que:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \text{tg } \alpha;$$

isto confirma a 2ª relação fundamental.

EXERCÍCIOS

1. Sendo α um ângulo agudo, calcular cos α sabendo-se que sen α = 8/17.

Solução

Na 1ª relação fundamental fazemos sen α = 8/17:

$$\boxed{\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{8}{17}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{64}{289} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{64}{289} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{225}{289} \Rightarrow \cos \alpha = \pm\frac{15}{17}.$$

Como α é agudo, cos α é positivo; portanto:

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{15}{17}}$$

2. Calcular tg α (α é ângulo agudo), sabendo-se que cos α = 12/13.

Scanned by CamScanner

Solução

$$\boxed{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{144}{169} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = \frac{25}{169} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{5}{13}$$

Como α é agudo, $\text{sen}\,\alpha = \frac{5}{13}$.

Lembrando a 2ª relação fundamental, temos: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

e, portanto, $\text{tg}\,\alpha = \frac{5/13}{12/13} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{5}{12}}$$

3. Sendo $\text{tg}\,\alpha = 4/3$ (α agudo), calcular o valor da expressão $E = 10\,\text{sen}\,\alpha - \frac{5}{3}\cdot\cos\alpha$.

Solução

Usamos a 2ª relação fundamental: $\boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{4\cos\alpha}{3} \quad \text{(I)}.$$

Substituindo (I) na 1ª relação fundamental, temos:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{4\cos\alpha}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16\cos^2\alpha}{9} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 16\cos^2\alpha + 9\cos^2\alpha = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\cos^2\alpha = 9 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3}{5}.$$

Como α é agudo, temos $\boxed{\cos\alpha = 3/5}$.

Substituindo $\cos\alpha = 3/5$ em (I), temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{4\times\frac{3}{5}}{3} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{\frac{12}{5}}{3} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}}$$

Substituindo os valores de sen α e cos α em E, obtemos:

$E = 10\times\frac{4}{5} - \frac{5}{3}\times\frac{3}{5} = 8 - 1 = 7$. Logo, $\boxed{E = 7}$.

Secante, cossecante e cotangente

Definiremos agora três novas razões trigonométricas: a secante (sec), a cossecante (cossec) e a cotangente (cotg); essas três definições são válidas para todo ângulo agudo α:

$$\text{cotangente de } \alpha = \text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$$

$$\text{secante de } \alpha = \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\text{cossecante de } \alpha = \text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$$

EXERCÍCIOS

1. Sendo α um ângulo agudo tal que $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$, calcule cos α, tg α, sec α, cossec α e cotg α.

Solução

Cálculo de cos α:

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{4}{5}}$$

Cálculo de tg α, cotg α, sec α e cossec α:

$$\begin{cases} \text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3/5}{4/5} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{4}} \\ \text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \dfrac{1}{3/4} \Rightarrow \boxed{\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{4}{3}} \\ \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{4/5} \Rightarrow \boxed{\sec\alpha = \dfrac{5}{4}} \\ \text{cossec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{1}{3/5} \Rightarrow \boxed{\text{cossec}\,\alpha = \dfrac{5}{3}} \end{cases}$$

2. Sendo α um ângulo agudo, calcular cossec α sendo $\sec\alpha = 2\sqrt{2}$.

Solução

Por definição de secante, a secante é o inverso do cosseno e, portanto, o cosseno é o inverso da secante; simbolicamente, temos então:

$$\boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Agora, usamos a 1ª relação fundamental:

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \frac{1}{8} = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{8} \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{7}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{7}{8}}.$$

Como α é agudo, $\text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{7}{8}}$.

Agora usamos a definição de cossecante:

$$\boxed{\text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{8}}} = \sqrt{\frac{8}{7}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

Racionalizando o denominador desta última fração, temos:

$$\boxed{\text{cossec}\,\alpha = \frac{2\sqrt{14}}{7}}$$

3. Calcular o valor de tg x sabendo que

$$\text{sen}^2x - 5\cdot\text{sen}\,x\cdot\cos x + 6\cdot\cos^2x = 0$$

Solução

O problema pede para calcular tg x e nos dá uma equação

Scanned by CamScanner

em sen x e cos x; lembrando que $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$, dividimos a equação dada por $\cos^2 x$:

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + \frac{6 \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$\left(\frac{\text{sen } x}{\cos x}\right)^2 - \frac{5 \cdot \text{sen } x \cdot \cancel{\cos x}}{\cos x \cdot \cancel{\cos x}} + 6 = 0$$

$$(\text{tg } x)^2 - 5 \cdot \text{tg } x + 6 = 0.$$

Agora, basta resolver esta equação de segundo grau na incógnita tg x:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow \Delta = 25 - 4.1.6 = 25 - 24 \Rightarrow \Delta = 1.$$

Portanto, temos: $\text{tg } x = \dfrac{5 \pm 1}{2.1} \Rightarrow \begin{cases} \text{tg } x = \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ \text{tg } x = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$

Finalizando: $\boxed{\text{tg } x = 2 \text{ ou tg } x = 3}$.

4. Sabendo que $\text{sen } x \cdot \cos x = \sqrt{3}/4$, calcule o valor numérico da expressão $\text{sen}^4 x + \cos^4 x$.

Solução

Analisando o enunciado do problema percebemos que nos foi dada uma equação em sen x e cos x e a pergunta é também uma função de sen x e cos x; por outro lado, sabemos que estas duas funções trigonométricas estão relacionadas pela fórmula: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Elevamos esta última igualdade ao quadrado para obter $\text{sen}^4 x$ e $\cos^4 x$, que constam do enunciado do problema:

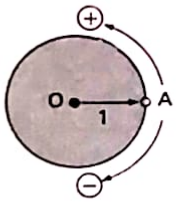
$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 = (1)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen}^4 x + 2 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen}^4 x + 2 \cdot (\text{sen } x \cdot \cos x)^2 + \cos^4 x = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen}^4 x + 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \cos^4 x = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen}^4 x + 3/8 + \cos^4 x = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{3}{8} \Rightarrow \boxed{\text{sen}^4 x + \cos^4 x = 5/8}.$$

SENO, COSSENO E TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

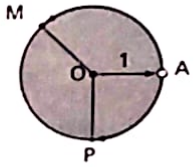
Anteriormente aprendemos os conceitos de seno, cosseno e tangente para arcos e ângulos agudos, através do triângulo retângulo. Vamos agora ampliar esses conceitos para arcos quaisquer.

Conceitos fundamentais

Ciclo trigonométrico: é uma circunferência com raio igual a 1, na qual se adota um ponto A chamado origem dos arcos (geralmente é o ponto mais à direita da circunferência) e o sentido positivo de percurso como sendo o sentido anti-horário (o sentido horário é o sentido negativo).



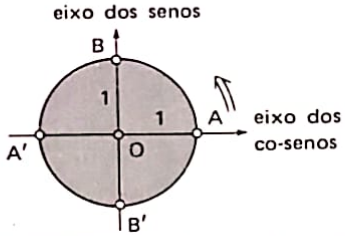
Arco trigonométrico: é um arco contido no ciclo trigonométrico com origem no ponto A e que terá medida positiva se for percorrido no sentido anti-horário (caso contrário, terá medida negativa).



$\widehat{AM} = 120°$
$\widehat{AP} = -90°$

Na figura anterior, $\widehat{AM}$ é um arco trigonométrico de origem A, extremidade M, com medida positiva, pois seu sentido de percurso é o anti-horário; $\widehat{AP}$ é um arco trigonométrico de origem A, extremidade P e medida negativa, pois seu sentido de percurso é o horário.

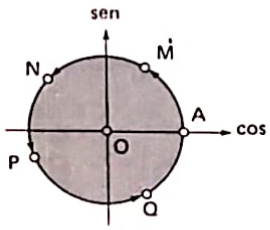
Quadrantes: dividimos o ciclo trigonométrico em quatro partes utilizando dois eixos perpendiculares entre si (chamados de eixo dos senos e eixo dos cossenos, conforme a figura seguinte) ambos passando pelo centro do ciclo e um deles (o dos cossenos) passando pelo ponto origem A. Obtemos assim os pontos B, A′ e B′, intersecções desses eixos com o ciclo:



Chamamos de quadrante a cada uma dessas quatro partes em que ficou dividido o ciclo. Os quadrantes AB, BA′, A′B′ e B′A são chamados de 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes, respectivamente.

Nessa situação, um arco marcado a partir do ponto A é do 1º, 2º, 3º ou 4º quadrante se ele terminar entre os pontos A e B, B e A′, A′ e B′ ou B′ e A, respectivamente.

Exemplos:



$\widehat{AM} = 60° \Rightarrow$ 1º quadrante
$\widehat{AN} = 140° \Rightarrow$ 2º quadrante

$\widehat{AP} = 200° \Rightarrow$ 3º quadrante
$\widehat{AQ} = 300° \Rightarrow$ 4º quadrante

Scanned by CamScanner

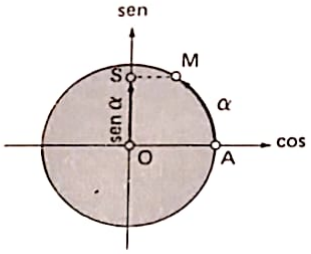
Repare que, na figura anterior,

- no eixo dos cossenos, os valores positivos são marcados no sentido de O para A; os negativos, de O para A′; assim, temos OA = 1 e OA′ = −1;
- no eixo dos senos, os valores positivos são marcados no sentido de O para B; os negativos, de O para B′; assim, temos OB = 1 e OB′ = −1.

Seno, cosseno e tangente de arco trigonométrico

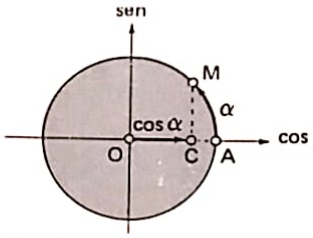
Consideremos um ciclo trigonométrico de centro O com os eixos de senos e cossenos; seja também um arco de medida α, com origem A e extremidade M; definiremos agora seno, cosseno e tangente de α.

Seno: para se obter o seno de α, projeta-se o ponto M perpendicularmente sobre o eixo dos senos, obtendo o ponto S; a medida algébrica (positiva, negativa ou nula) do segmento OS é o seno de α.



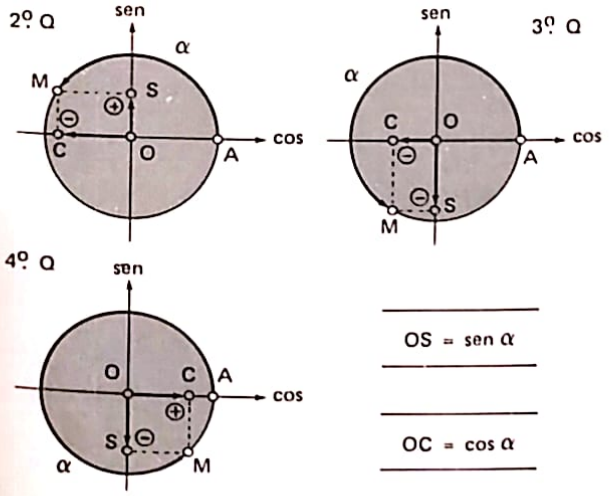
OS = sen α

Cosseno: para se obter o cosseno de α, projeta-se o ponto M perpendicularmente sobre o eixo dos cossenos, obtendo o ponto C; a medida algébrica do segmento OC é o cosseno de α.



OC = cos α

Faremos agora a representação gráfica do seno e do cosseno para os demais quadrantes; repare bem nos sinais.

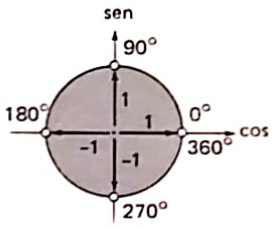


OS = sen α

OC = cos α

Resumimos agora os sinais do seno e do cosseno nos quatro quadrantes:

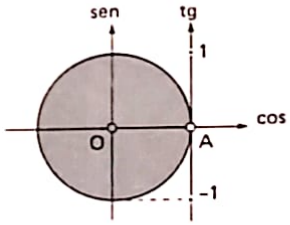
Finalmente, analisando o ciclo trigonométrico, obtemos o seno e o cosseno dos arcos de medidas 0°, 90°, 180°, 270° e 360°:



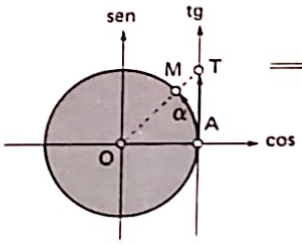
sen 0° = 0; cos 0° = 1
sen 90° = 1; cos 90° = 0
sen 180° = 0; cos 180° = -1
sen 270° = -1; cos 270° = 0
sen 360° = 0; cos 360° = 1

Tangente: para visualizar o conceito de tangente, precisamos definir, inicialmente, o eixo das tangentes.

Consideremos, então, um ciclo trigonométrico de centro O e ponto origem A; tracemos um eixo paralelo ao eixo dos senos pelo ponto A, com sentido positivo igual ao do eixo dos senos, origem no ponto A e unidade de medida igual ao raio do ciclo; este eixo é denominado de eixo das tangentes.



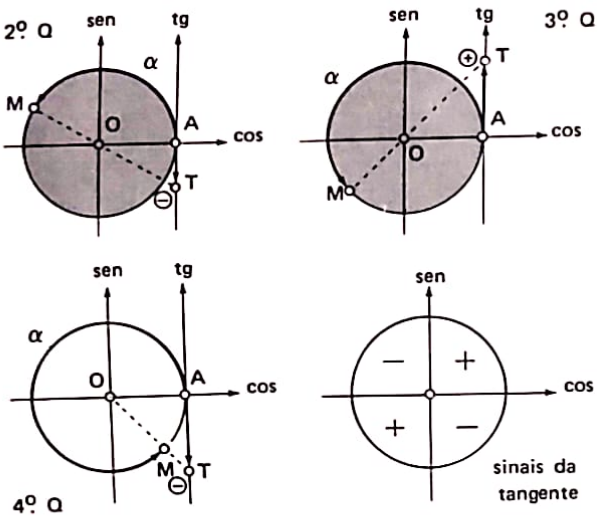
Consideremos agora um arco trigonométrico $\widehat{AM}$, de medida α; para se obter a tangente de α traçamos o segmento que une o centro O do ciclo trigonométrico com o ponto M, extremidade final do arco; a seguir, prolongamos este segmento até cruzar o eixo das tangentes num ponto T; a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$ é a tangente de α.



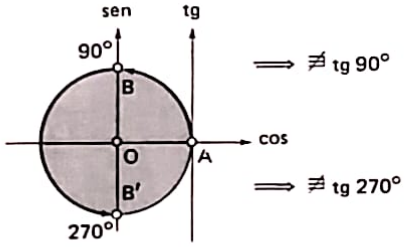
⟹ AT = tg α

Vejamos agora a tangente nos demais quadrantes; repare, ao final, a distribuição de sinais da tangente nos quadrantes.

Scanned by CamScanner

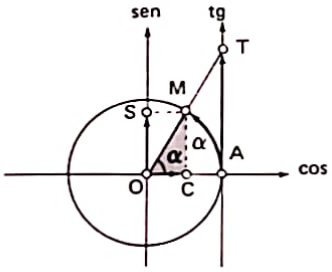


ATENÇÃO Os arcos que terminam nos pontos B e B' do ciclo trigonométrico não têm tangente, pois a reta que passa pelo centro O e pelas extremidades desses arcos é paralela ao eixo das tangentes; portanto, não existe o ponto de intersecção T, que define a medida da tangente:



Vamos agora mostrar que as definições de seno, cosseno e tangente introduzidas através do ciclo trigonométrico são equivalentes àquelas apresentadas para o triângulo retângulo.

No triângulo retângulo trabalhamos com ângulos agudos, isto é, com arcos do 1º quadrante:



Sabemos que, no ciclo trigonométrico, OS = sen α, OC = = cos α, AT = tg α, e OA = OM = 1, pois são os raios do ciclo.

Temos então que, por um lado, o seno do arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α é OS, que por sua vez é igual a

CM: $\boxed{\text{sen } \alpha = OS = CM}$ (I)

Por outro lado, no triângulo retângulo OCM, seno do ângulo de medida α é a razão entre o cateto oposto a α e a hipotenusa, isto é,

$$\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{hipot}} = \frac{CM}{OM} = \frac{CM}{1} = CM} \quad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II) concluímos que as duas definições são equivalentes. Analogamente, tiramos as mesmas conclusões para o cosseno e a tangente.

A partir destas conclusões percebemos que as seguintes relações trigonométricas anteriormente demonstradas para ângulos agudos também podem ser aplicadas para os arcos trigonométricos:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}; \quad \text{cotg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \quad \text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

EXERCÍCIOS

1. Sendo x um arco de 2º quadrante e sen x = 4/5, calcule cos x.

Solução

Usando a relação fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$; substituindo sen x = 4/5, temos: $(4/5)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - (4/5)^2 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$.

Extraindo a raiz quadrada, temos: cos x = ± 3/5; a escolha do sinal depende do quadrante ao qual pertence o arco de medida x; pelo enunciado, x pertence ao 2º quadrante, onde o cosseno é negativo; logo, temos: $\boxed{\cos x = -3/5}$.

2. Sendo $\text{cossec } x = \frac{13}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule tg x.

Solução

Como $\text{cossec } x = \frac{13}{5}$ e $\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$, obtemos

$$\text{sen } x = \frac{1}{\text{cossec } x} = \frac{5}{13}.$$

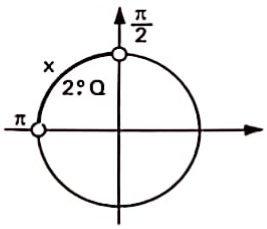
Como $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$, precisamos calcular cos x.

Para isso:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - \frac{25}{169} =$$

$$= \frac{144}{169} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{12}{13}.$$

Agora, a escolha do sinal depende do quadrante ao qual pertence o arco x. Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, x é do 2º quadrante:



O cos x é, então, negativo. Portanto, $\cos x = -\frac{12}{13}$.

Finalmente, $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{5/13}{-12/13} = -\frac{5}{12}$.

Scanned by CamScanner

3. Sendo $\cos x = 2 \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, calcule sen x e cos x.

Solução

Com a equação dada e a 1ª relação fundamental construímos um sistema de equações:

$$\begin{cases} \cos x = 2 \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

Substituindo a 1ª equação na 2ª, temos:

$\operatorname{sen}^2 x + (2 \operatorname{sen} x)^2 = 1$

$\operatorname{sen}^2 x + 4 \operatorname{sen}^2 x = 1$

$5 \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1/5$

Extraindo a raiz quadrada e racionalizando a expressão obtida, temos: $\operatorname{sen} x = \pm \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Como x está no 1º quadrante (vide enunciado), concluímos que o seno é positivo; logo: $\boxed{\operatorname{sen} x = \sqrt{5}/5}$.

Usando a equação dada no enunciado, calculamos o cosseno: $\cos x = 2 \operatorname{sen} x \Rightarrow \boxed{\cos x = 2\sqrt{5}/5}$.

4. Sendo x tal que $\operatorname{sen} x = \sqrt{m}/2$ e $\cos x = \sqrt{m-2}/2$, calcule m.

Solução

Iniciamos determinando as condições de existência das raízes:

$$\text{C.E.: } \begin{cases} \sqrt{m}/2 \in \mathbb{R} \Rightarrow m \geqslant 0 \text{ e} \\ \sqrt{m-2}/2 \in \mathbb{R} \Rightarrow m-2 \geqslant 0 \Rightarrow m \geqslant 2 \end{cases}$$

Substituindo as equações dadas na 1ª relação fundamental, temos: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{m}}{2}\right)^2 +$

$+\left(\dfrac{\sqrt{m-2}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{m}{4} + \dfrac{m-2}{4} = 1 \Rightarrow 2m - 2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow m = 3.$

Verifica-se que o valor $m = 3$ satisfaz ambas as C.E. ($m \geqslant 2$ e $m \geqslant 0$) e, portanto, $\boxed{m = 3}$.

5. Sendo $\operatorname{sen} x + \cos x = 7/5$, calcule o valor da expressão $E = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$.

Solução

Um possível caminho de resolução é resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos x = 7/5 \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

As soluções deste sistema são os valores de sen x e cos x que, substituídas na expressão dada, fornecem a resposta final.

Um caminho mais rápido (com muito menos "contas") é o seguinte: elevamos ambos os membros da equação do enunciado ao quadrado:

$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = (7/5)^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x = 49/25$

$$\text{Como: } \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ e} \\ \operatorname{sen} x \cdot \cos x = E, \text{ temos: } 1 + 2 \cdot E = \\ = 49/25 \Rightarrow 2 \cdot E = \dfrac{49}{25} - 1 = \dfrac{24}{25} \end{cases}$$

portanto, $\boxed{E = 12/25}$.

6. Sendo $\cos x = 12/13$, com x pertencente ao 4º quadrante, calcule tg x.

Solução

Como, pela 2ª relação, $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, precisamos conhecer sen x e cos x para poder calcular tg x. Então, começamos pela 1ª relação, calculando sen x:

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + (12/13)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \dfrac{144}{169} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \dfrac{144}{169} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{25}{169}$

Extraindo a raiz quadrada, obtemos: $\operatorname{sen} x = \pm \dfrac{5}{13}$.

Como x pertence ao 4º quadrante, o seno é negativo, e, portanto, $\boxed{\operatorname{sen} x = -5/13}$.

Usando a 2ª relação, calculamos a tangente:

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \dfrac{-5/13}{12/13} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} x = -5/12}$.

7. Sendo $\pi/2 < x < \pi$ e $\operatorname{tg} x = -3$, calcule sen x e cos x.

Solução

Montamos um sistema usando a 1ª e a 2ª relações fundamentais:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -3 \Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -3 \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = -3 \cdot \cos x} \quad \text{I} \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1. \text{ Substituindo a equação I, temos:} \end{cases}$$

$(-3 \cdot \cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 9 \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Como $\pi/2 < x < \pi$ (2º quadrante), escolhemos o sinal $\ominus$ para o cosseno; a seguir, racionalizando a última expressão, obtemos: $\boxed{\cos x = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}}$.

Sendo $\operatorname{sen} x = -3 \cdot \cos x \Rightarrow \operatorname{sen} x = -3 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}}$.

8. Sendo x tal que $0 < x < \pi/2$ e $\operatorname{sen} x = 8/17$, calcule sec x.

Solução

Pela definição, temos: $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$; logo, precisamos primeiramente conhecer o cosseno para depois calcular a secante.

Usando a 1ª relação fundamental, temos:

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{8}{17}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \dfrac{64}{289} +$

$+ \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \dfrac{64}{289} = \dfrac{225}{289} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\cos x = \dfrac{15}{17}}$ (como x pertence ao 1º quadrante, escolhemos o cosseno positivo).

Agora, se $\cos x = \dfrac{15}{17} \Rightarrow \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\sec x = \dfrac{17}{15}}$.

Scanned by CamScanner

9. Sendo cotg x = 1/4 com x pertencente ao 3º quadrante, calcule sen x.

Solução

Lembrando a definição de cotangente, temos:

$$\text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\, x = 4 \cdot \cos x}\ \text{(I)}.$$

Substituindo este último resultado na 1ª relação fundamental, temos:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow (4 \cdot \cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16 \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 17 \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1/17 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{17}}$; como x pertence ao 3º quadrante, escolhemos o sinal negativo; racionalizando o resultado obtido, temos:

$$\boxed{\cos x = -\frac{\sqrt{17}}{17}}.$$

Substituindo este resultado na expressão (I), temos:

$$\text{sen}\, x = 4 \cdot \cos x \Rightarrow \text{sen}\, x = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{17}}{17}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{sen}\, x = -\frac{4\sqrt{17}}{17}}.$$

10. Sendo sec x = 3, calcule cossec x.

Solução

Pela definição de secante:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 3 = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 3 \cos x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos x = \frac{1}{3}}$$

Agora, pela 1ª relação fundamental, calculamos o seno:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{8}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}\, x = \pm \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como não sabemos o quadrante ao qual pertence x, ficamos com ambos os resultados:

$$\boxed{\text{sen}\, x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}}.$$

Pela definição de cossecante:

$$\text{cossec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x} \Rightarrow \text{cossec}\, x = \frac{1}{\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}} = \pm \frac{3}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \pm \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Portanto, temos: $\boxed{\text{cossec}\, x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{4}}$.

Relações derivadas

Além das relações fundamentais, é interessante conhecer mais estas três relações que facilitam a resolução de alguns problemas, apesar de não serem indispensáveis.

Admitindo-se que todas as funções que aparecem nas próximas relações estão definidas, temos:

$$\boxed{\text{cotg}\, x = \frac{1}{\text{tg}\, x}}.$$

Usando a definição de cotangente e lembrando a 2ª relação fundamental, temos:

$$\begin{cases} \text{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x} \\ \text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\text{tg}\, x} = \frac{1}{\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}} = 1 \times \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \text{cotg}\, x.$$

Portanto, $\text{cotg}\, x = \frac{1}{\text{tg}\, x}$ ou, seu equivalente, $\text{tg}\, x = \frac{1}{\text{cotg}\, x}$.

Exemplos

1. se tg x = 5 então, cotg x = 1/5;
2. se tg x = 2/3 então, cotg x = 3/2;
3. se cotgx = −5/6 então, tg x = −6/5.

$$\boxed{\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x}$$

Para esta demonstração simples, partimos do 2º membro da igualdade:

$$1 + \text{tg}^2 x = 1 + \left(\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \text{logo, } 1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 =$$

$$= (\sec x)^2 = \sec^2 x.$$

Exemplos

1. se tg x = 2 então, $\sec^2 x = 1 + 2^2 = 5 \Rightarrow \sec x = \pm\sqrt{5}$;
2. se sec x = 3 então, $3^2 = 1 + \text{tg}^2 x \Rightarrow \text{tg}^2 x = 8 \Rightarrow \text{tg}\, x = \pm 2\sqrt{2}$.

$$\boxed{\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x}$$

A demonstração é análoga à anterior; partimos do 2º membro da igualdade:

$$1 + \text{cotg}^2 x = 1 + \left(\frac{\cos x}{\text{sen}\, x}\right)^2 = 1 + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} \Rightarrow \text{logo, } 1 + \text{cotg}^2 x = \frac{1}{\text{sen}^2 x} =$$

$$= \left(\frac{1}{\text{sen}\, x}\right)^2 = (\text{cossec}\, x)^2 = \text{cossec}^2 x.$$

Exemplos

1. se cossec x = 4, então: $4^2 = 1 + \text{cotg}^2 x \Rightarrow \text{cotg}^2 x = 15$ e, portanto, $\text{cotg}\, x = \pm\sqrt{15}$.
2. se cotg x = 10, então $\text{cossec}^2 x = 1 + 10^2 = 101$ e, portanto, $\text{cossec}\, x = \pm\sqrt{101}$.

EXERCÍCIOS

1. Sendo x pertencente ao 1º quadrante e sen x = 2/3, calcule cotg x.

Solução

Primeiro calculamos a cossecante para depois calcularmos, a cotangente através da relação $\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$.

Se sen x = 2/3 e $\text{cossec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x}$ então cossec x = 3/2; sendo $\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x \Rightarrow (3/2)^2 = 1 + \text{cotg}^2 x \Rightarrow$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow 9/4 = 1 + \text{cotg}^2 x \Rightarrow \text{cotg}^2 x = 9/4 - 1 = 5/4$; como x pertence ao 1º quadrante, a cotangente é positiva, portanto,

$$\boxed{\text{cotg } x = \sqrt{5}/2}$$

2. Sendo $\text{tg } x = 2\sqrt{6}$, $0 < x < \pi/2$, calcule cos x.

Solução

Primeiro calculamos a secante pela relação $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$, a seguir, calculamos o cosseno a partir da definição de secante.

$\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x \Rightarrow \sec^2 x = 1 + (2\sqrt{6})^2 = 1 + 4 \cdot 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sec^2 x = 25 \Rightarrow \sec x = \pm 5.$

Escolhemos $\sec x = 5$ porque x pertence ao 1º quadrante, conforme o enunciado. Sendo $\sec x = 5$ e $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, temos: $\boxed{\cos x = 1/5}$.

3. Sendo $\text{tg } x + \text{cotg } x = 5$, calcule o valor da expressão $E = \text{tg}^2 x + \text{cotg}^2 x$.

Solução

Elevamos ambos os membros da igualdade dada ao quadrado: $(\text{tg } x + \text{cotg } x)^2 = 5^2$

$\text{tg}^2 x + 2 \cdot \text{tg } x \cdot \text{cotg } x + \text{cotg}^2 x = 25$

Na expressão anterior, $\text{tg}^2 x + \text{cotg}^2 x = E$; fazendo $\text{cotg } x = \dfrac{1}{\text{tg } x}$, obtemos: $E + 2 \cdot \text{tg } x \cdot \dfrac{1}{\text{tg } x} = 25 \Rightarrow E + 2 = 25$, portanto, $\boxed{E = 23}$

> **OBSERVAÇÃO** Um outro método possível (bem mais trabalhoso) para este exercício é fazer $\text{tg } x = y$, $\text{cotg } x = \dfrac{1}{\text{tg } x} = \dfrac{1}{y}$ e resolver a equação $y + \dfrac{1}{y} = 5$; desta equação obtém-se o valor de y e, portanto, de tg x. Por último volta-se ao enunciado e calcula-se o valor de E.

4. Sendo $0 < x < \pi/2$, simplifique a expressão:

$$f(x) = -\text{sen } x \cdot \text{tg } x + \sec x$$

Solução

Substituindo $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$ e $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ em f(x), temos: $f(x) = -\text{sen } x \cdot \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow f(x) = \dfrac{-\text{sen}^2 x}{\cos x} + \dfrac{1}{\cos x}$ logo, $\boxed{f(x) = \dfrac{-\text{sen}^2 x + 1}{\cos x}}$ (I).

Da 1ª relação fundamental tiramos que: sendo $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, então

$$\boxed{\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I) temos:

$f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x} \Rightarrow \boxed{f(x) = \cos x}$

5. Simplifique a expressão: $y = \dfrac{\text{sen}^3 x \cdot \sec^2 x + \text{sen } x}{\text{tg}^2 x + 1}$

Solução

Começamos colocando sen x em evidência no numerador:

$y = \dfrac{\text{sen } x \cdot (\text{sen}^2 x \cdot \sec^2 x + 1)}{\text{tg}^2 x + 1}$. Lembrando que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ temos: $y = \dfrac{\text{sen } x \cdot \left(\text{sen}^2 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} + 1\right)}{\text{tg}^2 x + 1} =$

$= \dfrac{\text{sen } x \cdot \left(\dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1\right)}{\text{tg}^2 x + 1}$

Como $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \text{tg } x$, temos: $y = \dfrac{\text{sen } x \cdot (\text{tg}^2 x + 1)}{\text{tg}^2 x + 1}$

Simplificando a expressão, obtemos: $\boxed{y = \text{sen } x}$.

6. Considere a expressão $y = 3 \cdot \text{sen } x + 4$ definida para todo número x real; determine o intervalo de variação de y.

Solução

Pela definição do seno constatamos que o maior valor possível de sen x é 1 e o menor possível é -1 e, portanto, podemos dizer que sen x varia de -1 a $+1$, isto é:

$$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant +1 \quad \text{(I)}$$

Na expressão dada, isolamos sen x:

$y = 3 \text{ sen } x + 4 \Rightarrow y - 4 = 3 \cdot \text{sen } x \Rightarrow \dfrac{y-4}{3} = \text{sen } x$

Substituindo este último resultado em (I), temos:

$$-1 \leqslant \frac{y-4}{3} \leqslant 1$$

Agora, resolvemos separadamente as duas desigualdades:

$$\begin{cases} -1 \leqslant \dfrac{y-4}{3} \Rightarrow -3 \leqslant y - 4 \Rightarrow -3 + 4 \leqslant y \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \boxed{1 \leqslant y} \\ \dfrac{y-4}{3} \geqslant 1 \Rightarrow y - 4 \geqslant 3 \Rightarrow y \geqslant 3 + 4 \Rightarrow \boxed{y \geqslant 7} \end{cases}$$

Estes dois últimos resultados permitem escrever que:

$$\boxed{1 \leqslant y \leqslant 7}.$$

7. Calcular a soma das raízes da equação $3\text{tg}^2 x - 4\sqrt{3} \cdot \text{tg } x + 3 = 0$, sabendo que x pertence ao primeiro quadrante $(0 < x < \pi/2)$.

Solução

Substituindo $\text{tg } x = t$ na equação dada, temos:

$$3t^2 - 4\sqrt{3} \cdot t + 3 = 0$$

Agora, passamos a resolver esta equação de 2º grau:

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \Rightarrow \Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow \Delta = 16 \cdot 3 - 36 \Rightarrow \Delta = 48 - 36 \Rightarrow \Delta = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{4 \cdot 3} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}.$

Logo, temos: $t = \dfrac{4\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{6} \Rightarrow$

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \\ t_2 = \dfrac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Lembrando que $0 < x < \pi/2$, temos:

$t_1 = \sqrt{3} \Rightarrow \text{tg } x = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60° \Leftrightarrow x = \pi/3$

$t_2 = \sqrt{3}/3 \Rightarrow \text{tg } x = \sqrt{3}/3 \Rightarrow x = 30° \Leftrightarrow x = \pi/6$

Portanto, a soma das raízes da equação dada é:

$\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\text{resposta: } \dfrac{\pi}{2}}$

8. Dar o sinal da expressão $E = \cos 1 \cdot \text{sen } 2 \cdot \text{tg } 3$.

Solução

As medidas 1, 2 e 3 dos arcos do enunciado são em radianos e não em graus, pois se fossem em graus viriam escritas como 1°, 2° e 3°, respectivamente.

Scanned by CamScanner

Faremos então a conversão de radianos para graus para visualizar melhor o quadrante ao qual os arcos pertencem.

Iniciamos com o arco de 1 radiano:

$$\begin{cases} \pi \text{ rad} \rightarrow 180° \\ 1 \text{ rad} \rightarrow x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{180°}{\pi} \cong \frac{180°}{3{,}14} \cong 57°$$

Logo, 1 rad é, aproximadamente, 57° e portanto é um arco de 1º quadrante tendo cosseno positivo.

Analogamente, 2 rad são aproximadamente 114°, sendo um arco de 2º quadrante com seno positivo.

Finalmente, 3 rad são aproximadamente 172°, sendo um arco de 2º quadrante e, portanto, com tangente negativa.

Concluindo, nossa expressão ficará:

$E = \cos 1 \cdot \text{sen } 2 \cdot \text{tg } 3 \Rightarrow E = \oplus \cdot \oplus \cdot \ominus \Rightarrow E = \ominus$. Portanto a expressão E é negativa.

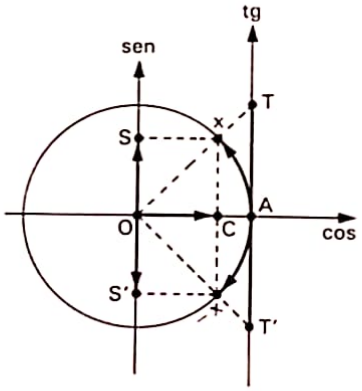
TRANSFORMAÇÕES DE ARCOS

Com o nosso conhecimento de trigonometria, já sabemos definir as funções trigonométricas de um arco de medida α e estabelecer as relações entre essas funções. Essas relações (fundamentais e derivadas) permitem que se calcule os valores de todas as funções trigonométricas de um arco α desde que se conheça o valor de uma delas.

Nesse capítulo aprenderemos a calcular as funções trigonométricas dos arcos de medidas $-x$, $2x$, $3x$, $4x$, $x/2$,... a partir das funções trigonométricas do arco x; também aprenderemos a calcular as funções trigonométricas dos arcos de medidas $a+b$ e $a-b$ a partir dos arcos de medidas a e b.

Arcos negativos

Sendo x um número real positivo, vamos estabelecer as relações entre o seno, o cosseno e a tangente de x e de $-x$, respectivamente. Para isso, analisemos a figura seguinte:



$$\Rightarrow \begin{cases} OS = \text{sen } x \\ OS' = \text{sen}(-x) \\ OC = \cos x \\ OC = \cos(-x) \\ AT = \text{tg } x \\ AT' = \text{tg}(-x) \end{cases}$$

Da análise, concluímos que OS e OS′ são iguais em módulo, porém de sinais contrários; logo:

$$\boxed{\text{sen}(-x) = -\text{sen } x}$$

Igualmente, AT e AT′ são iguais em módulo mas com sinais contrários, por isso, temos:

$$\boxed{\text{tg}(-x) = -\text{tg } x}$$

Por fim, repare que OC representa o cosseno tanto de x como de $-x$ e, por isso, concluímos que:

$$\boxed{\cos(-x) = \cos x}.$$

Exemplos

1. $\text{sen}(-30°) = -\text{sen } 30° = -1/2$;

2. $\cos(-45°) = \cos 45° = \sqrt{2}/2$;

3. $\text{tg}(-60°) = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$.

Adição de arcos

Vamos agora apresentar as fórmulas do seno, do cosseno e da tangente da soma de dois arcos (as demonstrações dessas fórmulas estão fora dos objetivos deste curso e por isso serão omitidas).

Seno da soma de dois arcos: sendo a e b dois arcos quaisquer, calculamos o seno da soma deles pela expressão:

$$\boxed{\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a}$$

Exemplos

1. $\text{sen}(30° + 60°) = \text{sen } 30° \cdot \cos 60° + \text{sen } 60° \cdot \cos 30°$; obtivemos esta expressão fazendo, na fórmula dada, $a = 30°$ e $b = 60°$.

Lembrando que $\text{sen } 30° = 1/2$, $\cos 30° = \sqrt{3}/2$, $\text{sen } 60° = \sqrt{3}/2$ e $\cos 60° = 1/2$, temos, na expressão anterior:

$$\text{sen}(30° + 60°) = 1/2 \cdot 1/2 + \sqrt{3}/2 \cdot \sqrt{3}/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } 90° = 1/4 + 3/4 \Rightarrow \boxed{\text{sen } 90° = 1}.$$

Este último resultado já era esperado pois sabíamos que $\text{sen } 90° = 1$. Isto confirma que a fórmula apresentada "realmente funciona".

2. $\text{sen } 75° = \text{sen}(45° + 30°) = \text{sen } 45° \cdot \cos 30° + \text{sen } 30° \cdot \cos 45°$

$$\text{sen } 75° = \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{3}/2 + 1/2 \cdot \sqrt{2}/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } 75° = \sqrt{6}/4 + \sqrt{2}/4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{sen } 75° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}.$$

3. $\text{sen}(\pi + x) = \text{sen } \pi \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \cos \pi$.

Como $\text{sen } \pi = 0$ e $\cos \pi = -1$, temos:

$$\text{sen}(\pi + x) = 0 \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot (-1).$$

Scanned by CamScanner

Portanto, $\boxed{\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen } x}$.

Cosseno da soma de dois arcos: sendo a e b dois arcos quaisquer, temos:

$$\boxed{\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b}.$$

Exemplos

1. $\cos 60° = \cos(30° + 30°) \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos 60° = \cos 30° \cdot \cos 30° - \text{sen } 30° \cdot \text{sen } 30°.$

Lembrando que sen 30° = 1/2 e que $\cos 30° = \sqrt{3}/2$, temos:

$$\cos 60° = \sqrt{3}/2 \cdot \sqrt{3}/2 - 1/2 \cdot 1/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 60° = 3/4 - 1/4 \Rightarrow \boxed{\cos 60° = 1/2}.$$

Como este último resultado já era esperado, podemos acreditar na veracidade da fórmula apresentada.

2. $\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30°$

$$\Rightarrow \cos 75° = \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{3}/2 - \sqrt{2}/2 \cdot 1/2.$$

Logo, $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \boxed{\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$

3. $\cos(\pi/2 + x) = \cos(\pi/2) \cdot \cos x - \text{sen}(\pi/2) \cdot \text{sen } x$

Como: $\begin{cases} \cos(\pi/2) = 0 \\ \text{sen}(\pi/2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos(\pi/2 + x) = 0 \cdot \cos - 1 \cdot \text{sen } x$

$$\boxed{\cos(\pi/2 + x) = -\text{sen } x}$$

Tangente da soma de dois arcos: sendo a, b e a+b arcos para os quais existe tangente, temos:

$$\boxed{\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}}$$

Exemplos

1. $\text{tg } 105° = \text{tg}(60° + 45°) = \dfrac{\text{tg } 60° + \text{tg } 45°}{1 - \text{tg } 60° \cdot \text{tg } 45°} =$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1}$$

Racionalizando: $\text{tg } 105° = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \times \dfrac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$, obtemos:

$$\boxed{\text{tg } 105° = -2 - \sqrt{3}}.$$

2. $\text{tg}(\pi + x) = \dfrac{\text{tg } \pi + \text{tg } x}{1 - \text{tg } \pi \cdot \text{tg } x}$; sendo tg π = 0, temos:

$$\text{tg}(\pi + x) = \frac{\text{tg } x}{1} \Rightarrow \boxed{\text{tg}(\pi + x) = \text{tg } x}.$$

3. Se tg a = 2 e tg b = 3, então:

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b} = \frac{2 + 3}{1 - 2 \times 3} = \frac{5}{-5} = -1.$$

Subtração de arcos

As fórmulas do seno, do cosseno e da tangente da diferença de dois arcos decorrem das fórmulas do sen(a+b), cos(a+b) e tg(a+b) e das propriedades dos arcos negativos.

Seno da diferença de dois arcos: lembrando que a − b = = a + (−b), temos:

$\text{sen}(a - b) = \text{sen}[a + (-b)] = \text{sen } a \cdot \cos(-b) + \text{sen}(-b) \cdot \cos a$

Como: sen(−b) = −sen b e cos(−b) = cos b, temos:

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b + (-\text{sen } b) \cdot \cos a$$

$$\boxed{\text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a}.$$

Cosseno da diferença de dois arcos: analogamente ao caso anterior, temos:

$\cos(a - b) = \cos[a + (-b)] = \cos a \cdot \cos(-b) - \text{sen } a \cdot \text{sen}(-b)$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot (-\text{sen } b)$$

$$\boxed{\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b}.$$

Tangente da diferença de dois arcos: por um procedimento análogo aos dois anteriores e usando: tg(−b) = −tg b, obtemos:

$$\boxed{\text{tg}(a - b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b}}.$$

Exemplos

1. $\text{sen } 15° = \text{sen}(45° - 30°) = \text{sen } 45° \cdot \cos 30° - \text{sen } 30° \cdot \cos 45° \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{sen } 15° = \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{3}/2 - 1/2 \cdot \sqrt{2}/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } 15° = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{sen } 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}.$$

2. $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30° \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos 15° = \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{3}/2 + \sqrt{2}/2 \cdot 1/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 15° = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \boxed{\cos 15° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}.$$

3. $\text{sen}(\pi/2 - x) = \underbrace{\text{sen}(\pi/2)} \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \underbrace{\cos(\pi/2)}$

$\text{sen}(\pi/2 - x) = (1) \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot 0$

Logo, $\boxed{\text{sen}(\pi/2 - x) = \cos x}$

4. $\cos(\pi/2 - x) = \underbrace{\cos(\pi/2)} \cdot \cos x + \underbrace{\text{sen}(\pi/2)} \cdot \text{sen } x$

$\cos(\pi/2 - x) = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \text{sen } x$

Logo, $\boxed{\cos(\pi/2 - x) = \text{sen } x}$.

5. $\text{tg}(60° - 30°) = \dfrac{\text{tg } 60° - \text{tg } 30°}{1 + \text{tg } 60° \cdot \text{tg } 30°} =$

$$= \frac{\sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\dfrac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3}}{1 + \dfrac{3}{3}}$$

Scanned by CamScanner

Logo, $tg(60° - 30°) = tg\ 30° = \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

OBSERVAÇÃO Com os resultados dos exemplos 3 e 4 podemos concluir que:

$$tg(\pi/2 - x) = \frac{sen(\pi/2 - x)}{cos\ (\pi/2 - x)} = \frac{cos\ x}{sen\ x}$$

e, portanto, $\boxed{tg(\pi/2 - x) = cotg\ x}$.

Repare que neste caso não se pode usar a fórmula da tangente da diferença pois não existe $tg(\pi/2)$.

EXERCÍCIOS

1. Sabendo que $sen\ x = 3/5$, $0 < x < \pi/2$ e $cos\ y = -5/13$, $\pi < y < 3\pi/2$, calcule $sen(x - y)$.

Solução

Como $sen\ (x - y) = sen\ x \cdot cos\ y - sen\ y \cdot cos\ x$, precisamos inicialmente calcular cos x e sen y. Para isso, temos:

a) $cos^2x = 1 - sen^2x \Rightarrow cos^2x = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow cos\ x = \pm \dfrac{4}{5}$.

Como x é do 1º quadrante $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$, cos x é positivo e, então, $cos\ x = 4/5$.

b) $sen^2y = 1 - cos^2y \Rightarrow sen^2y = 1 - \dfrac{25}{169} =$

$= \dfrac{144}{169} \Rightarrow sen\ y = \pm \dfrac{12}{13}$.

Como y é do 3º quadrante $\left(\pi < y < \dfrac{3\pi}{2}\right)$, sen y é negativo e, então, $sen\ y = -\dfrac{12}{13}$.

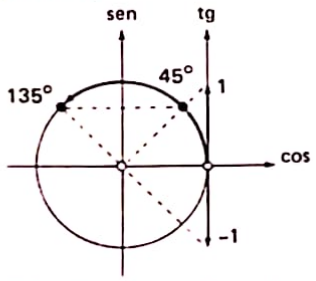
Agora, substituindo os valores dados e os obtidos, na expressão de $sen\ (x - y)$, temos:

$$sen\ (x - y) = \frac{3}{5} \cdot \frac{-5}{13} - \frac{-12}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{33}{65}.$$

2. Sendo $a + b = 135°$ e $tg\ a = 2$, calcule tg b.

Solução

Inicialmente observe, pela figura seguinte, que $tg\ 135° = -1$.



$\Longrightarrow$ $tg\ 135° = -1$

Voltando aos dados do problema, temos $a + b = 135° \Rightarrow$ $\Rightarrow b = 135° - a \Rightarrow tg\ b = tg\ (135° - a)$. Desenvolvendo $tg\ (135° - a)$ pela fórmula de subtração de arcos, temos:

$$tg\ b = \frac{tg\ 135° - tg\ a}{1 + tg\ 135° \cdot tg\ a} = \frac{-1 - 2}{1 + (-1) \cdot 2} =$$

$$= \frac{-3}{1 - 2} = \frac{-3}{-1} \Rightarrow \boxed{tg\ b = 3}.$$

3. Sabendo que $tg\ x = 3$, calcule $cotg(x - 45°)$.

Solução

Vamos começar calculando $tg(x - 45°)$. Sabendo-se que cotangente de um ângulo é o inverso da tangente do mesmo, temos que $cotg(x - 45°) = \dfrac{1}{tg(x - 45°)}$.

Pela fórmula da tangente da diferença, temos:

$$tg(x - 45°) = \frac{tg\ x - tg45°}{1 + tg\ x \cdot tg45°} = \frac{3 - 1}{1 + 3 \cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $cotg(x - 45°) = \dfrac{1}{tg(x - 45°)} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

4. Simplifique: $y = sen(x + 45°) - sen(45° - x)$

Solução

Empregamos as fórmulas do seno da soma e da diferença:

$y = sen\ x \cdot cos\ 45° + sen\ 45° \cdot cos\ x +$
$- (sen\ 45° \cdot cos\ x - sen\ x \cdot cos\ 45°)$

$y = sen\ x \cdot cos\ 45° + sen\ 45° \cdot cos\ x +$
$- sen\ 45° \cdot cos\ x + sen\ x \cdot cos\ 45°$

Cancelando o 2º e o 3º termos e somando o 1º com o último, obtemos: $y = 2 \cdot sen\ x \cdot cos\ 45°$; sendo $cos\ 45° = \sqrt{2}/2$, obtemos: $y = 2 \cdot sen\ x \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{2} \cdot sen\ x}$.

5. Simplifique a expressão:

$$y = cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + sen(\pi - x)$$

Solução

Vamos desenvolver cada uma das duas parcelas do 2º membro:

$cos(3\pi/2 - x) = \underbrace{cos(3\pi/2)} \cdot cos\ x + \underbrace{sen(3\pi/2)} \cdot sen\ x$

$cos(3\pi/2 - x) = \quad 0 \quad \cdot cos\ x + \quad (-1) \quad \cdot sen\ x;$

logo, $\boxed{cos\ (3\pi/2 - x) = -sen\ x}$ (I)

$sen(\pi - x) = \underbrace{sen\ \pi} \cdot cos\ x - sen\ x \cdot \underbrace{cos\ \pi}$

$sen(\pi - x) = \quad 0 \quad \cdot cos\ x - sen\ x \cdot (-1);$

logo, $\boxed{sen(\pi - x) = sen\ x}$ (II).

Substituindo (I) e (II) na expressão dada no enunciado, temos:

$$y = cos(3\pi/2 - x) + sen(\pi - x)$$

$$y = (-sen\ x) + (sen\ x) \Rightarrow \boxed{y = 0}.$$

Duplicação de arcos

Vamos calcular agora o seno, o cosseno e a tangente do arco 2a em função dos valores trigonométricos do arco a; para conseguir isso basta lembrar que $2a = a + a$ e usar as fórmulas de adição de arcos.

Scanned by CamScanner

Seno do arco duplo: como

$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$, então:

$\text{sen } 2a = \text{sen}(a+a) = \text{sen } a \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \cos a$;

e, portanto,

$$\boxed{\text{sen } 2a = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a}$$

Exemplos

1. $\text{sen } 40° = \text{sen}(2\times 20°) = 2 \cdot \text{sen } 20° \cdot \cos 20°$.
2. $\text{sen } 70° = \text{sen}(2\times 35°) = 2 \cdot \text{sen } 35° \cdot \cos 35°$.
3. $\text{sen } 4a = \text{sen}(2\times 2a) = 2 \cdot \text{sen } 2a \cdot \cos 2a$.
4. $\text{sen } x = \text{sen}\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Cosseno do arco duplo: como

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$, então:

$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cdot \cos a - \text{sen } a \cdot \text{sen } a$;

e, portanto,

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a}$$

Exemplos

1. $\cos 40° = \cos(2\times 20°) = \cos^2 20° - \text{sen}^2 20°$.
2. $\cos 100° = \cos(2\times 50°) = \cos^2 50° - \text{sen}^2 50°$.
3. $\cos 4a = \cos(2\times 2a) = \cos^2 2a - \text{sen}^2 2a$.

OBSERVAÇÃO A fórmula do cosseno do arco duplo ($\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$) pode ser escrita de duas outras maneiras; de acordo com o exercício, escolhe-se a maneira mais adequada. Da 1ª relação fundamental, obtemos:

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a & \text{(I)} \\ \cos^2 a = 1 - \text{sen}^2 a & \text{(II)} \end{cases}$$

Na fórmula $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$, substituindo-se (I), temos:

$$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - 1 + \cos^2 a$$

$$\boxed{\cos 2a = 2\cos^2 a - 1}.$$

Igualmente, substituindo (II) na fórmula do cosseno de 2a, temos:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$

$$\cos 2a = 1 - \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 a$$

$$\boxed{\cos 2a = 1 - 2\text{sen}^2 a}$$

Tangente do arco duplo: lembrando que

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}, \quad \text{então:}$$

$$\text{tg } 2a = \text{tg}(a+a) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } a}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } a};$$

portanto:

$$\boxed{\text{tg } 2a = \frac{2\text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}}$$

Exemplos

1. $\text{tg } 4a = \text{tg}(2\times 2a) = \dfrac{2\text{tg } 2a}{1 - \text{tg}^2 2a}$.
2. $\text{tg } 50° = \text{tg}(2\times 25°) = \dfrac{2 \cdot \text{tg } 25°}{1 - \text{tg}^2 25°}$.

EXERCÍCIOS

1. Sendo $\text{sen } x = 3/5$, com $0 < x < \pi/2$, calcule sen 2x e cos 2x.

Solução

Inicialmente calculamos cos x, usando a 1ª relação fundamental: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Como $0 < x < \pi/2$ (1º quadr.), o cosseno é positivo e, por isso, $\boxed{\cos x = 4/5}$.

Agora usamos as fórmulas de duplicação:

$$\begin{cases} \text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}. \\ \cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \\ = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}. \end{cases}$$

2. (FAAP, SP) Calcule sen 2x, se $\text{sen } x = \frac{3}{4}$ e **x** um arco do 2º quadrante.

Solução

Inicialmente $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Como x pertence ao 2º quadrante, cos x é negativo, então,

$$\boxed{\cos x = -\sqrt{7}/4}.$$

Agora,

$$\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

3. Sendo $\cos(x/2) = 1/3$, calcule cos x.

Solução

Fazemos a substituição de x/2 por a:

$$\boxed{\frac{x}{2} = a \Leftrightarrow x = 2a} \Rightarrow \cos(x/2) = 1/3 \Leftrightarrow \cos a = 1/3.$$

Com essa substituição passamos a ter o seguinte problema: dado $\cos a = 1/3$, calcular cos 2a (que é o cos x).

Das fórmulas de duplicação, temos:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2a = 2\cos^2 a - 1;$$

substituindo $\cos a = 1/3$, temos:

$$\cos 2a = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) - 1 =$$

$$= \frac{2}{9} - 1 = \frac{2}{9} - \frac{9}{9} \quad \text{e, portanto, } \cos 2a = -\frac{7}{9}.$$

Como 2a = x, temos, finalmente: $\boxed{\cos x = -\frac{7}{9}}$.

4. Sendo $\text{sen } a + \cos a = \sqrt{5}/2$, calcule o valor de sen 2a.

Solução

Lembrando que $\text{sen } 2a = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a$, precisamos descobrir o valor do produto $2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a$; isto é possível elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade dada:

$$(\text{sen } a + \cos a)^2 = (\sqrt{5}/2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 a + 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a + \cos^2 a = 5/4.$$

Scanned by CamScanner

Como: $\begin{cases} sen^2a + cos^2a = 1 \\ 2 \cdot sen\ a \cdot cos\ a = sen\ 2a \end{cases} \Rightarrow 1 + sen\ 2a = 5/4 \Rightarrow$

$\Rightarrow sen\ 2a = 5/4 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{sen\ 2a = 1/4}$

5. Sendo tg x = 2, calcule tg (x/2).

Solução

Para não trabalhar com o arco metade x/2, fazemos a substituição da variável:

$$\boxed{x/2 = a \Rightarrow x = 2a}$$

Com isso o enunciado do problema passa a ser: sabendo que tg 2a = 2, calcule tg a. Para resolvê-lo usamos a fórmula da tangente do arco duplo:

$$tg\ 2a = \frac{2tg\ a}{1 - tg^2a} \Rightarrow 2 = \frac{2tg\ a}{1 - tg^2a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 2tg^2a = 2tg\ a \Rightarrow 2tg^2a + 2tg\ a - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^2a + tg\ a - 1 = 0$$

Resolvendo a equação de 2º grau que obtivemos, encontramos dois valores possíveis para tg a:

$$\boxed{tg\ a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

Como não se sabe o quadrante ao qual pertence a, ambos os valores são possíveis.

Por fim, substituindo de volta a variável x/2 por a, temos:

$$\boxed{tg(x/2) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

6. Sendo tg x + cotg x = 6, calcule sen 2x.

Solução

Como sen 2x = 2 · sen x · cos x, precisamos calcular o produto 2 · sen x · cos x a partir de tg x e cotg x; lembrando que:

$$\left.\begin{array}{l} tg\ x = \dfrac{sen\ x}{cos\ x} \\ cotg\ x = \dfrac{cos\ x}{sen\ x} \end{array}\right\} \Rightarrow tg\ x + cotg\ x = 6 \Rightarrow \frac{sen\ x}{cos\ x} + \frac{cos\ x}{sen\ x} = 6$$

$$\frac{sen^2x + cos^2x}{sen\ x \cdot cos\ x} = 6 \Rightarrow \frac{1}{sen\ x \cdot cos\ x} = 6$$

Desta última igualdade obtemos: 6 · sen x · cos x = 1; dividindo este resultado por 3, vem 2 · sen x · cos x = = 1/3 e, portanto,

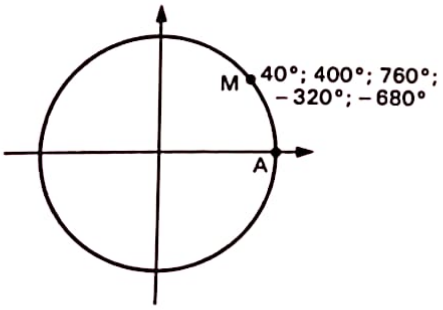
$$\boxed{sen\ 2x = 1/3}$$

Arcos côngruos

Quando definimos arcos trigonométricos, dissemos que eles sempre têm origem no ponto A do ciclo trigonométrico e têm medida positiva ou negativa, dependendo do sentido do percurso ser anti-horário ou horário, respectivamente.

Até agora trabalhamos com arcos trigonométricos com medidas entre 0° e 360° (isto é, na primeira volta positiva do ciclo) ou entre 0° e − 360° (primeira volta negativa). Vamos ampliar o conceito de arco trigonométrico para mais de uma volta (tanto positiva como negativa); acompanhe os exemplos:

1. Os arcos de medidas 40°, 400°, 760°, − 320°, − 680° terminam num mesmo ponto M do ciclo, pois:
400° é uma volta completa (360°) mais 40°;
760° são duas voltas completas (720°) mais 40°;
− 320° é uma volta completa negativa (− 360°) mais 40°;
− 680° são duas voltas completas negativas (− 720°) mais 40°.



$$\begin{array}{rcl} 400° & = & 40° + 360° \\ \Rightarrow\ 760° & = & 40° + 720° \\ -320° & = & 40° - 360° \\ -680° & = & 40° - 720° \end{array}$$

Todos os arcos que têm extremidade final no ponto M têm medidas determinadas pela expressão:

$$\boxed{x = 40° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Verifique que substituindo k por 0, 1, 2, − 1, − 2, ... obtemos 40°, 400°, 760°, − 320°, − 680°, respectivamente, que são as medidas dos arcos que terminam no ponto M.

2. Os arcos de medidas − 50°, 310°, 670°, − 410°, ... têm a mesma extremidade final e podem ser representados pela expressão:

$$\boxed{x = -50° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}}$$

3. Os arcos de medidas π/4, 9π/4, 17π/4, − 7π/4, − 15π/4 têm as extremidades finais coincidentes e podem ser representados pela expressão:

$$\boxed{x = \pi/4 + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Repare que nesta expressão substituindo k por 0, 1, 2, − 1, − 2, obtemos:

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 0 \cdot 2\pi \Rightarrow x = \pi/4$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{9\pi}{4}$

$k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{17\pi}{4}$

$k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - 1 \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{-7\pi}{4}$

$k = -2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - 2 \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{-15\pi}{4}$

Scanned by CamScanner

Todos os arcos trigonométricos com extremidades coincidentes são chamados de arcos côngruos; sendo x_0 a medida de um arco qualquer, todos os arcos côngruos com x_0 são determinados pela expressão:

$$\boxed{x = x_0 + k \cdot 360°} \text{ ou } \boxed{x = x_0 + k \cdot 2\pi}, k \in \mathbb{Z}.$$

EXERCÍCIOS

1. Determine a qual quadrante pertence o arco de medida 2.000°.

Solução

O arco trigonométrico de 2.000° é maior que uma volta, pois é maior que 360°. Inicialmente, vamos determinar quantas "voltas completas cabem dentro dele"; para isso, dividimos 2.000 por 360:

$$\begin{array}{r|l} 2.000° & 360° \\ \cline{2-2} 200° & 5 \end{array}$$

Dessa divisão concluímos que:
$2000° = 5 \times 360° + 200°$

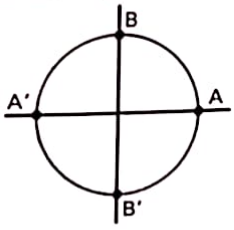
Logo, o arco de 2.000° é formado por 5 voltas completas mais 200°; portanto, percorremos o ciclo trigonométrico a partir do ponto A cinco vezes e ainda temos mais 200°; assim, o arco termina no 3º quadrante, entre os pontos A' e B' (180° e 270°); logo, o arco de 2.000° pertence ao 3º quadrante.

2. Represente no ciclo trigonométrico as extremidades finais dos arcos trigonométricos cujas medidas são representadas pelas seguintes expressões:
a) $x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$;
b) $x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$;
c) $x = \pi/2 + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$.

Solução

a) na expressão $x = k \cdot 2\pi$, substituindo k pelos valores 0, 1, 2, −1, −2, ... obtemos para x os valores 0, 2π, 4π, -2π, -4π, respectivamente. Essas medidas representam voltas completas no ciclo e por isso as extremidades finais desses arcos coincidem com o ponto A (veja a figura no final da resolução).
b) na expressão $x = k \cdot \pi$, substituindo k pelos valores 0, 1, 2, 3, 4, −1, −2, −3, ... obtemos para x os valores 0, π, 2π, 3π, 4π, $-\pi$, -2π, -3π, ... respectivamente. Repare que os arcos de medidas 0, 2π, 4π, -2π, são côngruos e têm extremidades no ponto A; os arcos de medidas π, 3π, $-\pi$, -3π são côngruos e têm extremidades no ponto A' (veja a figura final).
c) na expressão $x = \pi/2 + k \cdot \pi$, substituindo k pelos valores 0, 1, 2, −1, −2, ... obtemos para x os valores $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$, $-\pi/2$, $-3\pi/2$, ... respectivamente. Observe que os arcos de medidas $\pi/2$, $5\pi/2$, $-3\pi/2$ são côngruos e têm extremidade final no ponto B; por outro lado, os arcos de medidas $3\pi/2$, $-\pi/2$ também são côngruos e têm extremidade final no ponto B'.

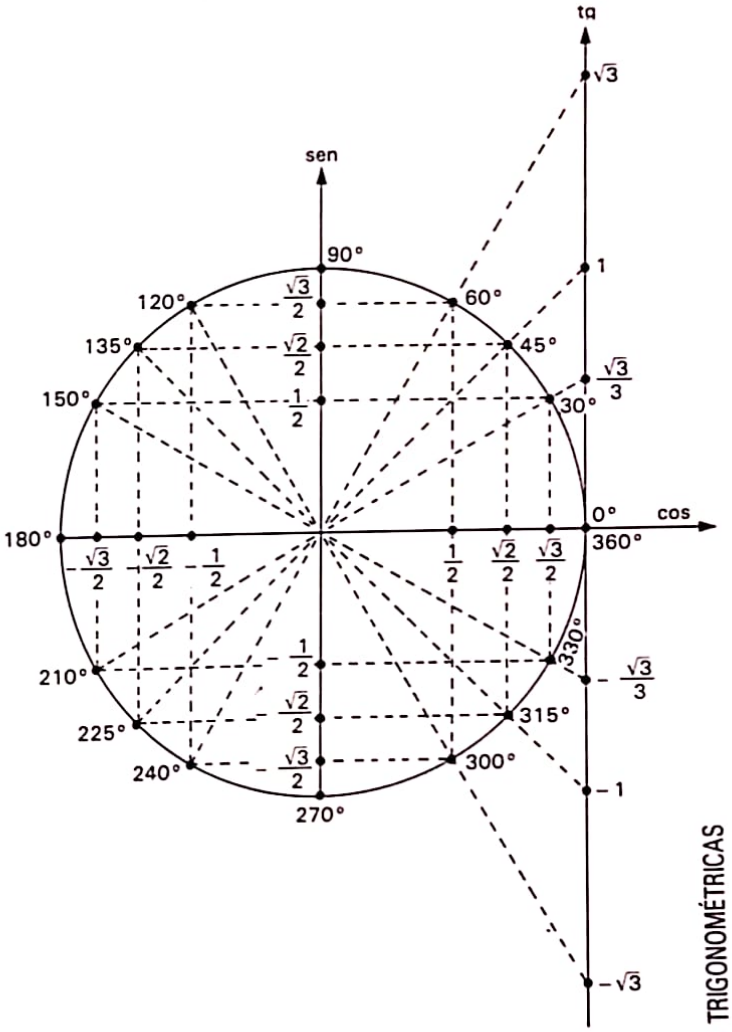
Observe ao lado a figura que representa estes resultados:



EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Este capítulo é um verdadeiro "fechamento" do nosso curso de trigonometria, pois nele utilizamos praticamente todos os conceitos anteriormente vistos. Desses conceitos, os que serão mais sistematicamente usados são:

- arcos côngruos e as expressões que representam suas medidas;
- definições de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico;
- valores notáveis dessas três últimas funções para os arcos de medidas 30° ($\pi/6$), 45° ($\pi/4$), 60° ($\pi/3$) e para os arcos simétricos destes, situados no 2º, 3º e 4º quadrantes, conforme a figura seguinte:



Nela, por exemplo, temos:
1. sen 30° = sen 150° = 1/2.
2. cos 135° = cos 225° = $-\sqrt{2}/2$.
3. tg 120° = tg 300° = $-\sqrt{3}$.

Esta figura serve também para ajudar no cálculo dos valores do seno, do cosseno e da tangente de arcos de medidas

Scanned by CamScanner

maiores que 360° ou de medidas negativas; acompanhe isto através dos próximos exercícios.

EXERCÍCIOS

1. Calcule seno, cosseno e tangente do arco de medida 1920°.

Solução

Inicialmente vamos determinar qual a medida do arco côngruo com 1920°, situado entre 0° e 360°; para conseguir isto, eliminamos as voltas completas contidas em 1920°, dividindo 1920° por 360°;

$$\begin{array}{l|l} 1920° & 360° \\ \hline 120° & 5 \text{ voltas} \end{array}$$

Portanto, 1920° é um arco trigonométrico formado por 5 voltas completas e mais 120° e, portanto, ele é côngruo com 120°; olhando na figura dos valores notáveis, temos:

$\text{sen } 1920° = \text{sen } 120° = \sqrt{3}/2$

$\cos 1920° = \cos 120° = -1/2$

$\text{tg } 1920° = \text{tg } 120° = -\sqrt{3}$

2. Calcule seno, cosseno e tangente do arco de medida −1485°.

Solução

Como no exercício anterior, determinamos o côngruo com −1485° eliminando primeiramente as voltas completas contidas nele; para isto, dividimos 1485° por 360°:

$$\begin{array}{l|l} 1485° & 360° \\ \hline 45° & 4 \text{ voltas} \end{array}$$

Concluindo, o arco de −1485° é formado por 4 voltas completas no sentido negativo e mais 45° também no sentido negativo; logo, −1485° é côngruo com −45°

No ciclo trigonométrico, −45° é côngruo com 315° e, portanto, −1485° também é côngruo com 315°.

Agora, olhando a figura dos valores notáveis, temos:

$\text{sen}(-1485°) = \text{sen } 315° = -\sqrt{2}/2$

$\cos(-1485°) = \text{sen } 315° = \sqrt{2}/2$

$\text{tg}(-1485°) = \text{tg } 315° = -1$

3. Calcule seno, cosseno e tangente de $67\pi/6$.

Solução

Inicialmente, convertemos radianos em graus, para recair nos casos anteriores; fazemos a regra de três:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \text{ rad} \longrightarrow 180° \\ \dfrac{67\pi}{6} \text{ rad} \longrightarrow x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\frac{67\pi}{6} \times 180°}{\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{67\pi \times 30°}{\pi} = 2010° \Rightarrow \boxed{x = 2010°}.$$

Agora, como antes, eliminamos as voltas e procuramos o côngruo a 2010° situado entre 0° e 360°:

$$\begin{array}{l|l} 2010° & 360° \\ \hline 210° & 5 \text{ voltas} \end{array}$$

Portanto, 2010° é côngruo com 210°; analisando a figura dos valores notáveis, concluímos que:

$\text{sen } 2010° = \text{sen } 210° = -1/2$

$\cos 2010° = \cos 210° = -\sqrt{3}/2$

$\text{tg } 2010° = \text{tg } 210° = \sqrt{3}/3.$

Faremos agora o estudo das equações trigonométricas, baseado na resolução das equações fundamentais do tipo sen x = n, cos x = n e tg x = n, onde n é um número real.

Equação sen x = n: essa equação só é possível se n pertencer ao intervalo [−1; 1], pois, pela definição do seno no ciclo trigonométrico, percebemos que $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$.

Exemplos

1. sen x = 1. Olhando para a figura dos valores notáveis, vemos que sen x = 1 quando x = 90° ou qualquer outro côngruo com 90°.

A expressão que representa os côngruos com 90° é 90° + k · 360°, k ∈ ℤ; portanto, temos que:

$\text{sen } x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 90° + k \cdot 360°}$

ou $\boxed{x = \pi/2 + k \cdot 2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. sen x = −1. Olhando para a figura dos valores notáveis vemos que sen x = −1 quando x = 270° ou qualquer outro côngruo com 270°. Portanto:

$\text{sen } x = -1 \Rightarrow \boxed{x = 270° + k \cdot 360°}$

ou $\boxed{x = 3\pi/2 + k \cdot 2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

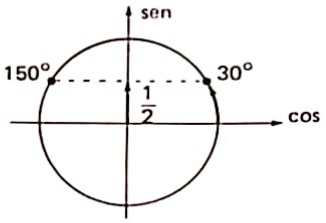
3. sen x = 0. Neste caso, olhando para a figura dos valores notáveis, percebemos que temos duas opções: x = 0° ou x = 180° (e também qualquer outro que seja côngruo com um destes dois).

Vimos anteriormente que os arcos cujas extremidades são os pontos A (côngruos com 0°) ou A' (côngruos com 180°) têm medidas determinadas pela expressão k · 180°, k ∈ ℤ; portanto, podemos escrever que:

$\text{sen } x = 0 \Rightarrow \boxed{x = k \cdot 180°}$

ou $\boxed{x = k \cdot \pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. sen x = 1/2. Marcamos 1/2 no eixo dos senos; observando a figura dos valores notáveis, temos:



Portanto, sen x = 1/2 se x for 30° ou se x for 150° ou qualquer outro côngruo com um destes dois; logo, temos: sen x = 1/2 ⇒

$\Rightarrow \boxed{x = 30° + k \cdot 360° \text{ ou } x = 150° + k \cdot 360°}$, $k \in \mathbb{Z}$

Equação cos x = n: como na equação sen x = n, esta equação também só é possível se $-1 \leqslant n \leqslant 1$.

Scanned by CamScanner

Exemplos

1. $\cos x = 1$. Olhando para a figura dos valores notáveis, percebemos que esta equação é verdadeira se x for zero ou qualquer outro côngruo com zero, isto é:

$\cos x = 0 \Rightarrow x = 0° + k \cdot 360° \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x = k \cdot 360°}$ ou $\boxed{x = k \cdot 2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\cos x = -1$. Neste caso, x deve ser igual a 180° ou qualquer outro côngruo com ele, portanto:

$\cos x = -1 \Rightarrow \boxed{x = 180° + k \cdot 360°}$

ou $\boxed{x = \pi + k \cdot 2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $\cos x = \sqrt{2}/2$. Pela figura dos valores notáveis percebemos que $\cos x = \sqrt{2}/2$ se $x = 45°$ ou se $x = -45°$ (315°), ou qualquer outro côngruo com um destes dois; logo, temos: $\cos x = \sqrt{2}/2 \Rightarrow x = 45° + k \cdot 360°$ ou $x = -45° + k \cdot 360°$. Escrevendo as duas expressões de uma só vez, temos:

$$\boxed{x = \pm 45° + k \cdot 360°}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Equação tg x = n: essa equação, ao contrário das duas anteriores, é possível para qualquer n real.

Exemplos

1. $\operatorname{tg} x = 0$. Pela definição de tangente no ciclo trigonométrico e analisando a figura dos valores notáveis, percebemos que $\operatorname{tg} x = 0$ se $x = 0°$ ou se $x = 180°$, ou qualquer outro côngruo com um destes dois, portanto:

$\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \boxed{x = k \cdot 180°}$ ou $\boxed{x = k \cdot \pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Observe que a solução desta equação é a mesma que da equação $\operatorname{sen} x = 0$; isto é lógico; pois:

$$\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0.$$

2. $\operatorname{tg} x = 1$. Analisando a figura dos valores notáveis vemos que $\operatorname{tg} x = 1$ só ocorre se x for 45° ou se x for 225°, ou qualquer outro côngruo com um destes dois, portanto: $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x = 45° + k \cdot 360°}$ ou $\boxed{x = 225° + k \cdot 360°}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Observe que os arcos côngruos com 45° ou com 225° podem ser representados, simultaneamente, pela expressão:

$$\boxed{x = 45° + k \cdot 180°}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Esta "aglutinação" de duas famílias de arcos côngruos é sempre possível quando os pontos da figura de valores notáveis que resolvem a equação forem extremidades de um mesmo diâmetro; observe que $225° - 45° = 180°$.

EXERCÍCIOS

1. Resolver a equação $\cos 3x = 1/2$.

Solução

Pela figura dos valores notáveis percebemos que 1/2 é o cosseno de 60° ou de −60° (300°). Como a nossa equação é $\cos 3x = 1/2$, concluímos que 3x deve ser côngruo com 60° ou com −60°, portanto:

$$3x = \pm 60° + k \cdot 360°.$$

Dividindo a equação por 3, temos:

$$\boxed{x = \pm 20° + k \cdot 120°}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

2. Resolver a equação $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$.

Solução

Começamos resolvendo a equação de 2º grau na incógnita tg x; colocamos tg x em evidência:

$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x + 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \quad \text{ou} \\ \operatorname{tg} x = -1. \end{cases}$$

Temos agora duas equações fundamentais em tg x:

$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z} \text{ (conforme o 1º exemplo da equação fundamental } \operatorname{tg} x = n) \\ \operatorname{tg} x = -1; \text{ pela figura dos valores notáveis percebemos que} \end{cases}$

$\operatorname{tg} x = -1$ se x for −45° (315°) ou 135° ou qualquer outro côngruo com um destes dois. Estas duas famílias de arcos côngruos podem ser escritas como:

$$\boxed{x = -45° + k \cdot 180°}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, a solução da equação dada é:

$$\boxed{x = k \cdot 180° \text{ ou } x = -45° + k \cdot 180°}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

3. Resolver a equação $\operatorname{sen} x = \sqrt{3} \cdot \cos x$.

Solução

Dividimos a equação dada por cos x (ou, "passamos cos x para o outro lado, dividindo"):

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{3} \cdot \cos x \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

Agora resolvemos esta equação fundamental em tangente; pela análise da figura dos valores notáveis, concluímos que:

$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60°$ ou $x = 240°$ ou x é côngruo com qualquer um destes dois; portanto, temos:

$\boxed{x = 60° + k \cdot 360°}$ ou $\boxed{x = 240° + k \cdot 360°}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Novamente, estas duas famílias de côngruos podem ser escritas numa única expressão (repare que 60° e 240° são, no ciclo, extremos de um mesmo diâmetro):

$$\boxed{x = 60° + k \cdot 180°}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

4. Resolver a equação $\operatorname{sen} x + \cos x = \pm\sqrt{2}$

Solução

Um possível caminho de resolução é construir um sistema de equações com a equação dada e a 1ª equação fundamental ($\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$). Resolve-se o sistema, calcula-se o valor de sen x e, por fim, calcula-se x usando a equação fundamental $\operatorname{sen} x = n$.

Um caminho mais "elegante" seria elevar ambos os membros da igualdade do enunciado ao quadrado:

$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = (\pm\sqrt{2})^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x = 2;$

como: $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ (1ª relação fundamental)} \\ 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen} 2x \text{ (seno do arco duplo)} \end{cases}$

temos: $1 + \operatorname{sen} 2x = 2 \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} 2x = 1}$

Pela definição do seno sabemos que 1 é o seno de 90° ou dos côngruos com 90°; como nossa equação é $\operatorname{sen} 2x = 1$, concluímos que 2x é 90° ou côngruo com 90°, isto é, $2x = 90° + k \cdot 360° \Rightarrow$ $\boxed{x = 45° + k \cdot 180°}$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Resolver a equação $\cos 2x + \operatorname{sen}^2 x = 0$, no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Solução

Lembrando a expressão do cosseno do arco duplo, temos: $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$; substituindo esta relação na equação do enunciado, temos:

Scanned by CamScanner

$\cos 2x - \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos^2 x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\cos x = 0}$$

Essa última igualdade só é verdadeira se x for 90° ou 270° (vide a definição de cosseno no ciclo); como, pelo enunciado, x deve pertencer à 1ª volta positiva do ciclo ($0 \leqslant x \leqslant 2\pi$), conclui-se que os côngruos com 90° ou com 270°, neste problema, não nos interessam.

Logo, a solução do problema é, apenas,

$$x = 90° \text{ ou } x = 270°$$

Convertendo estes dois valores para radianos, temos: $x = \pi/2$ ou $x = 3\pi/2$; logo, $\boxed{S = \{\pi/2; 3\pi/2\}}$

6. Calcule o número de raízes da equação:
$\text{sen } 5x \cdot \cos 3x - \text{sen } 3x \cdot \cos 5x = 1$, no intervalo $[0; 4\pi]$.

Solução

Repare que a equação dada é do tipo:
$\text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$, que é igual a $\text{sen}(a - b)$;
logo, $\text{sen } 5x \cdot \cos 3x - \text{sen } 3x \cdot \cos 5x = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{sen}(5x - 3x) = 1 \Rightarrow \boxed{\text{sen } 2x = 1}$$

Esta equação é verdadeira se 2x for 90° ou se 2x for côngruo com 90°, isto é,

$$2x = 90° + k \cdot 360° \Rightarrow \boxed{x = 45° + k \cdot 180°}, k \in \mathbb{Z}.$$

Como x deve pertencer ao intervalo das duas primeiras voltas positivas do ciclo ($0 \leqslant x \leqslant 4\pi$), temos: $0 \leqslant x \leqslant 4\pi \Rightarrow 0° \leqslant 45° + k \cdot 180° \leqslant 720°$.

Essa dupla desigualdade pode ser escrita como:

$$\begin{cases} 0° \leqslant 45° + k \cdot 180° \Rightarrow -45° \leqslant k \cdot 180° \Rightarrow \dfrac{-45}{180} \leqslant k \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{k \geqslant -\dfrac{1}{4}} \\ 45° + k \cdot 180° \leqslant 720° \Rightarrow k \cdot 180° \leqslant 675° \Rightarrow \\ \Rightarrow k \leqslant \dfrac{675}{180} \Rightarrow \boxed{k \leqslant \dfrac{15}{4}} \end{cases}$$

Portanto, conclui-se que $-\dfrac{1}{4} \leqslant k \leqslant \dfrac{15}{4} \Rightarrow -0{,}25 \leqslant k \leqslant 3{,}75 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3$, pois k é um número inteiro.

Temos, portanto, quatro valores possíveis para k; como cada valor de k nos dá um valor de x, conclui-se que existem 4 valores de x que satisfazem o enunciado; logo, a resposta é: 4 valores.

7. Resolver as equações:
a) $\cos x = \cos 60°$
b) $\cos x = \cos (\pi/5)$
c) $\cos 2x = \cos (\pi + x)$

Solução

a) Atenção: $\cos x = \cos 60°$ não implica que $x = 60°$. Repare que a equação $\cos x = \cos 60°$ é equivalente a $\cos x = 1/2$, pois $\cos 60° = 1/2$.

Vamos portanto resolver a equação $\cos x = 1/2$. Recorrendo à figura dos valores notáveis, concluímos que 1/2 é o cosseno de 60° ou de −60° (−60° é côngruo com 300°) e, portanto, x é igual a 60°, −60° ou qualquer outro côngruo com um destes dois.

Portanto, podemos escrever que $\boxed{x = \pm 60° + k \cdot 360°}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) $\cos x = \cos (\pi/5)$

Analogamente ao anterior, teremos que x é igual a $\pm\dfrac{\pi}{5}$ ou a qualquer outro côngruo com um destes dois; portanto,

$$\boxed{x = \pm\frac{\pi}{5} + k \cdot 2\pi}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

c) $\cos 2x = \cos (\pi + x)$

Para que a igualdade se verifique, 2x deve ser igual a $\pi + x$ ou igual ao seu simétrico $-(\pi + x)$ ou côngruo com qualquer um destes dois; devido a isto é que podemos escrever que:

$2x = \pi + x + k \cdot 2\pi \Rightarrow 2x - x = \pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x = \pi + k \cdot 2\pi}$ ($k \in \mathbb{Z}$) ou

$2x = -(\pi + x) + k \cdot 2\pi \Rightarrow 2x = -\pi - x + k \cdot 2\pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3x = -\pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}} \ k \in \mathbb{Z}.$$

8. Este exercício consta de duas partes:
a) demonstre que $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cdot \cos x$
b) resolver a equação: $4 \cos^3 x - 3 \cos x = \cos (\pi/5)$

Solução

Para demonstrar a fórmula de cos 3x lembremos que $3x = 2x + x$ e, portanto, temos que: $\cos 3x = \cos (2x + x)$; agora aplicamos a fórmula do cosseno da soma de dois arcos, obtendo:

$\cos 3x = \cos 2x \cdot \cos x - \text{sen } 2x \cdot \text{sen } x$ (I)

Lembremos agora as fórmulas de duplicação: $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ e $\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$; com estes resultados, voltamos à equação (I):

$\cos 3x = (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \cdot \cos x - 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x \cdot \text{sen } x$

$\cos 3x = \cos^3 x - \text{sen}^2 x \cdot \cos x - 2 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos x$

$\cos 3x = \cos^3 x - 3\text{sen}^2 x \cdot \cos x$

Usando agora a 1ª relação fundamental, concluímos que: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$; substituímos este último resultado na expressão do cos 3x:

$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \cos x \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x \Rightarrow$

$$\boxed{\cos 3x = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x}$$

b) resolver a equação: $4 \cos^3 x - 3 \cdot \cos x = \cos (\pi/5)$

Solução

Utilizando o resultado demonstrado na parte a do exercício, temos que: $4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x = \cos 3x$ e, portanto, a equação dada no enunciado passa a ser:

$$\cos 3x = \cos (\pi/5).$$

Como já vimos no exercício anterior, temos duas possibilidades a serem consideradas:

$$3x = \frac{\pi}{5} + k \cdot 2\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{15} + k \cdot \frac{2\pi}{3}}, k \in \mathbb{Z}.$$

ou

$$3x = -\frac{\pi}{5} + k \cdot 2\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{-\pi}{15} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}}, k \in \mathbb{Z}.$$

Scanned by CamScanner

ÁLGEBRA

FUNÇÃO EXPONENCIAL

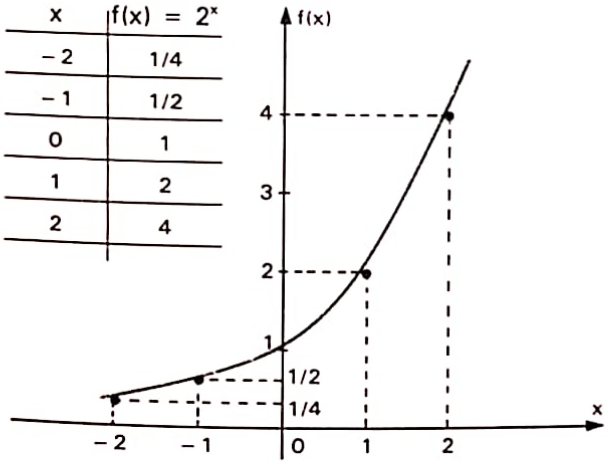
Sendo a um número real, positivo e diferente de 1 ($a > 0$ e $a \neq 1$), chama-se função exponencial de base a a função $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número real x o número a^x.

$$\boxed{f(x) = a^x,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1}$$

Exemplos

1. A função exponencial de base 2 é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número $f(x) = 2^x$. Em seguida está desenhado o gráfico dessa função.

x	$f(x) = 2^x$
−2	1/4
−1	1/2
0	1
1	2
2	4



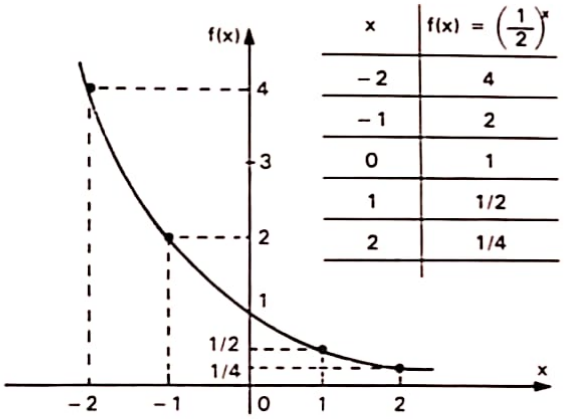
A curva obtida chama-se curva exponencial. Observe a partir do gráfico, que:

- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (isto é: 2^x é sempre um número positivo para qualquer valor real de x);
- $f(x) = 2^x$ é uma função crescente.

2. A função exponencial de base $\frac{1}{2}$ é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Eis o gráfico:

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
−2	4
−1	2
0	1
1	1/2
2	1/4

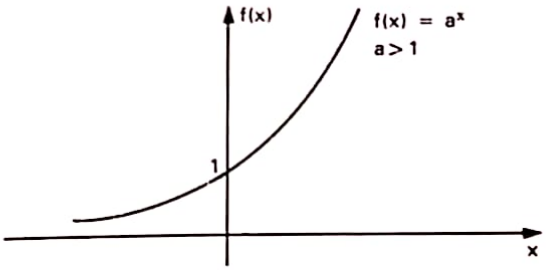


Observe que:

- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (isto é: $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ é um número positivo para qualquer valor real de x);
- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é uma função decrescente.

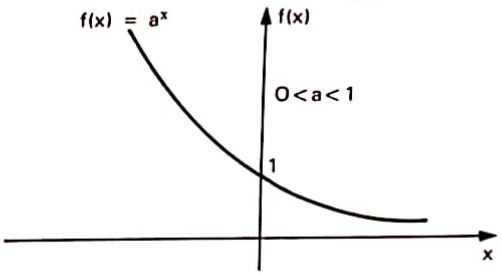
Generalizando temos:

- Se $a > 1$, então $f(x) = a^x$ é crescente, e o gráfico será do tipo:



- Se $0 < a < 1$, então a função $f(x) = a^x$ é decrescente, e o gráfico será do tipo:

Scanned by CamScanner



Domínio e imagem

O domínio da função $f(x) = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ é o conjunto dos números reais.

A imagem da função $f(x) = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ é o conjunto dos números reais positivos.

Equações exponenciais

São as equações onde a incógnita aparece como expoente de uma ou mais potências de base conhecida. Exemplos: $3^x = 9$, $2^{2x} = 4$, etc. Fundamentalmente, uma equação exponencial deverá ser tratada de modo a recair em equações do tipo $a^x = a^y$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, donde se conclui que $x = y$. Por exemplo, da igualdade $2^x = 2^4$ conclui-se que $x = 4$. Tente sempre comparar duas potências de mesma base; quando isto não for possível, aplique os logaritmos (como será visto mais adiante). Acompanhe atentamente os exercícios para poder fixar bem como resolver uma equação exponencial.

EXERCÍCIOS

1. Resolver a equação $2^x = 16$.

Solução

Basta escrever 16 como potência de base 2, obtendo $2^x = 2^4$ e, portanto, $x = 4$. O conjunto solução da equação é $S = \{4\}$.

2. Resolver a equação $3^{2x-4} = 9$.

Solução

$3^{2x-4} = 9 \Rightarrow 3^{2x-4} = 3^2 \Rightarrow 2x - 4 = 2 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

$S = \{3\}$.

3. Resolver a equação $9^{3x} = 27^{x-1}$.

Solução

Como $9 = 3^2$ e $27 = 3^3$, obtemos $9^{3x} = (3^2)^{3x} = 3^{6x}$ e $27^{x-1} = (3^3)^{x-1} = 3^{3x-3}$. Portanto nossa equação ficará assim:

$9^{3x} = 27^{x-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{6x} = 3^{3x-3} \Rightarrow 6x = 3x - 3 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

$S = \{-1\}$.

4. Resolver a equação $3^x = 1$.

Solução

Escrevendo $1 = 3^0$, vem: $3^x = 3^0$ e, portanto, $\boxed{x = 0}$

$S = \{0\}$.

5. Resolver a equação $4^{2x-2} \cdot 8^{x^2} = 1$.

Solução

Vamos escrever 4, 8 e 1 como potências de base 2. $4^{2x-2} \cdot 8^{x^2} = 1 \Rightarrow 2^{2(2x-2)} \cdot (2^3)^{x^2} = 2^0 \Rightarrow 2^{2(2x-2)+3x^2} = 2^0 \Rightarrow 4x - 4 + 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0$. Resolvendo esta equação do 2º grau, obteremos $\boxed{x = -2}$ ou $\boxed{x = \frac{2}{3}}$.

$S = \left\{-2; \frac{2}{3}\right\}$.

6. Resolver a equação $3^{x+1} + 3^x - 3^{x+2} = -5$.

Solução

Observe que este tipo de equação é diferente de todas as anteriores. Para facilitar a resolução vamos colocar $3^x = y$. Com isso teremos:

$$\begin{cases} 3^{x+1} = 3^x \cdot 3^1 = y \cdot 3 = 3y \\ 3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = y \cdot 9 = 9y \end{cases}$$

Com esta substituição nossa equação ficará:

$3^{x+1} + 3^x - 3^{x+2} = -5$

$3y + y - 9y = -5 \Rightarrow -5y = -5 \Rightarrow y = 1$.

Como $y = 3^x$, obteremos $3^x = 1$ e conseqüentemente $\boxed{x = 0}$ (como já foi resolvido anteriormente).

$S = \{0\}$.

7. Resolver a equação $4^x - 20 \cdot 2^x + 64 = 0$.

Solução

Se fizermos $2^x = y$, obteremos $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = y^2$ e nossa equação transforma-se na equação do 2º grau $y^2 - 20y + 64 = 0$. Resolvendo essa equação do 2º grau em y, teremos como raízes $y = 4$ ou $y = 16$ e, como $2^x = y$, vem:

$2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2$

$\boxed{x = 2}$

ou

$2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4$

$\boxed{x = 4}$

$S = \{2; 4\}$.

8. Resolver a equação $2^x = \frac{1}{2}$

Solução

Lembrando que $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, nossa equação poderá ser assim escrita: $2^x = 2^{-1}$ e,

portanto, $\boxed{x = -1}$.

$S = \{-1\}$.

9. Resolver a equação $3 \cdot 2^{x+3} = 192 \cdot 3^{x-3}$

Scanned by CamScanner

Solução

$$3 \cdot 2^x \cdot 2^3 = 192 \cdot 3^x \cdot 3^{-3}$$
$$24 \cdot 2^x = 192 \cdot 3^x \cdot 3^{-3}$$
$$2^x = 8 \cdot 3^x \cdot 3^{-3}$$
$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{2^3}{3^3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$
$$\boxed{x = 3} \qquad S = \{3\}.$$

10. Resolver a equação $\dfrac{2^{x+3} \cdot 4^x}{64^{5x-3}} = \dfrac{16^{2x}}{128^{1-x}}$

Solução

Escrevendo todos os termos como uma potência de base 2, vamos obter:

$$\frac{2^{x+3} \cdot 2^{2x}}{(2^6)^{5x-3}} = \frac{(2^4)^{2x}}{(2^7)^{(1-x)}}$$
$$2^{x+3} \cdot 2^{2x} \cdot 2^{7-7x} = 2^{8x} \cdot 2^{30x-18}$$
$$2^{x+3+2x+7-7x} = 2^{8x+30x-18}$$
$$2^{-4x+10} = 2^{38x-18}$$
$$-4x + 10 = 38x - 18$$
$$-4x - 38x = -18 - 10 \cdot (-1)$$
$$42x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{42}$$
$$\boxed{x = \frac{2}{3}} \qquad S = \left\{\frac{2}{3}\right\}.$$

Inequações exponenciais

São as inequações onde a incógnita aparece no expoente. Para resolvê-las, se pudermos igualar as bases, teremos (baseados no gráfico da função exponencial):

- se $a > 1$, então $\begin{cases} a^x \geqslant a^y \Rightarrow x \geqslant y \\ a^x \leqslant a^y \Rightarrow x \leqslant y \end{cases}$
- se $0 < a < 1$, então $\begin{cases} a^x \geqslant a^y \Rightarrow x \leqslant y \\ a^x \leqslant a^y \Rightarrow x \geqslant y \end{cases}$

Exemplos

1. A inequação $2^x \geqslant 2^4$ nos dá $x \geqslant 4$ (pois $2 > 1$);

2. A inequação $2^x \leqslant 2^4$ nos dá $x \leqslant 4$ (pois $2 > 1$);

3. A inequação $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^2$ nos dá $x \leqslant 2$ $\left(\text{pois } 0 < \frac{1}{3} < 1\right)$;

4. A inequação $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^2$ nos dá $x \geqslant 2$ $\left(\text{pois } 0 < \frac{1}{3} < 1\right)$.

OBSERVAÇÃO Note que, quando a base for um número maior que 1, o sentido da desigualdade se conserva (exemplos 1 e 2). Quando a base for um número positivo e menor que um, o sentido da desigualdade fica invertido (exemplos 3 e 4).

EXERCÍCIOS

1. Resolver as inequações:

a) $3^x > 1$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$

c) $2^{4x-1} \leqslant 2^{3x}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$

Solução

a) $3^x > 1 \Rightarrow 3^x > 3^0 \Rightarrow x > 0$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Rightarrow x < 0$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

c) $2^{4x-1} \leqslant 2^{3x} \Rightarrow 4x - 1 \leqslant 3x \Rightarrow x \leqslant 1$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \Rightarrow 4x - 1 \geqslant 3x \Rightarrow x \geqslant 1$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$.

2. Resolver a inequação $3^{2x^2-1} \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Solução

Como $\frac{1}{3} = 3^{-1}$, obtemos $\left(\frac{1}{3}\right)^x = (3^{-1})^x = 3^{-x}$ e, então, a inequação $3^{2x^2-1} \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^x$ é reescrita como $3^{2x^2-1} \geqslant 3^{-x}$.

Agora lembrando que a base das potências é maior que 1, obtemos: $2x^2 - 1 \geqslant -x$ e, portanto, $2x^2 + x - 1 \geqslant 0$. Esta inequação do 2º grau obtida nós já sabemos como resolver e portanto o conjunto solução será:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

3. Resolver a inequação $9^x < 3^{x+1}$

Solução

Como $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$, obtemos $3^{2x} < 3^{x+1}$ e, portanto, $2x < x+1$, donde $x < 1$. Logo:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.

4. Resolver a inequação $3^{x-4} \cdot 3^{(x-1)^2} > 27$

Solução

$3^{x-4+x^2-2x+1} > 3^3$

$x^2 - x - 3 > 3 \Rightarrow x^2 - x - 6 > 0$

Resolvendo a inequação do 2º grau, obtemos:

$x < -2$ ou $x > 3$. O conjunto solução será:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\}$.

5. Resolver a inequação $\left(\frac{3}{2}\right)^{-x+2} > \left(\frac{2}{3}\right)^{1-2x}$

Solução

Invertemos a base no primeiro membro, trocando o sinal no expoente.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} > \left(\frac{2}{3}\right)^{1-2x} \Rightarrow x - 2 < 1 - 2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x < 3 \Rightarrow x < 1$$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.

Scanned by CamScanner

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Como você deve ter notado, em todas as equações e inequações exponenciais que resolvemos até agora, nós conseguimos comparar duas potências de mesma base. Esta situação, porém, pode não ocorrer; uma equação como $2^x = 5$, por exemplo, não se enquadra no estudo feito anteriormente. Entretanto, é possível demonstrar (não com facilidade) que a equação $2^x = 5$, por exemplo, admite uma única solução. O número x, solução dessa equação, leva o nome de logaritmo de 5 na base 2, que se abrevia por $\log_2 5$; tal número é irracional e vale, aproximadamente, 2,321928. Estamos dizendo, portanto, que $2^{2,321928} \cong 5$.

Logaritmo

Sendo a um número real, positivo e diferente de um, e b um número real positivo, chama-se logaritmo de b na base a o número ao qual devemos elevar a base a para se obter b.

Chamando-se de x o logaritmo de b na base a, resumimos a definição da seguinte maneira:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, \text{ com } a > 0,\ a \neq 1 \text{ e } b > 0$$

Exemplos

1. $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$;
2. $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$;
3. $\log_7 1/7 = -1$, pois $7^{-1} = \frac{1}{7}$;
4. $\log_{1/7} 7 = -1$, pois $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} = 7$;
5. $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, pois $2^{1/2} = \sqrt{2}$;
6. $\log_3 1 = 0$, pois $3^0 = 1$.

Nomenclatura

Ao escrever $\log_a b = x$, o número:

x é o logaritmo de b,
a é a base,
b é o logaritmando.

Costuma-se, também, dizer que b é o antilogaritmo de x na base a. Escreve-se $b = \text{antilog}_a x$.

Condições de existência

A definição do logaritmo de b na base a, apresenta certas condições de existência que são:

- a base a deve ser positiva e diferente de um:

$$a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

- o logaritmando b deve ser positivo:

$$b > 0$$

Estas duas condições são necessárias e suficientes para garantir a existência e a unicidade de $\log_a b$. Guarde-as bem, pois elas serão muito utilizadas nos exercícios envolvendo logaritmos.

Tipos de logaritmos

- **logaritmos decimais:** os logaritmos de base 10 chamam-se logaritmos decimais. No caso dos logaritmos decimais, costuma-se omitir a base escrevendo-se apenas log b. Lembre-se, então, de que $\log b = \log_{10} b$.

- **logaritmos naturais ou neperianos:** assim como o número irracional π ($\cong 3,1415926$) aparece em problemas envolvendo circunferências, há um outro número irracional, representado por e, que aparece naturalmente em problemas de matemática superior, envolvendo logaritmos e exponenciais. O número e vale, aproximadamente, 2,718.

Os logaritmos que têm o número e como base chamam-se logaritmos neperianos ou naturais, em homenagem a Napier (leia: Néper), matemático escocês considerado o pai dos logaritmos. Os logaritmos neperianos (isto é, de base e) são indicados por $\ln$. Assim $\ln x = \log_e x$.

EXERCÍCIOS

1. Determine x em cada uma das igualdades seguintes:

a) $\log_2 x = 3$;
b) $\log_3(x-1) = -2$;
c) $\log_4 64 = x$;
d) $\log_x 4 = 2$.

Solução

Vamos aplicar a definição de logaritmo, levando sempre em consideração as condições de existência.

a) $\log_2 x = 3 \Rightarrow 2^3 = x \Rightarrow \boxed{x = 8}$

b) $\log_3(x-1) = -2 \Rightarrow 3^{-2} = x - 1 \Rightarrow \frac{1}{9} = x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1}{9} + 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{10}{9}}$

c) $\log_4 64 = x \Rightarrow 4^x = 64 \Rightarrow 4^x = 4^3 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

d) $\log_x 4 = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = 2}$ ($x = -2$ não convém, pois x é base e, portanto, deve ser positiva e diferente de um).

2. Determine x em cada uma das igualdades seguintes:

a) $\log_4(3x-1) = 1$;
b) $\log_3(x^2-1) = 0$;
c) $\log_{(x-1)} 4 = 2$;
d) $\log_{\sqrt{5}} 25 = x$.

Solução

a) $\log_4(3x-1) = 1 \Rightarrow 4^1 = 3x - 1 \Rightarrow 5 = 3x \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{3}}$

b) $\log_3(x^2-1) = 0 \Rightarrow 3^0 = x^2 - 1 \Rightarrow 1 = x^2 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{2}}$

Scanned by CamScanner

c) $\log_{(x-1)}4 = 2 \Rightarrow (x-1)^2 = 4$
$x - 1 = 2$ ou $x - 1 = -2$, portanto teremos $x = 3$ ou $x = -1$. Note que $x = -1$, não satisfaz as condições de existência, logo a resposta é $\boxed{x = 3}$

d) $\log_{\sqrt{5}}25 = x \Rightarrow (\sqrt{5})^x = 25 \Rightarrow (5^{1/2})^x = 5^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5^{x/2} = 5^2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

Conseqüências da definição de logaritmo

A partir da definição de logaritmo, podemos tirar as seguintes propriedades imediatas (sendo $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$):

- $\boxed{\log_a 1 = 0}$ pois $a^0 = 1$

Exemplo
$\log_3 1 = 0$ pois $3^0 = 1$

- $\boxed{\log_a a = 1}$ pois $a^1 = a$

Exemplo
$\log_2 2 = 1$ pois $2^1 = 2$

- $\boxed{\log_a a^\alpha = \alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Exemplo
$\log_2 2^3 = 3$

- $\boxed{a^{\log_a b} = b}$

Esta última propriedade pode ser assim explicada: fazendo $\log_a b = x$, obtemos $a^x = b$, pela definição de logaritmo; substituindo $x = \log_a b$ na última igualdade, vem: $a^{\log_a b} = b$.

Exemplo
$2^{\log_2 8} = 8$ (note que: $\log_2 8 = 3$ e, então, $2^{\log_2 8} = 2^3 = 8$).

EXERCÍCIO

Calcular:

a) $\log_5\sqrt{5}$
b) $\log_9 3^6$
c) $\log_6 1 + \log_6 6$
d) $3^{\log_3 2}$
e) $5^{2\log_5 4}$

Solução

a) $\log_5\sqrt{5} = \log_5 5^{1/2} = 1/2$
b) $\log_9 3^6 = \log_9(3^2)^3 = \log_9 9^3 = 3$
c) $\begin{cases}\log_6 1 = 0 \\ \log_6 6 = 1\end{cases} \Rightarrow \log_6 1 + \log_6 6 = 0 + 1 = 1$
d) $3^{\log_3 2} = 2$ (aplicação direta da quarta propriedade)
e) $5^{2\log_5 4} = (5^{\log_5 4})^2 = 4^2 = 16$

Propriedades operatórias dos logaritmos

As propriedades que iremos estudar a seguir justificam o largo uso dos logaritmos no passado, para efeito de simplificação de operações de cálculos.

- o logaritmo de um produto de números positivos é igual à soma dos logaritmos dos fatores.

$$\boxed{\begin{array}{l}\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0\end{array}}$$

Exemplos

1. $\log_5 6 = \log_5(2 \times 3) = \log_5 2 + \log_5 3$;
2. $\log 20 = \log(2 \times 10) = \log 2 + \log 10 = \log 2 + 1$ (pois $\log 10 = 1$);
3. $\log_6 12 + \log_6 3 = \log_6(12 \times 3) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

OBSERVAÇÃO É falso que $\log(2 + 3) = \log 2 + \log 3$. Isso é erro grave! Veja que $\log(2 + 3) = \log 5$, enquanto que $\log 2 + \log 3 = \log(2 \times 3) = \log 6$.

- o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à diferença entre os logaritmos do dividendo e do divisor.

$$\boxed{\begin{array}{l}\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0\end{array}}$$

Exemplos

1. $\log_7 \frac{2}{3} = \log_7 2 - \log_7 3$;
2. $\log \frac{1}{2} = \log 1 - \log 2 = 0 - \log 2 = -\log 2$;
3. $\log_7 20 - \log_7 5 = \log_7 \frac{20}{5} = \log_7 4$;
4. $\log_a\left(\frac{b}{c \cdot d}\right) = \log_a b - \log_a(c \cdot d) = \log_a b - (\log_a c + \log_a d = \log_a b - \log_a c - \log_a d)$.

- o logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$$\boxed{\begin{array}{l}\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b \\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0\end{array}}$$

Exemplos

1. $\log_3 2^7 = 7 \cdot \log_3 2$;
2. $\log_5 8 = \log_5 2^3 = 3 \cdot \log_5 2$;
3. $\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{1/n} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;
4. $\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = \log_a b^{-1} = -1 \cdot \log_a b = -\log_a b (b > 0)$.

OBSERVAÇÃO Costuma-se escrever, por exemplo, $\log^2 3$ para indicar $(\log 3)^2$. Muito cuidado para não confundir $\log^2 3 = (\log 3)^2$ com $\log 3^2 = 2 \cdot \log 3$.

- o logaritmo de um número positivo, numa base que é uma potência, é igual ao produto do inverso do expoente dessa base pelo logaritmo (do mesmo número) cuja base é a base da potência.

Scanned by CamScanner

$$\boxed{\begin{array}{l}\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a b \\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ \beta \neq 0\end{array}}$$

Exemplos

1. $\log_8 5 = \log_{2^3} 5 = \frac{1}{3} \cdot \log_2 5$;

2. $\log_{1/7} 6 = \log_{7^{-1}} 6 = \frac{1}{-1} \cdot \log_7 6 = -\log_7 6$;

3. $\log_9 3 = \log_{3^2} 3 = \frac{1}{2} \cdot \log_3 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$;

4. $\log_{1/a} b = \log_{a^{-1}} b = \frac{1}{-1} \cdot \log_a b = -\log_a b$.

ATENÇÃO O logaritmo do inverso do número b, isto é, $\log_a \left(\frac{1}{b}\right)$, chama-se cologaritmo de b na base a. Então:

$$\boxed{\text{colog}_a b = \log_a \left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b}$$

EXERCÍCIOS

1. Mostre que $\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a b$ (satisfeitas as condições de existência).

Solução

Fazendo $\log_{a^\beta} b = x$ e $\log_a b = y$, obtemos, pela definição de logaritmo, as igualdades $(a^\beta)^x = b$ e $a^y = b$. Concluímos então, que $(a^\beta)^x = a^y$ e, portanto, que $\beta \cdot x = y$ ou $x = \frac{1}{\beta} \cdot y$, dando: $\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \cdot \log b$.

2. Sabendo que $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, calcular:
a) $\log 12$; b) $\log 27$; c) $\log 72$; d) $\log 5$.

Solução

a) $\log 12 = \log(2^2 \times 3) = \log 2^2 + \log 3 = 2 \log 2 + \log 3$
$2 \times 0{,}301 + 0{,}477 = 1{,}079$

$$\boxed{\log 12 = 1{,}079}$$

b) $\log 27 = \log 3^3 = 3 \log 3 = 3 \times 0{,}477 = 1{,}431$

$$\boxed{\log 27 = 1{,}431}$$

c) $\log 72 = \log(2^3 \times 3^2) = \log 2^3 + \log 3^2 = 3 \log 2 +$
$+ 2 \log 3 = 3 \times 0{,}301 + 2 \times 0{,}477 = 1{,}857$

$$\boxed{\log 72 = 1{,}857}$$

d) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 =$
$= 1 - 0{,}301 = 0{,}699$

$$\boxed{\log 5 = 0{,}699}$$

3. Escrever o desenvolvimento logarítmico na base 2, da expressão $E = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}}{6}$ (isto é: calcular $\log_2 E$).

Solução

$\log_2 E = \log_2 \frac{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3}}{6} = \log_2(\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3}) - \log_2 6$

$\log_2 E = \log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt[3]{3} - \log_2(2 \times 3)$

$\log_2 E = \log_2 2^{1/2} + \log_2 3^{1/3} - (\log_2 2 + \log_2 3)$

$\log_2 E = \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 + \frac{1}{3} \cdot \log_2 3 - \log_2 2 - \log_2 3$

$\log_2 E = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \log_2 3 - 1 - \log_2 3$

$$\boxed{\log_2 E = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \log_2 3}$$

4. Calcule $\log \frac{0{,}01 \times \sqrt{3}}{\sqrt[5]{2}}$, conhecendo-se $\log 2 = 0{,}30103$ e $\log 3 = 0{,}47712$.

Solução

$\log \frac{0{,}01 \times \sqrt{3}}{\sqrt[5]{2}} = \log(0{,}01 \times \sqrt{3}) - \log \sqrt[5]{2} = \log 0{,}01 +$

$+ \log \sqrt{3} - \log \sqrt[5]{2} = \log 10^{-2} + \log 3^{1/2} - \log 2^{1/5} =$

$= -2 \log 10 + \frac{1}{2} \cdot \log 3 - \frac{1}{5} \cdot \log 2 =$

$= -2 + \frac{1}{2} \cdot \log 3 - \frac{1}{5} \cdot \log 2 = -2 + \frac{1}{2} \times 0{,}47712 +$

$- \frac{1}{5} \times 0{,}30103 = -2 + 0{,}23856 - 0{,}06020 = -1{,}82164$

$$\boxed{\log \frac{0{,}01 \times \sqrt{3}}{\sqrt[5]{2}} = -1{,}82164}$$

5. Determinar a expressão cujo desenvolvimento logarítmico é $\log 2 + \log a + 3 \log b - \frac{1}{2} \cdot \log c$.

Solução

Para resolvermos este exercício aplicaremos as propriedades dos logaritmos no sentido inverso do exercício anterior. Naquele exercício nós tínhamos a expressão e queríamos o desenvolvimento; neste caso nós temos o desenvolvimento e queremos encontrar a expressão que ocasionou tal desenvolvimento.

$\log 2 + \log a + 3 \log b - \frac{1}{2} \cdot \log c = \log 2a + \log b^3 +$

$- \log c^{1/2} = \log 2ab^3 - \log \sqrt{c} = \log \frac{2ab^3}{\sqrt{c}}$

A expressão procurada é $\frac{2ab^3}{\sqrt{c}}$.

Scanned by CamScanner

6. (FUVEST) Sendo $a^2 + b^2 = 70ab$, calcule $\log_5 \frac{(a+b)^2}{ab}$, em função de $m = \log_5 2$ e $n = \log_5 3$.

Solução

De $a^2 + b^2 = 70ab$, obtemos $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab =$ $= 70ab + 2ab = 72ab$. Segue-se que $\log_5 \frac{(a+b)^2}{ab} =$ $= \log_5 \frac{72\cancel{ab}}{\cancel{ab}} = \log_5 72$; mas $\log_5 72 = \log_5(2^3 \times 3^2) = \log_5 2^3 +$ $+ \log_5 3^2 = 3 \cdot \log_5 2 + 2 \cdot \log_5 3 = 3m + 2n$

$$\boxed{\log_5 \frac{(a+b)^2}{ab} = 3m + 2n}$$

7. Calcular:

a) $\log_2 \log_3 9$;

b) $\log_a \log_b b^a$;

c) $\log_{1/2} \log_7 \sqrt[4]{7}$;

d) $\log_2 \log_3 \log_5 125$.

Solução

a) $\log_2 \log_3 9$ significa logaritmo na base 2 do logaritmo de 9 na base 3. Veja bem: logaritmo do logaritmo e não logaritmo vezes logaritmo. Começamos então o cálculo pelo logaritmo mais interno, isto é, por $\log_3 9$. Acompanhe: $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$ e, então, $\log_2 \log_3 9 = \log_2 2 = 1$

b) $\log_b b^a = a \Rightarrow \log_a \log_b b^a = \log_a a = 1$

c) $\log_7 \sqrt[4]{7} = \log_7 7^{1/4} = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{1/2} \log_7 \sqrt[4]{7} = \log_{1/2} \frac{1}{4} = \log_{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$

d) $\log_2 \log_3 \log_5 125 = \log_2 \log_3 \log_5 5^3 = \log_2 \log_3 3 =$ $= \log_2 1 = 0$.

Mudança de base dos logaritmos

Em muitas situações, os logaritmos que aparecem numa determinada expressão não são todos dados numa mesma base. Nesse caso, precisamos antes passar todos os logaritmos para uma mesma base e depois aplicar as propriedades estudadas.

Vamos então deduzir uma fórmula que nos permita mudar a base de um logaritmo. A fórmula é a seguinte:

$$\boxed{\begin{array}{c} \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0, c > 0,\ c \neq 1 \end{array}}$$

A demonstração é simples. Fazendo $\log_a b = x$, obtemos $a^x = b$. Tomando logaritmos, na base c, de ambos os membros de $a^x = b$, vem $\log_c a^x = \log_c b$ ou $x \cdot \log_c a = \log_c b$ e, portanto, $x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. Finalmente, lembrando que $x = \log_a b$, obtemos $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Exemplos

1. $\log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5}$ (escolhemos $c = 10$);

2. $\log_4 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 4} = \frac{\log_2 5}{2}$ (escolhemos $c = 2$);

3. $\frac{\log_4 9}{\log_4 3} = \log_3 9 = 2$ (foi dado $c = 4$).

OBSERVAÇÃO Se trocarmos de posição o logaritmando com a base, o logaritmo ficará invertido.

Exemplo

$\log_2 8 = 3$ e $\log_8 2 = 1/3$. Genericamente temos:

$$\boxed{\begin{array}{c} \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} \quad \text{ou} \quad \log_a b \cdot \log_b a = 1 \\ 0 < a \neq 1 \ \text{ e } \ 0 < b \neq 1 \end{array}}$$

EXERCÍCIO

Calcule:

a) $\log 5 \cdot \log_5 10$;

b) $\log 5 \cdot \log_{25} 10$;

c) $\log_b a \cdot \log_a b$;

d) $[\log_a(a^3 \cdot b^2) - 3] \cdot \log_b a$.

Solução

a) Pelo exemplo anterior, $\log_5 10 = \frac{1}{\log_{10} 5}$ e, portanto,

$\log_{10} 5 \cdot \log_5 10 = \cancel{\log_{10} 5} \cdot \frac{1}{\cancel{\log_{10} 5}} = 1$

b) $\log 5 \cdot \log_{25} 10 = \log 5 \cdot \frac{\log 10}{\log 25} = \log 5 \cdot \frac{1}{\log 5^2} =$

$= \cancel{\log 5} \cdot \frac{1}{2 \cdot \cancel{\log 5}} = \frac{1}{2}$

c) $\log_b a \cdot \log_a b = \log_b a \cdot \frac{\log_b b}{\log_b a} = 1$

d) $[\log_a(a^3 \cdot b^2) - 3] \cdot \log_b a = [\log_a a^3 + \log_a b^2 - 3] \cdot \log_b a =$ $= [\cancel{3} + 2 \cdot \log_a b - \cancel{3}] \cdot \log_b a = 2 \cdot \log_a b \cdot \log_b a = 2 \cdot 1 = 2$

Equações logarítmicas

Para a resolução de equações envolvendo logaritmos, você deve aplicar as propriedades vistas, tentando sempre reduzir a equação dada a uma equação do tipo $\log_a b = \log_a c$, concluindo, então, que $b = c$. Acompanhe os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS

1. Resolver a equação:
$\log_2(x - 3) + \log_2(x - 2) = 1$.

Solução

Primeiramente devemos considerar as condições de existência dos logaritmos; isto é, para que estes logaritmos existam devemos ter:

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ \quad e \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \quad e \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x > 3} \ \text{I}$$

Scanned by CamScanner

Para resolver a equação vamos aplicar a propriedade $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$ no primeiro membro e substituir o número 1 por $\log_2 2$ no segundo membro; deste modo obteremos:

$$\log_2[(x - 3) \cdot (x - 2)] = \log_2 2$$
$$(x - 3) \cdot (x - 2) = 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (não convém, pois não satisfaz (I))} \\ x = 4 \text{ (satisfaz (I))} \end{cases}$$
$$S = \{4\}$$

2. Resolver a equação: $2\log_3(x - 1) - \log_3 x = \log_3(x + 2)$

Solução

As condições de existência são:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x > 1} \text{ (I)}$$

No primeiro membro vamos aplicar a propriedade $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$ e portanto teremos $2 \cdot \log_3(x - 1) = \log_3(x - 1)^2$; a seguir aplicamos outra propriedade: $\log_a b - \log_a c = \log_a b/c$, ainda no primeiro membro, obtendo:

$$\log_3(x - 1)^2 - \log_3 x = \log_3(x + 2)$$
$$\log_3 \frac{(x - 1)^2}{x} = \log_3(x + 2)$$
$$\frac{(x - 1)^2}{x} = (x + 2) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = 1/4$, que não convém, pois não satisfaz (I).

Portanto: $S = \varnothing$.

3. Resolver a seguinte equação:
$\log_2 x + \log_4 x = \log_8 x + 1$

Solução

A condição de existência é $x > 0$.

Inicialmente, escrevemos todos os logaritmos numa mesma base; escolhendo a base 2, temos:

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2} \text{ e } \log_8 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = \frac{\log x}{3}$$

A equação dada transforma-se em:

$\log_2 x + \dfrac{\log_2 x}{2} = \dfrac{\log_2 x}{3} + 1$. Fazendo $\log_2 x = y$, obtemos

$y + \dfrac{y}{2} = \dfrac{y}{3} + 1$, ou, multiplicando por 6:

$$6y + 3y = 2y + 6 \Rightarrow \boxed{y = \frac{6}{7}}$$

Como $y = \log_2 x$, obtemos $\log_2 x = \dfrac{6}{7}$ e, portanto,

$$x = 2^{6/7} = \sqrt[7]{2^6} = \sqrt[7]{64}$$
$$S = \{\sqrt[7]{64}\}$$

4. Resolver a equação $2^x = 7$

Solução

Aplicando logaritmos na base 2 a ambos os membros da equação $2^x = 7$, obtemos $\log_2 2^x = \log_2 7$ e, portanto, $x \cdot \log_2 2 = \log_2 7$ ou seja, $x = \log_2 7$.

$S = \{\log_2 7\}$.

5. (EE MAUÁ-SP) Exprima a solução da equação abaixo através de logaritmos na base 2:
$2^x + 2 - 2^{-x} = 0$

Solução

Fazendo $2^x = y$, obtemos $2^{-x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2^x} = \dfrac{1}{y}$

e a equação transforma-se em $y + 2 - \dfrac{1}{y} = 0$

Multiplicando por y, vem: $y^2 + 2y - 1 = 0$, que nos dá $y = -1 - \sqrt{2}$ ou $y = -1 + \sqrt{2}$. A solução $y = -1 + \sqrt{2}$ não convém, pois $y = 2^x$ e 2^x é sempre positivo. Ficamos, então, com $y = -1 + \sqrt{2}$. Logo $2^x = -1 + \sqrt{2}$ e, portanto, $x = \log_2(-1 + \sqrt{2})$.

$S = \{\log_2(-1 + \sqrt{2})\}$.

6. Resolver a equação: $x^{\log_3 x} = 9x$.

Solução

Aplicando logaritmos na base 3 a ambos os membros da equação dada, obtemos: $\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3(9x)$. "Tombando" o $\log_3 x$ (isto é, aplicando a terceira propriedade operatória), que aparece como expoente no primeiro membro, temos:

$(\log_3 x) \cdot (\log_3 x) = \log_3 9 + \log_3 x \Rightarrow$
$\Rightarrow (\log_3 x)^2 = 2 + \log_3 x \Rightarrow$
$\Rightarrow (\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = 0$

Fazendo $\log_3 x = y$, obtemos: $y^2 - y - 2 = 0$, de onde tiramos $y = 2$ ou $y = -1$. Portanto teremos:

$$\begin{cases} \log_3 x = 2 \\ \text{ou} \\ \log_3 x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3^2 = 9 \\ \text{ou} \\ x = 3^{-1} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Como a condição de existência é $x > 0$, o conjunto solução será:

$$S = \left\{\frac{1}{3}; 9\right\}.$$

Função logarítmica

Vamos agora considerar funções que associam números reais positivos a seus logaritmos numa base dada. Essas serão as funções logarítmicas.

> Sendo a um número real positivo e diferente de 1, chama-se função logarítmica de base a a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$.

Observe, antes de mais nada, que o domínio da função logarítmica é $\mathbb{R}_+^*$, ou seja, o número x na expressão acima deve ser estritamente positivo.

Exemplos

1. A função $f(x) = \log_{1/2} x$ é a função logarítmica de base $\dfrac{1}{2}$;

2. A função $f(x) = \log x$ é a função logarítmica de base 10.

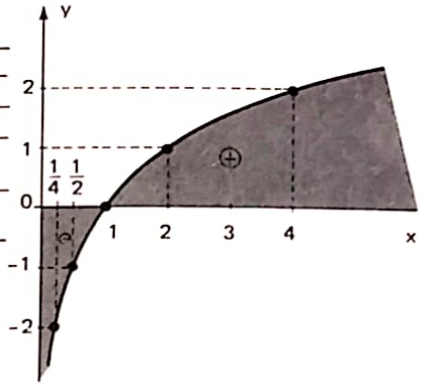
Gráficos das funções logarítmicas

Vejamos dois exemplos:

Scanned by CamScanner

• **gráfico de $f(x) = \log_2 x$:**

x	$y = \log_2 x$
1	0
2	1
4	2
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2



A curva obtida chama-se curva logarítmica. Observe, pelo gráfico, que:

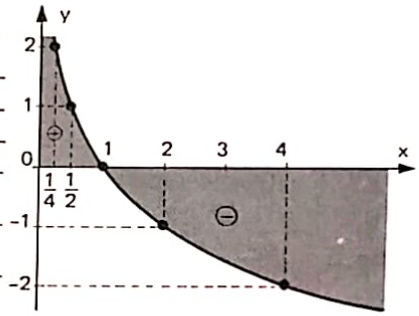
• $f(x) = \log_2 x$ é uma função crescente;

• a curva logarítmica corta o eixo dos x no ponto (1; 0) e não corta o eixo dos y (lembre que $y = f(x)$);

• $\log_2 x$ é negativo se $0 < x < 1$ (curva abaixo do eixo dos x) e positivo se $x > 1$ (curva acima do eixo dos x).

• **gráfico de $f(x) = \log_{1/2} x$:**

x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
1	0
2	-1
4	-2
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2



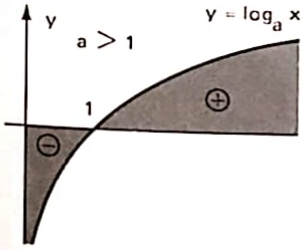
As conclusões a partir do gráfico são:

• $f(x) = \log_{1/2} x$ é uma função decrescente;

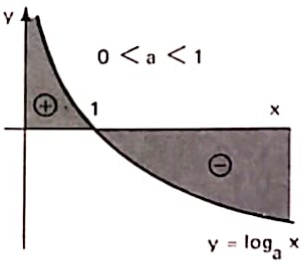
• idêntica à segunda conclusão do gráfico anterior;

• log x é positivo se $0 < x < 1$ (curva acima do eixo dos x) e negativo se $x > 1$ (curva abaixo do eixo dos x).

O comportamento das funções logarítmicas é análogo a um dos dois exemplos vistos conforme a base escolhida seja maior ou menor que 1 (mas sempre positiva). Genericamente temos:



$\log_a x$ é crescente



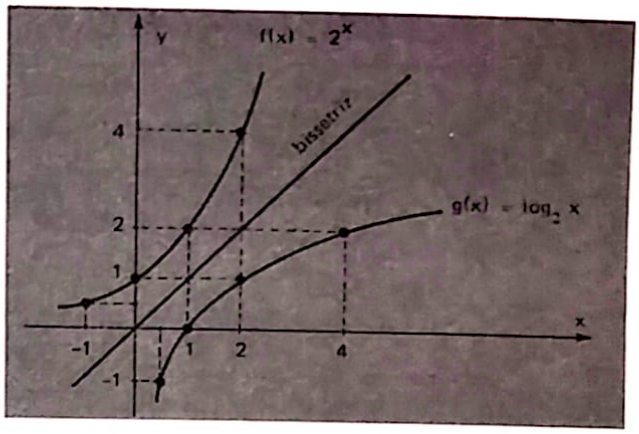
$\log_a x$ é decrescente

EXERCÍCIOS

1. Num mesmo sistema de eixos, construa os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$.

Solução

$f(x) = 2^x$ é uma exponencial de base maior que 1; $g(x) = \log_2 x$ acabamos de estudar.



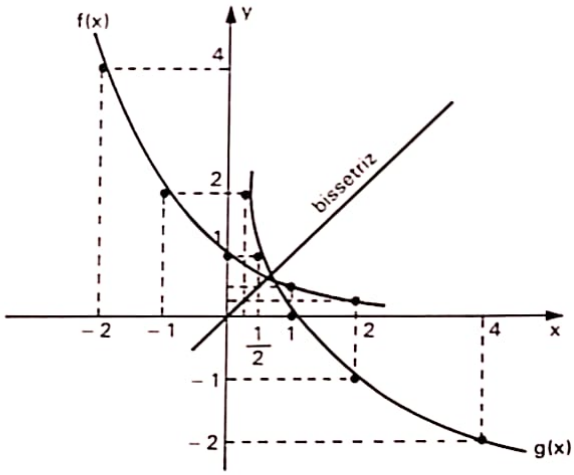
Os gráficos obtidos são simétricos em relação à bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes; isto acontecendo, dizemos que uma função é inversa da outra.

Concluímos portanto que as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$, são inversas.

2. Num mesmo sistema de eixos, construa os gráficos das funções:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ e } g(x) = \log_{1/2} x$$

Solução



Vale o mesmo comentário do exercício anterior.

3. Obter o domínio da função $f(x) = \log_{(x-3)}(x - 2)$

Solução

Basta lembrar que as condições de existência dos logaritmos são: base positiva e diferente de 1 e logaritmando positivo. Impomos então, as seguintes condições:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \text{ (condição de logaritmando)} \\ x - 3 > 0 \text{ (condição de base)} \\ x - 3 \neq 1 \text{ (condição de base)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \\ x \neq 4 \end{cases}$$ A intersecção destas três condições nos dá:

$x > 3$ e $x \neq 4$. Portanto, o domínio da função f é: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \text{ e } x \neq 4\}$.

Scanned by CamScanner

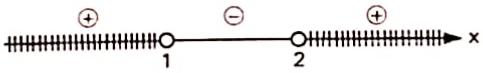
4. Obter o domínio da função $f(x) = \log_{(x^2 - 4)}(x^2 - 3x + 2)$

Solução

As condições de existência são:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \text{ (logaritmando)} & \text{I} \\ x^2 - 4 > 0 \quad \text{(base)} & \text{II} \\ x^2 - 4 \neq 1 \quad \text{(base)} & \text{III} \end{cases}$$

Para I, temos:



$\boxed{x < 1 \text{ ou } x > 2}$ I

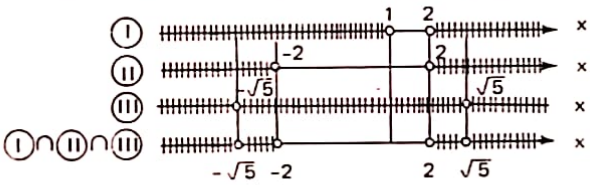
Para II, temos:

$\boxed{x < -2 \text{ ou } x > 2}$ II

Para III, temos:

$x^2 - 4 \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 5 \Rightarrow x \neq -\sqrt{5}$ e $x \neq \sqrt{5}$ III

Fazemos agora a intersecção das condições I, II e III:



O domínio da função f é:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ e } x \neq -\sqrt{5} \text{ ou } x > 2 \text{ e } x \neq \sqrt{5}\}$.

5. São dadas as funções $f(x) = x + 2^x$ e $g(x) = x - \log x$

Calcule:

a) $f(0) - g(1)$

b) $f(1) + g(10)$

c) $f(g(1))$

d) $g(f(0))$

e) $\log_2[f(g(1)) + g(f(0))]$

Solução

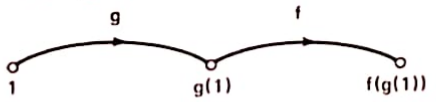
a) $\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 + 2^0 = 0 + 1 = 1 \\ g(1) = 1 - \log 1 = 1 - 0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0) - g(1) = 1 - 1 = 0$

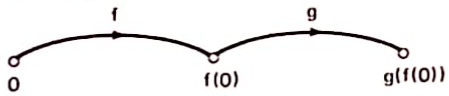
b) $\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 + 2^1 = 1 + 2 = 3 \\ g(10) = 10 - \log 10 = 10 - 1 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1) + g(10) = 3 + 9 = 12$

c)



Pelo item a, $g(1) = 1$ e, portanto, $f(g(1)) = f(1)$. Pelo item b, temos $f(1) = 3$.



d)

$f(0) = 1$ (pelo item a) $\Rightarrow g(f(0)) = g(1) = 1$

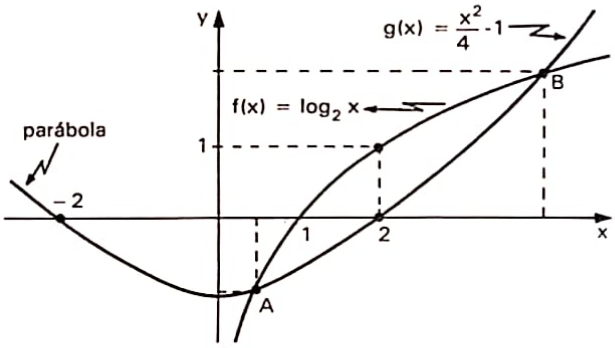
e) $\log_2[f(g(1)) + g(f(0))] = \log_2[3 + 1] = \log_2 4 = 2$

6. Determinar o número de soluções reais da equação $\log_2 x = \frac{x^2}{4} - 1$

Solução

Não se consegue, por vias elementares, achar as soluções de uma equação como esta. Podemos no entanto determinar o número de soluções reais que a equação admite. Acompanhe. Fazendo $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \frac{x^2}{4} - 1$, o enunciado pode, então, ser reescrito assim: Para quantos valores reais de x ocorre $f(x) = g(x)$?

A resposta é obtida construindo-se os gráficos das funções f e g num mesmo sistema de eixos; como a seguir:



Verificamos que as curvas obtidas interceptam-se em dois pontos distintos A e B. Nestes pontos ocorre $f(x) = g(x)$. Podemos então afirmar que a equação $\log_2 x = \frac{x^2}{4} - 1$ admite duas raízes reais distintas.

Inequações logarítmicas

Já vimos que as funções logarítmicas de base maior que 1 são crescentes e as de base menor que 1 (e positivas) são decrescentes. Isso nos dá as seguintes regras gerais para a resolução de inequações logarítmicas:

> Quando a base for um número real maior que 1, a relação de desigualdade entre os logaritmos se mantém para os logaritmandos.

Exemplos

1. $\log_2 5 > \log_2 3$, pois $5 > 3$ e a base é maior que 1;

2. $\log_3 7 < \log_3 9$, pois $7 < 9$ e a base é maior que 1;

3. $\log_2 A > \log_2 B \Rightarrow A > B$, pois a base é maior que 1 $(A, B > 0)$.

> Quando a base for um número positivo e menor que 1, a relação de desigualdade entre os logaritmos se inverte para os logaritmandos.

Exemplos

1. $\log_{1/2} 5 < \log_{1/2} 3$, pois $5 > 3$ e a base é positiva e menor que 1;

2. $\log_{1/2} 7 > \log_{1/2} 9$, pois $7 < 9$ e a base é positiva e menor que 1;

3. $\log_{1/2} A > \log_{1/2} B \Rightarrow A < B$, pois a base é positiva e menor que 1 $(A, B > 0)$.

Estas são as propriedades que usaremos na resolução de inequações logarítmicas. Acompanhe.

Scanned by CamScanner

EXERCÍCIOS

1. Resolver a inequação: $\log_2(2x - 4) < \log_2(3x - 9)$.

Solução

• inicialmente, temos as condições de existência:

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ 3x - 9 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x > 3} \text{ (I)}$$

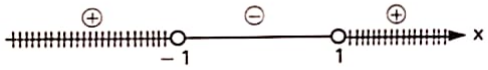
• agora: $\log_2(2x - 4) < \log_2(3x - 9) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x - 4 < 3x - 9$ (pois a base é maior que 1) $\Rightarrow$
$\Rightarrow -x < -5 \Rightarrow \boxed{x > 5}$ (II)

• a intersecção de (I) e (II) nos dá o conjunto solução $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$.

2. Resolver a inequação: $\log_2(x^2 - 1) \geqslant 3$.

Solução

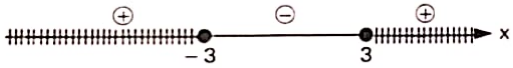
• condição de existência: $x^2 - 1 > 0$



$$\boxed{x < -1 \text{ ou } x > 1} \text{ (I)}$$

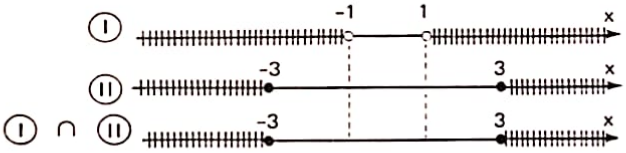
• para a resolução, escrevemos o número 3, do segundo membro, como $\log_2 2^3$, obtendo: $\log_2(x^2 - 1) \geqslant \log_2 2^3$.

Como a base é maior que 1, a última desigualdade converte-se em: $x^2 - 1 \geqslant 2^3 \Rightarrow x^2 - 1 \geqslant 8 \Rightarrow x^2 - 9 \geqslant 0$.



$$\boxed{x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant 3} \text{ (II)}$$

• intersecção de (I) e (II)



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

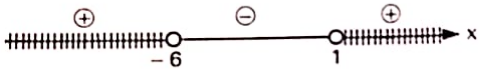
3. Obter o conjunto solução da inequação: $\log(x+2) + \log(x + 3) > \log 12$.

Solução

• as condições de existência são:

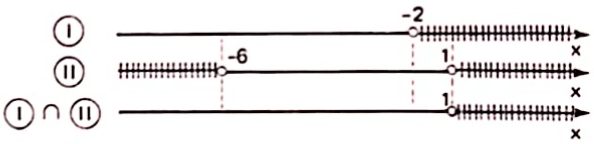
$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x > -2} \text{ (I)}$$

• agora: $\log(x + 2) + \log(x + 3) > \log 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log[(x + 2) \cdot (x + 3)] > \log 12 \Rightarrow (x + 2) \cdot (x + 3) > 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 5x - 6 > 0$



$$\boxed{x < -6 \text{ ou } x > 1} \text{ (II)}$$

• intersecção de (I) e (II)



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

4. Resolver a inequação: $\log_{1/2}(2x + 4) \geqslant \log_{1/2}(x + 5)$

Solução

• condições de existência:

$$\begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > -5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x > -2} \text{ (I)}$$

• agora, lembrando que a base dos logaritmos é menor que 1, temos: $\log_{1/2}(2x + 4) \geqslant \log_{1/2}(x + 5) \Rightarrow 2x + 4 \leqslant x + 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{x \leqslant 1}$ (II)

• a intersecção de (I) e (II) nos dá:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant 1\}$

5. Determinar o domínio da função
$f(x) = \sqrt{\log_{1/2} x - 3}$

Solução

• o número $\sqrt{\log_{1/2} x - 3}$ será um número real se, e somente se:

$$\begin{cases} x > 0 \text{ (pois x é logaritmando) (I)} \\ \text{e} \\ \log_{1/2} x - 3 \geqslant 0 \text{ (pois } \log_{1/2} x - 3 \text{ é radicando) (II)} \end{cases}$$

• resolução de (II):
$\log_{1/2} x - 3 \geqslant 0 \Rightarrow \log_{1/2} x \geqslant 3$. Escrevemos o número 3 na forma $\log_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^3$, obtendo:

$\log_{1/2} x \geqslant \log_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow x \leqslant \frac{1}{8}$ (inverte o sentido da desigualdade pois a base é positiva e menor que 1; não esqueça!).

• intersecção de (I) e (II) nos dá o domínio da função f. Assim, esse domínio é:

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant \frac{1}{8}\right\}$$

6. Resolver a inequação $\log_{1/3} \log_3 x \geqslant 1$.

Solução

• condições de existência:

(I) $x > 0$, pois x é logaritmando do logaritmo de base 3;

(II) $\log_3 x > 0$, pois $\log_3 x$ é logaritmando do logaritmo de base 1/3.

Resolvendo (II) obtemos:

$\log_3 x > 0 \Rightarrow \log_3 x > \log_3 1 \Rightarrow x > 1$ (III).

Portanto a condição de existência sairá da intersecção de (I) e (III), que nos dará:

$\boxed{x > 1}$ (IV).

• resolução de $\log_{1/3} \log_3 x \geqslant 1$

Substituindo o número 1 por $\log_{1/3} 1/3$, obtemos:

Scanned by CamScanner

$$\log_{1/3} \log_3 x \geqslant \log_{1/3} 1/3 \Rightarrow \log_3 x \leqslant 1/3$$

substituindo 1/3 por $\log_3 3^{1/3}$ temos:

$$\log_3 x \leqslant \log_3 3^{1/3}$$

$$\boxed{x \leqslant \sqrt[3]{3}} \quad \text{(V)}$$

• fazendo a intersecção de (IV) com (V) temos o conjunto solução:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant \sqrt[3]{3}\}$$

SEQÜÊNCIAS

Estamos iniciando o estudo das seqüências (ou sucessões), particularmente das progressões aritméticas e das progressões geométricas.

Para entendermos o conceito de seqüência, vamos apresentar um exemplo elucidativo. Imaginemos que, numa Copa do Mundo de futebol, os quatro semifinalistas sejam Itália (I), França (F), Argentina (A) e Brasil (B); este grupo de semifinalistas pode ser representado pelo conjunto {I, F, A, B}. Os semifinalistas jogarão entre si, segundo um critério estabelecido pela FIFA, de modo que, ao final, teremos um campeão, um vice, um 3º e um 4º colocados. Por exemplo, poderemos ter:

Campeão: Brasil
Vice: Argentina
3º: Itália
4º: França

⇒ esta ordem de classificação pode ser indicada por: (B; A; I; F)

Uma outra possibilidade pode ser:

Campeão: Brasil
Vice: França
3º: Argentina
4º: Itália

⇒ indicamos esta ordem por: (B; F; A; I)

E, assim, podemos obter outras ordenações com os mesmos quatro semifinalistas; cada uma destas ordenações chamamos de seqüência; deste modo:

Seqüência é um conjunto ordenado de números.

Isto é, seqüência é um conjunto no qual existe uma ordem entre seus elementos de forma que há um primeiro elemento (indica-se a_1), um segundo elemento (indica-se a_2), um terceiro elemento (a_3), e assim sucessivamente.

A seqüência formada pelos elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é representada colocando-se seus elementos em ordem e entre parênteses:

$$(a_1; a_2; a_3; a_4; \ldots)$$

Um termo qualquer da seqüência indica-se por a_n, onde $n \in \mathbb{N}^*$.

Uma seqüência pode ser finita se houver um último elemento ou infinita no caso contrário.

Podemos formar seqüências numéricas das maneiras mais variadas possíveis.

Exemplos

1. A seqüência (1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ...) é obtida somando-se dois termos consecutivos para obter o próximo:
$a_1 + a_2 = a_3 \Rightarrow 1 + 1 = 2$; $a_2 + a_3 = a_4 \Rightarrow 1 + 2 = 3$
$a_3 + a_4 = a_5 \Rightarrow 2 + 3 = 5$; $a_4 + a_5 = a_6 \Rightarrow 3 + 5 = 8$; ...

2. Na seqüência (1; 4; 7; 10; 13; ...) cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se 3 ao termo anterior. Este tipo de seqüência chama-se progressão aritmética;

3. Na seqüência (2; 6; 18; 54; ...) cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se por 3 o termo anterior. Seqüências deste tipo chamam-se progressões geométricas;

4. Na seqüência (2; 4; 8; 16; 32; ...) temos:
$a_1 = 2 = 2^1$; $a_2 = 4 = 2^2$; $a_3 = 8 = 2^3$; $a_4 = 16 = 2^4$;
genericamente, escrevemos: $a_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$;

5. Na seqüência (2; 4; 6; 8; 10; ...), formada pelos números pares positivos, temos:
$a_1 = 2 = 2 \cdot 1$; $a_2 = 4 = 2 \cdot 2$; $a_3 = 6 = 2 \cdot 3$; $a_4 = 8 = 2 \cdot 4$;
genericamente, temos: $a_n = 2 \cdot n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

OBSERVAÇÃO Uma outra notação possível para as seqüências é a notação funcional; nesta notação, temos: 1º termo: f(1); 2º termo: f(2); 3º termo: f(3); termo geral: f(n).

Exemplo

Na seqüência (2; 5; 9; 14; 20; ...), temos: 1º termo: f(1) = 2; 2º termo: f(2) = 5; 3º termo: f(3) = 9; 4º termo: f(4) = 14; e assim por diante.

EXERCÍCIOS

1. Escreva os cinco primeiros termos da seqüência cujo termo geral é $a_n = n^2 + 3n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Solução

Obtemos os cinco primeiros termos da seqüência substituindo n, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4 e 5 na fórmula $a_n = n^2 + 3n$. Temos, então:
$a_1 = 1^2 + 3 \times 1 = 1 + 3 = 4$;
$a_2 = 2^2 + 3 \times 2 = 4 + 6 = 10$;
$a_3 = 3^2 + 3 \times 3 = 9 + 9 = 18$;
$a_4 = 4^2 + 3 \times 4 = 16 + 12 = 28$;
$a_5 = 5^2 + 3 \times 5 = 25 + 15 = 40$.
Logo, a seqüência pedida é: (4; 10; 18; 28; 40; ...)

2. Escreva os 5 primeiros termos da seqüência em que $a_1 = 4$ e $a_n = a_{n-1} + 5$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Solução

Já sabemos que o primeiro termo a_1 é 4; analisando a expressão $a_n = a_{n-1} + 5$, concluímos que um termo qualquer a_n da seqüência é a soma do termo antecedente a ele (a_{n-1}) com 5; assim sendo, temos:
$n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 5 \Rightarrow a_2 = 4 + 5 \Rightarrow a_2 = 9$;
$n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 5 \Rightarrow a_3 = 9 + 5 \Rightarrow a_3 = 14$;
$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 5 \Rightarrow a_4 = 14 + 5 \Rightarrow a_4 = 19$;
$n = 5 \Rightarrow a_5 = a_4 + 5 \Rightarrow a_5 = 19 + 5 \Rightarrow a_5 = 24$;
Logo, a seqüência pedida é: (4; 9; 14; 19; 24;...).

Scanned by CamScanner

3. Escreva a seqüência em que $f(n) = 2 \cdot n - 1, n \in \mathbb{N}^*$.

Solução

Temos a seqüência representada pela notação funcional; fazendo, sucessivamente, n = 1, 2, 3, 4, 5, ..., temos o primeiro, o segundo, o terceiro, etc. termos da seqüência:

$n = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \Rightarrow a_1 = f(1) = 1;$
$n = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \Rightarrow a_2 = f(2) = 3;$
$n = 3 \Rightarrow f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \Rightarrow a_3 = f(3) = 5;$
$n = 4 \Rightarrow f(4) = 2 \cdot 4 - 1 = 7 \Rightarrow a_4 = f(4) = 7;$
$n = 5 \Rightarrow f(5) = 2 \cdot 5 - 1 = 9 \Rightarrow a_5 = f(5) = 9.$

A seqüência pedida é, portanto, a seqüência dos números ímpares positivos: (1; 3; 5; 7; 9;...).

Progressões aritméticas

> Uma progressão aritmética (P.A.) é uma seqüência de números reais onde cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se uma constante ao termo anterior.

A constante que aparece na definição acima chama-se razão da P.A. e será indicada pela letra r.

Exemplos

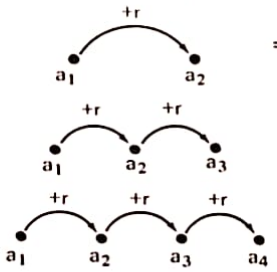
1. A seqüência (3; 5; 7; 9;...) é uma P.A. infinita (pois tem infinitos termos), de primeiro termo $a_1 = 3$ e razão $r = 2$ (para obter r, calcula-se qualquer uma das diferenças $a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$ ou $a_3 - a_2 = 7 - 5 = 2$, etc.).

2. A seqüência (8; 5; 2; −1) é uma P.A. finita (pois tem exatamente 4 termos; tem um último termo) de primeiro termo $a_1 = 8$ e razão $r = -3$ ($r = a_2 - a_1 = 5 - 8 = -3$).

3. A seqüência (1; 1; 1; 1; ...) é uma P.A. infinita de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $r = 0$.

Termo geral

Conhecendo o primeiro termo a_1 e a razão *r* de uma P.A. podemos obter a expressão do seu termo geral a_n. Isto é possível usando a definição de P.A.:



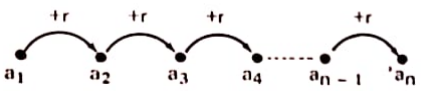
$\Rightarrow \boxed{a_2 = a_1 + r}$

$\Rightarrow \boxed{a_3 = a_1 + 2r}$

$\Rightarrow \boxed{a_4 = a_1 + 3r}$

Da mesma forma, podemos escrever que:

$\begin{cases} a_5 = a_1 + 4r \\ a_6 = a_1 + 5r \end{cases}$, e assim sucessivamente. Repare que o número de razões somadas é sempre igual ao índice do termo a ser calculado menos um; portanto, um termo qualquer a_n se escreve como na expressão abaixo.



$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r}$$

A fórmula acima é a expressão do termo geral de uma P.A.

EXERCÍCIOS

1. Obter o 5º termo de uma P.A. onde o 1º termo é −3 e a razão é 4.

Solução

Como queremos o 5º termo da P.A., fazemos n = 5 na fórmula do termo geral:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \\ n = 5 \end{cases} \Rightarrow a_5 = a_1 + 4r$$
$$a_5 = -3 + 4 \times 4 \Rightarrow \boxed{a_5 = 13}$$

2. Obter o 6º e o 7º termos da P.A. onde $a_1 = 2$ e $a_3 = 8$

Solução

Pela fórmula do termo geral, podemos escrever que:

$$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow 8 = 2 + 2r \Rightarrow 6 = 2r$$
$$\boxed{r = 3}$$

Agora calculamos a_6 e a_7, novamente pela fórmula do termo geral:

$$a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow a_6 = 2 + 5 \times 3$$
$$\boxed{a_6 = 17}$$

$$a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow a_7 = 2 + 6 \times 3$$
$$\boxed{a_7 = 20}$$

Se preferir, $a_7 = a_6 + r \Rightarrow a_7 = 17 + 3 = 20$.

3. Determine o 1º termo e a razão de uma P.A. onde o 5º termo vale 10 e o 10º termo vale 5.

Solução

Aplicamos a fórmula do termo geral para o 5º e o 10º termos:

$$\begin{cases} a_5 = a_1 + 4r \\ a_{10} = a_1 + 9r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = a_1 + 4r \ \text{(I)} \\ 5 = a_1 + 9r \ \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvemos o sistema fazendo (I) − (II): $5 = -5r$ e, portanto,

$$\boxed{r = -1}$$

Substituindo $r = -1$ em (I), temos: $10 = a_1 + 4 \cdot (-1)$, isto é, $a_1 - 4 = 10$ e, portanto,

$$\boxed{a_1 = 14}$$

4. Quantos termos tem a P.A. onde o 1º termo é 3, a razão é 13 e o último termo é 146?

Solução

Se n for o número de termos da P.A., o último termo será o a_n; temos então:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 13 \\ a_n = 146 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$146 = 3 + (n - 1) \times 13$$
$$143 = (n - 1) \times 13$$

Abrindo os parênteses e resolvendo a equação, temos:

$$13n - 13 = 143 \Rightarrow 13n = 156$$
$$\boxed{n = 12}$$

5. Mostre que se (a; b; c) é uma progressão aritmética, então $b = \dfrac{a + c}{2}$.

Scanned by CamScanner

Solução

Antes da solução, um comentário: quando escrevemos $b = \frac{a + c}{2}$, estamos dizendo que o número b é a média aritmética entre a e c.

Portanto, o que vamos demonstrar é que um termo de uma P.A. é a média aritmética entre seus "vizinhos".

A demonstração da propriedade é simples; se (a; b; c) é uma P.A., temos:

$$\left.\begin{array}{l} b = a + r \Rightarrow b - a = r \\ c = b + r \Rightarrow c - b = r \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow b - a = c - b \\ \Rightarrow 2b = a + c \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{a + c}{2}}$$

Este resultado é para ser guardado e usado toda vez que se julgar conveniente.

6. Determinar o número x sabendo que a seqüência $(3x + 2; x - 1; 2x + 3)$ é uma progressão aritmética.

Solução

Lembrando a propriedade anterior (o termo central é a média aritmética dos seus vizinhos), temos:

$$x - 1 = \frac{3x + 2 + 2x + 3}{2} \Rightarrow x - 1 = \frac{5x + 5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2 = 5x + 5 \Rightarrow 3x = -7$$

$$\boxed{x = -7/3}$$

7. Uma P.A. tem três termos e a soma deles vale 30. Sabendo que a soma dos quadrados dos dois primeiros termos dessa P.A. vale 125, determine essa P.A.

Solução

Para este tipo de questão, em que há 3 termos consecutivos de uma P.A., temos uma representação muito conveniente; chamando o termo central de x, o seu antecedente e o seu conseqüente serão, respectivamente, $x - r$ e $x + r$; veja:

$$(\underbrace{.....;}_{+r}\ x\ \underbrace{;\ .....}_{+r}) \Rightarrow (x - r; x; x + r)$$

Vamos agora aos dados do problema; como a soma dos termos da P.A. é 30, temos:

$$x - r + x + x + r = 30 \Rightarrow 3x = 30$$

$$\boxed{x = 10}$$

Com $x = 10$, a nossa P.A. pode ser escrita como:

$$(10 - r; 10; 10 + r)$$

O outro dado do problema é que a soma dos quadrados dos dois primeiros termos é 125; portanto:

$$(10 - r)^2 + 10^2 = 125 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 100 - 20r + r^2 + 100 = 125 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r^2 - 20r + 75 = 0.$$

Resolvendo esta equação de 2º grau, obtemos $r = 5$ ou $r = 15$; existem portanto duas P.A. satisfazendo o enunciado:

$$(10 - r; 10; 10 + r) \begin{cases} \rightarrow r = 5 \Rightarrow (5; 10; 15) \\ \rightarrow r = 15 \Rightarrow (-5; 10; 25) \end{cases}$$

Soma dos termos

Como você calcularia a soma $S = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$, formada pelos cem primeiros números inteiros positivos? Conta-se que Gauss (Carl Friedrich Gauss — 1777/1855), notável matemático alemão, aos 9 anos de idade, calculou a soma S anterior, escrevendo-a das duas maneiras seguintes:

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$$
$$S = 100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1$$

e somando as duas igualdades membro a membro para obter:

$2S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ... + (98 + 3) + (99 + 2) + (100 + 1)$.

Observando que:

- a soma de cada parêntese é sempre 101;
- existem 100 parênteses, concluímos:

$$2S = 100 \times 101 \Rightarrow S = \frac{100 \times 101}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S = 50 \times 101 = 5050}$$

Vamos utilizar o raciocínio anterior no cálculo da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.

Seja a P.A. $(a_1; a_2; a_3; ...; a_n)$ e seja S_n a soma que desejamos calcular, isto é,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Essa soma é calculada pela fórmula:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$$

A demonstração deste resultado segue o raciocínio usado no exemplo anterior; escrevemos a soma S_n de duas maneiras equivalentes:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ e

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$

Agora, somamos as duas igualdades membro a membro:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Observando que:

- a soma de cada parêntese é sempre igual a $a_1 + a_n$:

$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + r) + (a_n - r) = a_1 + r + a_n - r = a_1 + a_n$;

$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2r) + (a_n - 2r) = a_1 + 2r + a_n - 2r = a_1 + a_n$; e assim sucessivamente;

- existem exatos n parênteses de valor $a_1 + a_n$, concluímos que:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$$

Portanto, para calcular a soma S_n de n termos consecutivos de uma P.A. devemos calcular a média aritmética dos termos extremos, isto é, calcular $\frac{a_1 + a_n}{2}$ e multiplicar este resultado pelo número n de termos a serem somados.

Scanned by CamScanner

Exemplos

1. A soma dos 5 termos da P.A. (1; 3; 5; 7; 9) é:

$$S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} \Rightarrow S_5 = \frac{(1 + 9) \cdot 5}{2} \Rightarrow \boxed{S_5 = 25}$$

2. A soma dos números naturais consecutivos

$$11 + 12 + 13 + 14 + \ldots + 48 + 49 + 50$$

é: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \dfrac{(11 + 50) \cdot 40}{2} = 61 \times 20 = 1220$

EXERCÍCIOS

1. Obter a soma dos 50 termos iniciais da P.A. (2; −1; −4; ...).

Solução

A soma S_{50}, pedida no enunciado, calcula-se usando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ e, portanto,

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2}$$

Como não sabemos o valor de a_{50}, o calculamos usando a fórmula do termo geral:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \\ a_1 = 2 \text{ e } r = -3 \end{cases} \Rightarrow a_{50} = a_1 + (50 - 1) \cdot r$$
$$\Rightarrow a_{50} = 2 + 49 \times (-3)$$
$$\Rightarrow a_{50} = 2 - 147 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{a_{50} = -145}$$

Agora podemos calcular S_{50}:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(2 - 145) \cdot 50}{2} =$$
$$= (-143) \cdot 25 = -3575$$

Logo, a soma pedida é:

$$\boxed{S_{50} = -3575}$$

2. Calcular a soma dos termos da P.A. finita (2; 5; 8; ...; 59).

Solução

Para poder determinar a soma 2 + 5 + 8 + ... + 59, precisamos saber quantos são os termos que estão sendo somados, isto é, precisamos saber quantos termos tem a P.A. do problema; vamos usar a fórmula de termo geral para calcular n, onde n representa a quantidade de termos:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow 59 = 2 + (n-1) \cdot 3$$
$$\Rightarrow 57 = 3n - 3 \Rightarrow 3n = 60 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{n = 20}$$

Agora já sabemos que vamos somar os 20 primeiros termos da P.A.:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(2 + 59) \cdot 20}{2} = 61 \times 10 \Rightarrow$$

$$\boxed{S_{20} = 610}$$

3. Calcular a soma dos 10 primeiros termos da P.A. em que o termo geral da seqüência é $a_n = 4n - 3$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Solução

Para calcular S_{10} (soma dos 10 primeiros termos), precisamos calcular inicialmente a_1 e a_{10}; para isso, fazemos n = 1 e n = 10 na expressão de termo geral da seqüência:

$$a_n = 4n - 3 \begin{cases} \rightarrow \text{para } n = 1 \Rightarrow a_1 = 4 \times 1 - 3 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1} \\ \rightarrow \text{para } n = 10 \Rightarrow a_{10} = 4 \times 10 - 3 \Rightarrow \boxed{a_{10} = 37} \end{cases}$$

Agora, a soma S_{10} calcula-se pela fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} =$$
$$\frac{(1 + 37) \cdot 10}{2} \Rightarrow S_{10} = 38 \times 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{S_{10} = 190}$$

Progressões geométricas

> Uma progressão geométrica (P.G.) é uma seqüência de números reais onde cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma constante.

A constante que aparece na definição anterior chama-se razão da progressão e será indicada pela letra q.

Exemplos

1. A seqüência (1; 2; 4; 8; ...) é uma P.G. de razão q = 2. Para obter a razão q, divida $a_2 = 2$ por $a_1 = 1$ ou divida $a_3 = 4$ por $a_2 = 2$, etc.;

2. A seqüência (3; −6; 12; −24; ...) é uma P.G. de razão $q = -2$ (observe: $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{-6}{3} = -2$);

3. A seqüência (10; 5; $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{4}$; ...) é uma P.G. de razão $q = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$;

4. A seqüência (1; −1; 1; −1; ...) é uma P.G. de razão q = −1;

5. A seqüência (5; 0; 0; 0; 0; 0; ...) é uma P.G. de razão q = 0.

Termo geral

Conhecendo o primeiro termo a_1 e a razão q de uma P.G., podemos obter qualquer outro termo a_n da seqüência (termo geral). Para chegar à expressão do termo geral, usamos a definição de P.G.:

$$a_1 \xrightarrow{\times q} a_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = a_1 \cdot q}$$

$$a_1 \xrightarrow{\times q} a_2 \xrightarrow{\times q} a_3 \Rightarrow \boxed{a_3 = a_1 \cdot q^2}$$

$$a_1 \xrightarrow{\times q} a_2 \xrightarrow{\times q} a_3 \xrightarrow{\times q} a_4 \Rightarrow \boxed{a_4 = a_1 \cdot q^3}$$

Da mesma forma, temos: $\begin{cases} a_5 = a_1 \cdot q^4 \\ a_6 = a_1 \cdot q^5 \end{cases}$, e assim sucessi-

Scanned by CamScanner

vamente; observando que o expoente da razão q é sempre igual ao índice do termo a ser calculado menos um, um termo a_n qualquer pode ser escrito como na expressão abaixo.

$$a_1 \xrightarrow{\times q} a_2 \xrightarrow{\times q} a_3 \xrightarrow{\times q} a_4 \cdots a_{n-1} \xrightarrow{\times q} a_n$$

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

EXERCÍCIOS

1. Obter o 8º termo da P.G. $(1; \sqrt{2}; 2; 2\sqrt{2}; 4; ...)$.

Solução

A P.G. dada tem $a_1 = 1$ e razão $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$; usando a expressão do termo geral da P.G., temos:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_8 = a_1 \cdot q^{8-1} \Rightarrow a_8 = 1 \cdot (\sqrt{2})^7 =$
$= (\sqrt{2})^6 \cdot (\sqrt{2})$

Logo, $a_8 = 2^3 \cdot (\sqrt{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a_8 = 8\sqrt{2}}$

2. Qual a razão da P.G. em que $a_1 = 2$ e $a_6 = 64$?

Solução

Usamos a expressão do termo geral da P.G.:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow 64 = 2 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = 32.$

Como $32 = 2^5$, temos: $q^5 = 2^5$ e, portanto, $\boxed{q = 2}$

3. Qual é a razão de uma P.G. em que $a_1 = 2$ e $a_7 = 128$?

Solução

Analogamente ao exercício anterior, temos: $a_7 = a_1 \cdot q^6$ e, portanto, $128 = 2 \cdot q^6 \Rightarrow q^6 = 64$.

Como o expoente de q é par (é 6), a razão q pode ser positiva ou negativa e, portanto, $q = \pm\sqrt[6]{64} \Rightarrow q = \pm\sqrt[6]{2^6}$

$\Rightarrow \boxed{q = \pm 2}$

Temos, portanto, duas P.G. que satisfazem o enunciado: $q = 2 \Rightarrow (2; 4; 8; 16; 32; 64; 128)$
e $q = -2 \Rightarrow (2; -4; 8; -16; 32; -64; 128)$.

4. Qual o número de termos de uma P.G. onde o primeiro termo vale 3/125, o último vale 1875 e a razão, 5?

Solução

Sendo n o número de termos da P.G., temos:
$a_1 = 3/125$, $a_n = 1875$ e $q = 5$; como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos: $1875 = \frac{3}{125} \times 5^{n-1} \Rightarrow 5^{n-1} = \frac{1875 \times 125}{3} =$

$= 625 \times 125 = 5^4 \times 5^3$

Logo, $5^{n-1} = 5^7 \Rightarrow n - 1 = 7 \Rightarrow \boxed{n = 8}$

5. Interpolando-se 5 meios geométricos positivos entre 2 e 1458, obtém-se uma P.G. de razão q; determine q e o primeiro termo a ser interpolado.

Solução

Interpolar (ou encaixar, inserir, colocar entre) 5 meios geométricos entre 2 e 1458 significa formar uma P.G. com primeiro termo 2 e sétimo termo 1458:

$$(\underset{a_1}{2}; \underbrace{...; ...; ...; ...; ...}_{5 \text{ termos}}; \underset{a_7}{1458})$$

Como $a_7 = a_1 \cdot q^6$, temos: $1458 = 2 \cdot q^6 \Rightarrow 729 = q^6$ e, portanto, $q^6 = 729 = 3^6$; sendo $q > 0$ (termos positivos), temos $\boxed{q = 3}$

O primeiro termo a ser interpolado é o 2º termo da P.G. e, portanto, $a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow a_2 = 2 \times 3 \Rightarrow \boxed{a_2 = 6}$

6. Mostre que se (a; b; c) é uma progressão geométrica, então: $b^2 = a \cdot c$.

Solução

Inicialmente, precisa ser dito que quando escrevemos $b^2 = a \cdot c$ estamos dizendo que o número b é a média geométrica entre a e c; portanto, o que vamos demonstrar é que um termo de uma P.G. é a média geométrica entre seus "vizinhos".

Vamos à demonstração: se (a; b; c) é uma P.G., então:

$$\begin{cases} b = a \cdot q \Rightarrow q = \frac{b}{a} \\ c = b \cdot q \Rightarrow q = \frac{c}{b} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow \boxed{b^2 = a \cdot c}$$

OBSERVAÇÃO Na demonstração anterior, está implícito que a e b não são nulos; se $a = 0$ e $b = 0$, então, pela definição de P.G., c também seria nulo e então a propriedade demonstrada continuaria válida pois $0^2 = 0 \times 0$.

7. Determine x de modo que $x - 2$, $x + 4$ e $x + 8$ sejam, nesta ordem, termos consecutivos de uma P.G.

Solução

Pelo enunciado, temos que $(..., x - 2; x + 4; x + 8; ...)$ é uma P.G.; aplicando a propriedade demonstrada no exercício anterior, temos: $(x + 4)^2 = (x - 2) \cdot (x + 8)$.
$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 6x - 16 \Rightarrow 2x = -32 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x = -16}$

Com este resultado, substituindo x no enunciado, temos a P.G. $(...; -18; -12; -8; ...)$ com razão $q = 2/3$.

8. Determine uma P.G. crescente, de três termos, onde o produto destes termos é 8000 e onde a soma dos termos extremos é 50.

Solução

Para questões em que há três termos consecutivos de uma P.G. é conveniente fazer a seguinte representação: chamamos o termo central de x, a razão da P.G. de q e, assim, o termo antecedente e o conseqüente ao termo central x passam a ser x/q e x · q, respectivamente:

$$(...; \underset{\times q}{x}; \underset{\times q}{...}) \Rightarrow (x/q ; x ; x \cdot q)$$

Scanned by CamScanner

Com esta notação, voltamos aos dados do enunciado; se o produto dos termos é 8000, temos:

$$\frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 8000 \Rightarrow x^3 = 8000 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 20}$$

Ainda no enunciado, temos que a soma dos termos extremos é 50 e, portanto, $\frac{x}{q} + xq = 50 \Rightarrow \frac{20}{q} + 20q = 50$.

Tirando-se o m.m.c., temos: $20q^2 - 50q + 20 = 0$; dividindo-se esta equação por 10, obtemos:
$2q^2 - 5q + 2 = 0$. Resolvendo, obtemos: $q = 2$ ou $q = 1/2$.

Como o enunciado diz que a P.G. deve ser crescente, optamos pelo valor $\boxed{q = 2}$

Substituindo $x = 20$ e $q = 2$ na P.G., temos:

$(x/q;\ x\ ;\ xq) \Rightarrow \boxed{(10;\ 20;\ 40)}$

9. No dia 1º de janeiro, uma pessoa deposita 100.000 cruzados numa aplicação financeira que lhe rende 20% ao mês; qual será o montante acumulado no dia 1º de junho?

Solução

Inicialmente, repare que calcular 20% de 100.000 significa multiplicar 100.000 por $\frac{20}{100}$ isto é:

$$20\% \text{ de } 100.000 = \frac{20}{100} \times 100.000 = 0{,}2 \times 100.000 =$$
$$= 20.000.$$

Portanto, calcular 20% de algum valor significa multiplicar este valor por $\frac{20}{100}$ isto é, significa multiplicar por 0,2.

Voltemos agora ao problema inicial; ao final do primeiro mês, portanto em 1º de fevereiro, teremos o total de 100.000 mais 20.000 relativos aos juros de 20%: 1º de fevereiro: $100.000 + 20.000 = 120.000$.

Ao final do 2º mês de aplicação, teremos o valor de 120.000 mais os 20% de juros acumulados, isto é, 1º de março: $120.000 + 0{,}2 \times 120.000 = 120.000 + 24.000 = 144.000$.

Prosseguimos assim, sucessivamente, calculando sempre 20% sobre o valor acumulado:

1º de abril: $144.000 + 0{,}2 \times 144.000 = 144.000 + 28.800 = 172.800$

1º de maio: $172.800 + 0{,}2 \times 172.800 = 172.800 + 34.560 = 207.360$

1º de junho: $207.360 + 0{,}2 \times 207.360 = 207.360 + 41.472 = 248.832$

Portanto, o total acumulado no dia 1º de junho será de Cz$ 248.832,00.

Repare agora como isto pode ser calculado mais rapidamente com a aplicação da P.G., sem precisar calcular mês a mês os valores acumulados; veja como se faz isso.

Sendo C o valor depositado, 20% de C é $0{,}2 \cdot C$ e, portanto, o acumulado será $C + 0{,}2 \cdot C = 1{,}2 \cdot C$. Olhando para esta última igualdade percebemos que para descobrir o valor acumulado basta multiplicar o valor inicial C por 1,2, obtendo 1,2C. Então temos:

1º de janeiro: $C \longrightarrow a_1$
1º de fevereiro: $1{,}2 \cdot C \longrightarrow a_2$
1º de março: $1{,}2 \times (1{,}2 \cdot C) = 1{,}2^2 \cdot C \longrightarrow a_3$
1º de abril: $1{,}2 \times (1{,}2^2 \cdot C) = 1{,}2^3 \cdot C \longrightarrow a_4$
1º de maio: $1{,}2 \times (1{,}2^3 \cdot C) = 1{,}2^4 \cdot C \longrightarrow a_5$
1º de junho: $1{,}2 \times (1{,}2^4 \cdot C) = 1{,}2^5 \cdot C \longrightarrow a_6$

Portanto, o valor acumulado é sempre igual ao acumulado do mês anterior multiplicado por 1,2; então, os valores acumulados formam uma P.G. de razão 1,2. Logo, o valor depositado em 1º de janeiro é o 1º termo da P.G. (a_1) e o valor acumulado em 1º de junho é o 6º termo da P.G. (a_6); então, pelo termo geral da P.G. temos:

$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} \Rightarrow a_6 = C \cdot 1{,}2^5$

Como $C = 100.000$, temos: $a_6 = 100.000 \times 1{,}2^5$

Calculando $1{,}2^5$ com uma calculadora obtemos:
$1{,}2^5 = 2{,}48832 \Rightarrow a_6 = 100.000 \times 2{,}48832 = 248.832$, que é o total acumulado.

10. (FUVEST) A cada ano que passa, o valor de um carro diminui de 30% em relação ao seu valor no ano anterior. Se V for o valor do carro no primeiro ano, qual será o seu valor no oitavo ano?

Solução

Se o valor do carro diminui de 30% a cada ano,então,ao final do primeiro ano de uso o valor do carro será 70% do seu valor inicial, isto é, será $\frac{70}{100} \cdot V = 0{,}7 \cdot V$.

Ao final do 2º ano, o valor do carro será 70% do valor anterior, isto é, será 70% de $0{,}7 \cdot V$:

$$70\% \text{ de } 0{,}7 \cdot V = \frac{70}{100} \cdot 0{,}7 \cdot V = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot V =$$
$$= 0{,}7^2 \cdot V$$

Percebemos então que os valores do carro, ao final de cada ano, formam uma P.G. de razão 0,7. Esta P.G. tem primeiro termo $a_1 = V$ e nós queremos saber o valor do 8º termo dela. Aplicando a fórmula do termo geral, temos:

$a_8 = a_1 \cdot q^7 \Rightarrow a_8 = V \cdot 0{,}7^7 \Rightarrow \boxed{a_8 = 0{,}7^7 \cdot V}$

Portanto o valor do carro após 8 anos de uso será igual a $0{,}7^7 \cdot V$.

Soma dos termos

Consideremos uma P.G. (a_1; a_2; a_3; ...) de razão q; vamos ver como se pode determinar a soma S_n dos n primeiros termos da P.G., isto é, como se calcula a soma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n$.

• **1º caso:** se a P.G. tem razão $q = 1$ (P.G. constante) todos os seus termos são iguais entre si e iguais ao primeiro termo, isto é, $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$ e, portanto, a soma S_n passa a ser:

$$\boxed{S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + \ldots + a_1}_{\text{n parcelas}} = n \cdot a_1}$$

Exemplo

A soma dos 10 primeiros termos da P.G. (4; 4; 4; 4; ...) é $10 \times 4 = 40$; repare que a P.G. tem razão $q = 1$ e todos os seus termos são sempre iguais a 4 e, portanto, a soma dos seus 10 primeiros termos é a soma de 10 números 4.

• **2º caso:** se a razão q da P.G. é diferente de 1 ($q \neq 1$), a soma S_n de seus n primeiros termos é:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q}}$$

Scanned by CamScanner

Vejamos, agora, como se chega a esta fórmula; o que queremos é calcular a soma seguinte:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ (I)

Multiplicamos os membros de (I) pela razão q:

$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + ... + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$

Como $a_1 \cdot q = a_2$, $a_2 \cdot q = a_3$, ..., $a_{n-1} \cdot q = a_n$, temos:

$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_n \cdot q$ (II)

Escrevemos agora as equações (I) e (II) anteriores, uma sob a outra, da maneira como segue, e subtraímos uma da outra:

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{...} + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n} \\ q \cdot S_n = \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{a_4} + \cancel{...} + \cancel{a_n} + a_n \cdot q \end{array} \ominus$$

$\Rightarrow S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_n \cdot q$

Colocando S_n em evidência no primeiro membro, vem:

$\Rightarrow S_n \cdot (1 - q) = a_1 - a_n \cdot q$

Sendo $q \neq 1$ (hipótese), temos:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q}}$$

Na fórmula obtida, substituindo a_n por $a_1 \cdot q^{n-1}$, vem:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q}{1 - q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}}$$

Exemplos

1. A soma dos 5 primeiros termos da P.G. (1; 3; 9; 27; 81) é: $S_5 = \frac{a_1 - a_5 \cdot q}{1 - q} = \frac{1 - 81 \times 3}{1 - 3} = \frac{1 - 243}{-2} = \frac{-242}{-2} = 121$;

2. A soma dos 10 primeiros termos da P.G. (1;1/2;1/4; ...)

é: $S_{10} = \frac{a_1 \cdot (1 - q^{10})}{1 - q} = \frac{1 \cdot [1 - (1/2)^{10}]}{1 - 1/2} = \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - 1/2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{\frac{2^{10} - 1}{2^{10}}}{1/2} = \frac{\frac{1024 - 1}{1024}}{1/2} = \frac{1023}{1024} \times \frac{2}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{10} = \frac{1023}{512}}$$

EXERCÍCIOS

1. Determine a soma dos termos da progressão geométrica (1; 2; 4; 8; ... ; 1024).

Solução

Temos: $a_1 = 1$, $q = 2$, $a_n = 1024$ e $S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q}$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - 1024 \times 2}{1 - 2} = \frac{1 - 2048}{-1} = \frac{-2047}{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = 2047}$$

2. Resolver a equação $x + 4x + 16x + ... + 1024x = 1365$.

Solução

Pondo x em evidência no primeiro membro da equação, ficamos com: $x \cdot (1 + 4 + 16 + ... + 1024) = 1365$. Agora, repare que a seqüência (1; 4; 16; ...; 1024) é uma P.G. de razão $q = 4$, primeiro termo $a_1 = 1$ e último termo $a_n = 1024$. A soma dos termos dessa P.G. calcula-se usando a fórmula $S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q}$; portanto, temos:

$S_n = \frac{1 - 1024 \times 4}{1 - 4} = \frac{-4095}{-3} = 1365$; agora, voltando com este resultado na equação dada (já com x em evidência), temos: $x \cdot 1365 = 1365 \Rightarrow x = 1$. Logo, $\boxed{S = \{1\}}$.

3. Na P.G. (2; 6; 18; ...) quantos termos consecutivos devem ser somados, contando a partir do primeiro termo, de modo que a soma desses termos seja 6560?

Solução

Seja n o número de termos da P.G. que serão somados, isto é, $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = 6560$.

Usamos a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.G. : $S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$, com $a_1 = 2$ e $q = 3$.

Temos então: $S_n = \frac{2 \cdot (1 - 3^n)}{1 - 3} = 6560 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2 \cdot (1 - 3^n)}{-2} = 6560 \Rightarrow -1 \cdot (1 - 3^n) = 6560 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 + 3^n = 6560 \Rightarrow 3^n = 6561$.

Decompondo 6561 em fatores primos, obtemos que: $6561 = 3^8$; logo, $3^n = 6561 = 3^8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{n = 8}$

Soma dos termos de uma P.G. infinita convergente

Vamos apresentar dois exemplos para poder explicar o que vem a ser uma P.G. infinita convergente.

• **1º exemplo:** consideremos a P.G. $(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; ...)$ Esta P.G. tem primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = \frac{1}{2}$; vamos escrever os termos dessa P.G. na forma decimal:

$a_1 = 1$	$a_2 = 0,5$	$a_3 = 0,25$
$a_4 = 0,125$	$a_5 = 0,0625$	$a_6 = 0,03125$

Olhando para os valores desses termos percebemos que quanto maior o índice do termo, menor é o seu valor, isto é, à medida que o índice vai aumentando, o valor do termo vai diminuindo, diminuindo, diminuindo, ... mantendo-se porém sempre positivo e aproximando-se do zero.

Agora vamos calcular a soma S_n dos n primeiros termos dessa P.G.; repare:

$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + 0,5 = 1,5$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 0,5 + 0,25 = 1,75$

$S_4 = 1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 = 1,875$

$S_5 = 1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 + 0,0625 = 1,9375$

Utilizando uma calculadora, obtivemos os valores de a_6, a_7, a_8 e a_9 e, com estes resultados, calculamos os correspondentes valores de S_6, S_7, S_8 e S_9; veja:

Scanned by CamScanner

$a_6 = 0{,}03125 \Longrightarrow S_6 = 1{,}96875$
$a_7 = 0{,}015625 \Longrightarrow S_7 = 1{,}984375$
$a_8 = 0{,}0078125 \Longrightarrow S_8 = 1{,}9921875$
$a_9 = 0{,}00390625 \Longrightarrow S_9 = 1{,}9960937$

Analisando os resultados das somas S_n percebemos que é uma seqüência de números crescentes cujos valores vão se aproximando do número 2.

• **2º exemplo:** consideremos a P.G.

$$\left(1; \frac{-2}{5}; \frac{4}{25}; \frac{-8}{125}; \frac{16}{625}; \frac{-32}{3125}; \ldots\right).$$

Esta P.G. tem primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = -2/5$; vamos escrever seus termos na notação decimal e, simultaneamente, calcular os valores das somas S_n:

$a_1 = 1$
$a_2 = -0{,}4 \Longrightarrow S_2 = a_1 + a_2 = 0{,}6$
$a_3 = 0{,}16 \Longrightarrow S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0{,}76$
$a_4 = -0{,}064 \Longrightarrow S_4 = 0{,}696$
$a_5 = 0{,}0256 \Longrightarrow S_5 = 0{,}7216$
$a_6 = -0{,}01024 \Longrightarrow S_6 = 0{,}71136$
$a_7 = 0{,}004096 \Longrightarrow S_7 = 0{,}715456$

Analisando esses resultados, concluímos que:

• a seqüência dos números $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ é alternante (ora é um número positivo, ora é negativo), porém, em valor absoluto (esquecendo o sinal) os valores dos números a_n vão diminuindo e se aproximando do número zero;

• a seqüência das somas S_n é oscilante (ora aumenta, ora diminuiu) e seu valor vai se aproximando de um número impossível de ser previsto sem uma teoria matemática mais apurada.

Seqüências como estas dos dois exemplos anteriores, cujos termos a_n vão diminuindo em valor absoluto à medida que o índice n aumenta, são chamadas de seqüências convergentes.

> Uma P.G. é uma seqüência convergente se e somente se sua razão q é tal que $-1 < q < 1$.

Consideremos então uma P.G. infinita e convergente (a_1; a_2; a_3; a_4; ...); a soma S dos seus infinitos termos:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$$

pode ser calculada pela fórmula

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1 - q}}$$

Esta fórmula se obtém a partir da expressão da soma dos n primeiros termos de uma P.G. $S_n = \dfrac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q}$ substituindo a_n por zero; isto é razoável pois numa P.G. infinita e convergente os termos "lá perto do fim da seqüência" são praticamente iguais a zero.

Exemplos

1. Calcule a soma dos termos da P.G. $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots\right)$.

É uma P.G. infinita e convergente pois a razão é $\frac{1}{2}$; a soma $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ se calcula pela fórmula $S = \dfrac{a_1}{1 - q}$.

Como $a_1 = 1$ e $q = 1/2$, temos: $S = \dfrac{1}{1 - 1/2} = \dfrac{1}{1/2} = 2$.

Volte agora ao 1º exemplo e veja como este resultado confirma o resultado previsto lá anteriormente.

2. Calcule a soma dos termos da P.G.

$$\left(1; \frac{-2}{5}; \frac{4}{25}; \frac{-8}{125}; \frac{16}{625}; \ldots\right).$$

É uma P.G. infinita com razão $q = \dfrac{-2}{5}$ e, portanto, é uma P.G. convergente; a soma dos termos dessa P.G. se obtém fazendo:

$$S = 1 + \left(\frac{-2}{5}\right) + \left(\frac{4}{25}\right) + \left(\frac{-8}{125}\right) + \left(\frac{16}{625}\right) + \ldots =$$

$$= S = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sendo } a_1 = 1 \\ \text{e } q = \dfrac{-2}{5}\end{array}\right\} \Rightarrow S = \frac{1}{1 - (-2/5)} = \frac{1}{1 + 2/5} =$$

$$= \frac{1}{7/5} = \frac{5}{7}.$$

Este resultado 5/7 é o valor impossível de ser previsto, conforme foi citado na análise de resultados do exemplo 2.

EXERCÍCIOS

1. Calcule a soma dos termos da P.G. $\left(1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \ldots\right)$.

Solução

A razão da P.G. é $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1/3}{1} = \dfrac{1}{3}$ e, portanto, é uma P.G. infinita e convergente.

A soma S dos seus infinitos termos é calculada pela fórmula $S = \dfrac{a_1}{1 - q}$. Como $a_1 = 1$ e $q = 1/3$, temos $S = \dfrac{1}{1 - 1/3} = \dfrac{1}{2/3} = \dfrac{3}{2}$; portanto, a soma dos termos da P.G. é

$$\boxed{S = 3/2}$$

2. Calcule a soma dos termos da P.G. $\left(6; -2; \frac{-2}{3}; \frac{-2}{9}; \ldots\right)$

Solução

Inicialmente calculamos a razão q da P.G.:

$q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{-2}{6} = \dfrac{-1}{3}$. Temos então uma P.G. infinita e convergente pois a razão está compreendida entre -1 e 1. A soma dos termos dessa progressão se obtém fazendo:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{6}{1 - (-1/3)} = \frac{6}{1 + 1/3} = \frac{6}{4/3} = 6 \times \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{9}{2}.$$

Logo, a soma S dessa P.G. é

$$\boxed{S = 9/2}$$

Scanned by CamScanner

3. Resolver a equação: $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + ... = 40$.

Solução

A soma $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + ...$ deve ser entendida como a soma dos termos da P.G. infinita $(x; \frac{x}{2}; \frac{x}{4}; \frac{x}{8}; ...)$.

Esta P.G. é convergente pois sua razão é $q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow q = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \frac{x}{2} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$. Calculamos agora a soma dos termos da P.G. pela fórmula $S = \frac{a_1}{1 - q}$ com $a_1 = x$ e $q = 1/2$: $S = \frac{x}{1 - 1/2} = \frac{x}{1/2} = 2x$.

Voltando à equação dada no enunciado do problema, temos:

$$2x = 40 \Rightarrow x = 20.$$

Logo, o conjunto solução S da equação é

$$\boxed{S = \{20\}}$$

4. Determinar a fração geratriz da dízima periódica 0,44444...

Solução

Chamamos de fração geratriz à fração do tipo p/q que transformada em número decimal dá origem à dízima periódica (os números p e q são necessariamente inteiros).

Por exemplo, 1/3 é a fração geratriz da dízima 0,3333.... pois $\frac{1}{3} = 0,3333...$; 3/11 é a fração geratriz da dízima 0,272727... pois efetuando a divisão de 3 por 11 obtemos a dízima 0,272727...

Vamos agora obter a fração geratriz de 0,4444... Repare que 0,4444... é a seguinte soma:

$0,4444... = 0,4 + 0,04 + 0,004 + 0,0004 + ...$

$0,4444... = \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10000} + ...$ Esta soma é a soma dos termos da P.G. $(\frac{4}{10}; \frac{4}{100}; \frac{4}{1000}; ...)$ que é infinita e convergente com razão $q = 1/10$.

A soma dos termos desta P.G. se obtém fazendo $S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{4/10}{1 - (1/10)} = \frac{4/10}{9/10} = \frac{4}{9}$. A fração 4/9 é a geratriz da dízima 0,444... pois 4/9 = 0,4444...

5. Determinar a fração geratriz da dízima 5,323232...

Solução

Escrevemos a dízima 5,323232... como sendo a soma:

$5,323232... = 5 + 0,32 + 0,0032 + 0,000032 + ...$

$5,323232... = 5 + \frac{32}{100} + \frac{32}{10000} + \frac{32}{1000000} + ...$

Nesta soma, excetuando-se a primeira parcela, temos a soma dos termos da P.G. $(\frac{32}{100}; \frac{32}{10000}; \frac{32}{1000000}; ...)$ que é infinita e convergente com razão $q = 1/100$.

A soma dos termos desta P.G. é $S = \frac{a_1}{1 - q} =$

$= \frac{32/100}{1 - (1/100)} \Rightarrow S = \frac{32/100}{99/100} = \frac{32}{99}$.

Temos então:

$5,323232... = 5 + \frac{32}{99} = \frac{527}{99}$. Portanto, a geratriz da dízima 5,323232... é $\frac{527}{99}$.

Veja agora uma regra prática para se calcular a geratriz:

- chamamos de x a dízima; por exemplo: $x = 5,323232...$;
- a seguir mutiplicamos esta última igualdade por 10, 100, 1000 etc. conforme a dízima tenha 1, 2, 3, ... algarismos se repetindo (no nosso caso, multiplicamos por 100, pois quem se repete é o 32, que tem dois algarismos): $100x = 532,323232...$;
- fazemos a diferença entre esta última igualdade e a primeira e resolvemos a equação resultante:

$$\begin{array}{rl} 100x = & 532,323232... \\ x = & 5,323232... \end{array} \ (-) \quad \Rightarrow 99x = 527 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{527}{99}}$$

Acompanhe este outro exemplo: seja a dízima periódica 1,27777...

Temos: $x = 1,27777... \Rightarrow 10x = 12,7777...$

Fazemos a diferença:

$$\begin{array}{rl} 10x = & 12,7777... \\ x = & 1,2777... \end{array} \ (-)$$

$$9x = 11,5 \Rightarrow x = \frac{11,5}{9}$$

Para eliminar o decimal da fração, multiplicamos o numerador e o denominador por 10, obtendo:

$$x = \frac{11,5}{9} \times \frac{10}{10} = \frac{115}{90} \Rightarrow \boxed{x = \frac{23}{18}}$$

6. Sendo x um número real tal que $-1 < x < 1$, calcular, em função de x, as somas:

a) $S_1 = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$

b) $S_2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$

Solução

a) a seqüência $(1; x; x^2; x^3; ...)$ é uma P.G. de 1º termo $a_1 = 1$ e razão $q = x$. Como $-1 < x < 1$, a soma dos termos da P.G. é $S_1 = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - x}$. Portanto, $\boxed{S_1 = \frac{1}{1 - x}}$

b) multiplicamos ambos os membros de S_2 por x, obtendo: $x \cdot S_2 = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ...$

Agora fazemos a diferença entre S_2 e $x \cdot S_2$:

$$\begin{array}{rl} S_2 = & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + ... \\ x \cdot S_2 = & \quad\ \ x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ... \end{array} \ (-)$$

$$S_2 - x \cdot S_2 = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...}_{S_1}$$

Portanto: $S_2 - x \cdot S_2 = S_1 = \frac{1}{1 - x}$ (repare que S_1 é a soma do item anterior); colocando S_2 em evidência, temos:

$S_2 \cdot (1 - x) = \frac{1}{1 - x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{S_2 = \frac{1}{(1 - x)^2}}$$

Scanned by CamScanner

NÚMEROS COMPLEXOS

Para iniciar este assunto, lembramos que:

- todo número real, quando elevado ao quadrado, resulta não negativo. Em símbolos: $x^2 \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Portanto, a equação $x^2 + 1 = 0$ (ou $x^2 = -1$) não tem solução real;
- dada uma equação de 2º grau, do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, sabemos que existe raiz real da equação se, e somente se, o número $\Delta = b^2 - 4ac$ for não negativo. Se $\Delta < 0$, a equação é impossível no campo dos números reais.

Os números complexos foram criados para sanar esta insuficiência do conjunto $\mathbb{R}$. Acompanhe, agora, um trecho da história da matemática que relata o começo do surgimento dos números complexos.

No século XVI, o matemático Cardano, analisando a equação de 3º grau $x^3 + ax + b = 0$, obteve a fórmula resolutiva:

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{E}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{E}}, \text{ onde:} \\ E = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 \end{cases}$$

Em 1572, o matemático Bombelli aplicou a fórmula de Cardano para a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ e obteve $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Logo, à primeira vista, concluiríamos que a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ é impossível no campo dos números reais, pois $\sqrt{-121}$ não existe em $\mathbb{R}$.

Porém, Bombelli percebeu que $x = 4$ é solução da equação (de fato: $4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$). Ou seja, a equação proposta é possível em $\mathbb{R}$, apesar de, na sua resolução, "sairmos" de $\mathbb{R}$.

Foi nesse momento que os matemáticos sentiram a necessidade de criar o número imaginário, que posteriormente foi chamado de número complexo. O que se fez a seguir foi criar um modelo matemático que nos ensinasse como trabalhar com os números complexos, isto é, que nos ensinasse as propriedades e as operações com estes números.

Unidade imaginária

Para a construção dos números complexos, admitimos a existência de um número, representado por i e denominado unidade imaginária, com a propriedade seguinte:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Vamos ainda acrescentar mais duas definições:

- $\boxed{i^0 = 1}$; dessa forma todo número (real ou não) elevado a zero é igual a 1.
- $\boxed{i^1 = i}$; dessa forma todo número (real ou não) com expoente 1 é igual a ele mesmo.

Com estas definições, obtemos:

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \quad \Rightarrow i^3 = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \quad \Rightarrow i^4 = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \quad \Rightarrow i^5 = i$
$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1 \quad \Rightarrow i^6 = -1$
$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i \quad \Rightarrow i^7 = -i$
$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow i^8 = 1$

Observe que os valores das potências inteiras de i sempre se repetem; os resultados possíveis são: 1, i, −1 e −i. Portanto, dado $n \in \mathbb{N}$, a potência i^n será um destes quatro valores. Para descobrir qual destes valores ocorrerá, dividimos o número n por 4:

$$\begin{array}{r|l} n & 4 \\ \hline r & q \end{array}$$

obtendo quociente q e resto r ($0 \leqslant r < 4$). A seguir, escrevemos $n = 4q + r$ e, então, teremos:

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$$

Concluindo:

> i^n, $n \in \mathbb{N}$, é igual a i^r, onde r é o resto da divisão de n por 4.

Exemplos

1. $i^{103} = i^{\overset{\text{resto}}{3}} = -i$

$$\begin{array}{r|l} 103 & 4 \\ \hline \text{resto} \rightarrow 3 & 25 \end{array}$$

2. $i^{206} = i^{\overset{\text{resto}}{2}} = -1$

$$\begin{array}{r|l} 206 & 4 \\ \hline \text{resto} \rightarrow 2 & 51 \end{array}$$

Definição de número complexo

> Dados dois números reais a e b, chamamos de número complexo o número $z = a + bi$, onde i é a unidade imaginária.

Exemplos

$3 + 4i$, onde $a = 3$ e $b = 4$, e
$2 - 5i$, onde $a = 2$ e $b = 5$, são números complexos.

Dado o número complexo $z = a + bi$, usamos a seguinte nomenclatura:

a = parte real do complexo z;
bi = parte imaginária do complexo z;
b = coeficiente da parte imaginária.

Temos dois casos particulares importantes: os imaginários puros e os reais.

Imaginários puros

Se tivermos $a = 0$ e $b \neq 0$, o número complexo $z = a + bi$ reduz-se a $z = bi$. Temos, então, um imaginário puro (não tem parte real).

Exemplos

1. 5i, onde a=0 e b=5 é imaginário puro;
2. −3i, onde a=0 e b=−3 é um imaginário puro.

Números reais

Se tivermos $b = 0$, o complexo $z = a + bi$ reduz-se a $z = a$, que é um número real. Observe, então, que todo número real é também um número complexo, isto é, $\mathbb{R} \subset C$, onde C é o conjunto dos números complexos.

Por exemplo, o número real 3 pode ser escrito como $3 + 0i$, o que evidencia o fato de o número 3 ser um complexo com parte imaginária nula.

Scanned by CamScanner

Conjugado de um número complexo

Se $z = a + bi$ é um número complexo qualquer, seu conjugado é o número complexo indicado por $\overline{z}$, tal que $\overline{z} = a - bi$. Em outras palavras, obtemos o conjugado de um número complexo trocando o sinal de sua parte imaginária.

Exemplos

1. $z = 3 + 4i \Rightarrow \overline{z} = 3 - 4i$;
2. $z = 5 - 2i \Rightarrow \overline{z} = 5 + 2i$;
3. $z = 6i \Rightarrow \overline{z} = -6i$;
4. $z = 5 \Rightarrow \overline{z} = 5$ (o conjugado de um número real é o próprio número).

Igualdade de complexos

Dois números complexos são iguais quando suas partes reais e imaginárias são respectivamente iguais. Algebricamente, temos:

$$\boxed{a + bi = c + di \Rightarrow a = c \text{ e } b = d}$$

Exemplos

1. $a + bi = 5 + 3i \Rightarrow a = 5$ e $b = 3$;
2. $a + bi = 10 \Leftrightarrow a + bi = 10 + 0i \Rightarrow a = 10$ e $b = 0$;
3. $a + bi = 3i \Leftrightarrow a + bi = 0 + 3i \Rightarrow a = 0$ e $b = 3$;
4. $a + bi = 0 \Leftrightarrow a + bi = 0 + 0i \Rightarrow a = 0$ e $b = 0$.

Operações com números complexos

Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ forem dois números complexos quaisquer, temos as seguintes definições:

Adição

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i}$$

Para somar dois números complexos, somamos, separadamente, suas partes reais e suas partes imaginárias.

Exemplos

1. $8 + 5i + 7 + 4i = (8+7) + (5+4)i = 15 + 9i$
2. $3 - 2i - 4 + i = (3-4) + (-2+1)i = -1 - i$

Subtração

$$\boxed{z_1 - z_2 = (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d) \cdot i}$$

Para subtrair dois números complexos, subtraímos, separadamente, suas partes reais e suas partes imaginárias.

Exemplos

1. $(8+5i) - (2+3i) = (8-2) + (5-3)i = 6 + 2i$
2. $(2+4i) - (6-5i) = (2-6) + (4 - (-5)) \cdot i = -4 + 9i$

Repare que para efetuar a diferença entre os dois complexos, basta abrir os parênteses e a seguir efetuar a soma algébrica das partes reais e imaginárias, respectivamente:

$$(2+4i) - (6-5i) = 2 + 4i - 6 + 5i = 2 - 6 + 4i + 5i = -4 + 9i$$

Multiplicação

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (a+bi) \cdot (c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i}$$

Efetuamos o produto, aplicando a propriedade distributiva do produto em relação à adição, lembrando que $i^2 = -1$.

Exemplos

1. $(2+3i) \cdot (5+4i) = 10 + 8i + 15i + 12i^2 = 10 + 23i - 12 = -2 + 23i$
2. $(2+5i) \cdot (3-4i) = 6 - 8i + 15i - 20i^2 = 6 + 7i + 20 = 26 + 7i$

Divisão

1. Para efetuar a divisão $\frac{a+bi}{c+di}$, multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador; acompanhe, atentamente, através dos próximos exemplos:

1. $\frac{5+3i}{2+4i} = \frac{5+3i}{2+4i} \cdot \frac{2-4i}{2-4i} = \frac{10-20i+6i-12i^2}{4-16i^2} = \frac{22-14i}{4+16} = \frac{22}{20} - \frac{14}{20}i = \frac{11}{10} - \frac{7}{10}i$

Logo, $\frac{5+3i}{2+4i} = \frac{11}{10} - \frac{7}{10} \cdot i$

2. $\frac{4+2i}{1+i} = \frac{4+2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{4-4i+2i-2i^2}{1^2-i^2} = \frac{6-2i}{1+1} = \frac{6-2i}{2} = 3-i$ Logo, $\frac{4+2i}{1+i} = 3-i$

3. $\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i \Rightarrow \frac{1}{i} = -i$

EXERCÍCIOS

1. Efetue as operações indicadas:

a) $(1+i)^2$; b) $(1-i)^2$; c) $\frac{1+i}{1-i}$; d) $\frac{1-i}{1+i}$; e) i^{-41}.

Solução

a) $(1+i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

b) $(1-i)^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

c) $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{2i}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$

d) $\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(1-i)^2}{1-i^2} = \frac{-2i}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i$

e) $i^{-41} = \frac{1}{i^{41}}$; agora separadamente, calculamos i^{41} dividindo 41 por 4, obtendo quociente 10 e resto 1; portanto, $i^{41} = i^1$; logo, voltando ao enunciado da questão, temos: $i^{-41} = \frac{1}{i^{41}} = \frac{1}{i^1} = \frac{1}{i} = -i$, conforme o terceiro exemplo visto anteriormente.

2. (MACK-SP) Seja o número complexo $z = \frac{1-i}{1+i}$. Calcule z^{1980}.

Solução

Vimos no exercício anterior que $z = \frac{1-i}{1+i} = -i$.

Portanto, $z^{1980} = (-i)^{1980} = i^{1980}$

Scanned by CamScanner

Para o cálculo de i^{1980}, dividimos 1980 por 4:

$$\begin{array}{r|l} 1980 & 4 \\ \hline 0 & 495 \end{array} \Rightarrow i^{1980} = i^0 = 1; \text{ logo, } \boxed{z^{1980} = 1}$$

3. (PUC-SP) Calcule o conjugado do número complexo $z = \dfrac{1+3i}{2-i}$.

Solução

Começamos efetuando a divisão:

$$z = \frac{1+3i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{2+i+6i+3i^2}{4-1^2} = \frac{2+7i-3}{4+1} = \frac{-1+7i}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i; \text{ logo, o conjugado de z é } \boxed{\overline{z} = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i}$$

4. (UNESP) Seja $i^2 = -1$ e $\overline{z}$ o conjugado do número complexo z tal que $iz + 2\overline{z} + 1 - i = 0$. Calcule z.

Solução

Fazendo $z = a+bi$, com a e b reais, obtemos $\overline{z} = a - bi$.
Agora, a equação $iz + 2\overline{z} + 1 - i = 0$ nos dá:

$\Rightarrow i(a+bi) + 2(a-bi) + 1 - i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow ai + bi^2 + 2a - 2bi + 1 - i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow ai - b + 2a - 2bi + 1 - i = 0$

Agora agrupamos a parte real e a parte imaginária:

$$2a - b + 1 + (a - 2b - 1)i = 0 = 0 + 0i$$

Usando a igualdade de complexos, temos:

$$\begin{cases} 2a - b + 1 = 0 \\ a - 2b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = -1 \\ a - 2b = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = b = -1$. Logo, o complexo $z = a + bi$ é

$$\boxed{z = -1 - i}$$

5. (FEI-SP) Dado o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$, escreva na forma algébrica o complexo z^{-1}.

Solução

Sendo $z = 1 + \sqrt{3}i$ e $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$, temos:

$$z^{-1} = \frac{1}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1}{1+\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{1-\sqrt{3}i}{1-(\sqrt{3}i)^2} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}i}{1+3} = \frac{1-\sqrt{3}i}{4}$$

Logo, $\boxed{z^{-1} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}i}$

6. (FAAP-SP) Determinar o número real x tal que o produto $(4+3i) \cdot (x-6i)$ seja também um número real.

Solução

Efetuando o produto proposto no enunciado, temos:

$$(4+3i) \cdot (x-6i) = 4x - 24i + 3xi - 18i^2 =$$
$$= 4x - 24i + 3xi + 18 = 4x + 18 +$$
$$+ (3x - 24)i$$

O número obtido será real se, e somente se, sua parte imaginária for nula, o que nos dá $3x - 24 = 0$ e, portanto, $\boxed{x = 8}$

7. (FUVEST-SP) Ache os valores reais de x de modo que a parte real do número complexo $z = \dfrac{x-i}{x+i}$ seja negativa (i é a unidade imaginária).

Solução

$$z = \frac{x-i}{x+i} = \frac{x-i}{x+i} \cdot \frac{x-i}{x-i} = \frac{(x-i)^2}{x^2-i^2} =$$

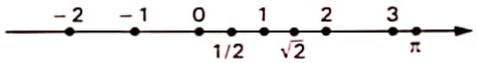
$$= \frac{x^2 - 2xi + i^2}{x^2-(-1)} = \frac{x^2 - 1 - 2xi}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1}i$$

Portanto, a parte real do número z é $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. Para que esta parte real seja negativa, devemos ter:

$\dfrac{x^2-1}{x^2+1} < 0$, o que nos dá $x^2 - 1 < 0$ (já que $x^2 + 1$ é positivo para todo x real). A desigualdade $x^2 - 1 < 0$ nos dá finalmente, $\boxed{-1 < x < 1}$

Representação gráfica

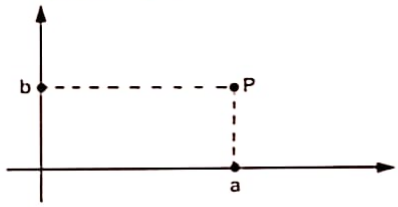
Já vimos que os números reais podem ser representados pelos pontos de uma reta:



Vamos ver agora como se pode representar graficamente um número complexo; consideremos:

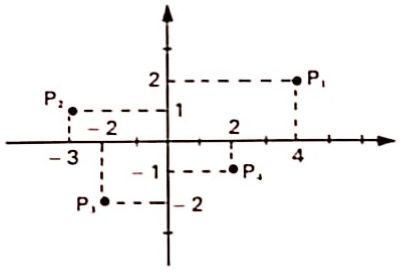
- um plano com um sistema de coordenadas cartesianas;
- um número complexo z, $z = a + bi$.

A representação gráfica do complexo z é o ponto P de coordenadas (a; b), isto é, o ponto de abscissa a e ordenada b:



Exemplos

1. Veja a representação gráfica dos complexos $z_1 = 4 + 2i$, $z_2 = -3 + i$, $z_3 = -2 - 2i$, $z_4 = 2 - i$.



Neste último gráfico, o ponto

P_1 de coordenadas (4; 2) representa o complexo $z = 4 + 2i$;

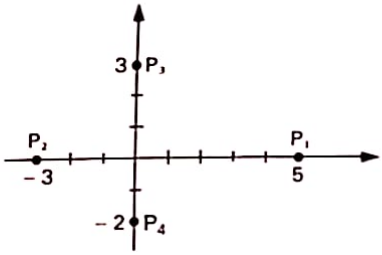
P_2 de coordenadas (−3; 1) representa o complexo $z = -3 + i$;

P_3 de coordenadas (−2; −2) representa o complexo $z = -2 - 2i$;

P_4 de coordenadas (2; −1) representa o complexo $z = 2 - i$.

Scanned by CamScanner

2. Veja agora a representação gráfica de alguns complexos particulares:



Neste gráfico temos:
P_1, (5; 0) representa o complexo $z_1 = 5 + 0i; \Rightarrow z_1 = 5;$
P_2, (– 3; 0) representa o complexo $z_2 = -3 + 0i \Rightarrow z_2 = -3;$
P_3, (0; 3) representa o complexo $z_3 = 0 + 3i \Rightarrow z_3 = 3i;$
P_4, (0; – 2) representa o complexo $z_4 = 0 - 2i \Rightarrow z_4 = -2i.$

Percebemos que, neste gráfico, os pontos do eixo de abscissas representam os números reais (veja P_1 e P_2); por isso, o eixo de abscissas chama-se eixo real; os pontos do eixo de ordenadas representam os números imaginários puros (veja P_3 e P_4); por isso, esse eixo chama-se eixo imaginário.

O ponto P, de coordenadas (a; b), que representa o complexo z, onde z = a + bi, chama-se afixo do complexo z; o plano determinado pelos eixos real e imaginário, no qual se faz a representação gráfica dos números complexos chama-se plano de Argand-Gauss.

Módulo de um número complexo

Dado um número complexo z = a + bi, chama-se módulo de z, e indica-se por $|z|$, o número real $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

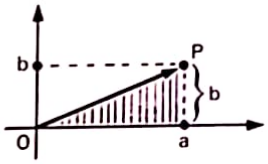
Exemplos

1. $z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5;$
2. $z = 12 - 5i \Rightarrow |z| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13;$
3. $z = 3i \Rightarrow |z| + \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3;$
4. $z = 5 \Rightarrow |z| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5;$
5. $z = -5 \Rightarrow |z| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$

Observe, pelos exemplos 4 e 5, que a definição de módulo para os números complexos coincide com a definição de módulo para os números reais, no caso particular em que o complexo é real.

O módulo de um número complexo tem significado geométrico. Ele representa o comprimento do segmento que une a origem O do sistema de coordenadas ao ponto P que representa o complexo (P é o afixo), veja:

$\left.\begin{array}{l} z = a + bi \\ P \text{ é o afixo de } z \end{array}\right\} \Rightarrow$

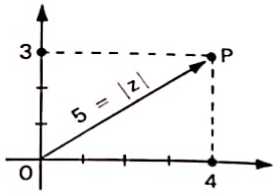


No triângulo hachurado da figura, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos: $(OP)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow OP = \sqrt{a^2 + b^2}$; então, sendo

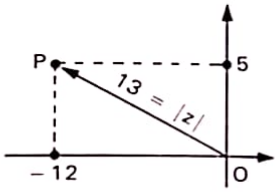
$\left.\begin{array}{l} z = a + bi \quad e \\ |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ conclui-se que $\boxed{OP = |z|}$

Exemplos

1. $z = 4 + 3i$
$z = \sqrt{4^2 + 3^2} \Rightarrow |z| = 5$
$\Rightarrow \boxed{OP = 5}$

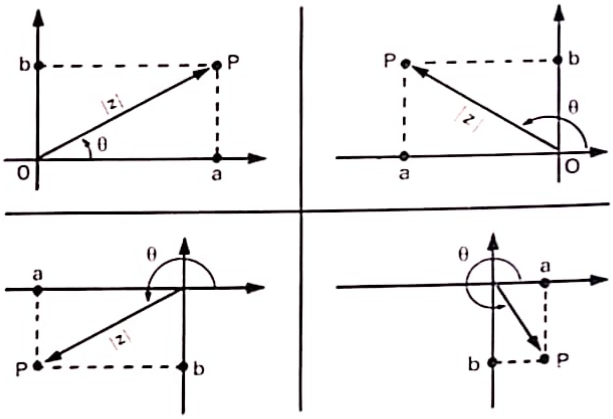


2. $z = -12 + 5i$
$z = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow |z| = 13$
$\Rightarrow \boxed{OP = 13}$



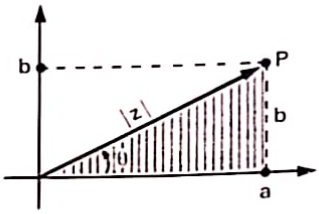
Argumento de um número complexo

Ao representarmos um número complexo z no plano de Argand-Gauss obtemos um ponto P, que é o afixo de z. Unindo a origem do sistema ao ponto P, obtemos um segmento $\overline{OP}$, cujo comprimento é o módulo de z; chamamos de argumento de z ao ângulo formado entre o eixo real e o segmento $\overline{OP}$, orientado positivamente a partir do eixo para o segmento, no sentido anti-horário. Representamos o argumento pela letra grega θ (teta) e convencionaremos que $0° \leqslant \theta < 360°$. Veja os exemplos:



O problema que agora se apresenta é o seguinte: dado o número complexo z = a + bi, é possível determinar algebricamente a medida do argumento θ, sem recorrer ao gráfico? A resposta é sim, veja como:

z = a + bi ⇒



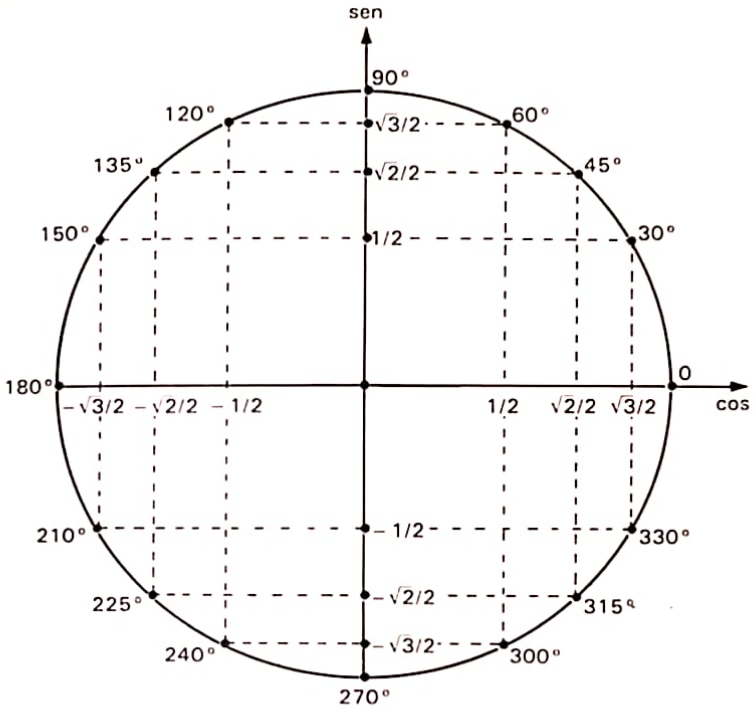
No gráfico, onde P é o afixo de z, sendo z = a + bi, analisando o triângulo hachurado, temos:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{a}{|z|} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Olhando para estas duas últimas igualdades, podemos dizer que o argumento θ é o ângulo cujo cosseno é $\frac{a}{|z|}$ e cujo seno é $\frac{b}{|z|}$; a partir destes dois dados, com o auxílio de uma tabela trigonométrica, determinamos o argumento θ.

A descoberta dos valores particulares do argumento θ fica grandemente facilitada pelo seguinte ciclo trigonométrico, no qual estão representados os valores notáveis do seno e do cosseno:



Exemplos Vamos determinar o argumento θ dos seguintes números complexos:

1. $z = 1 + i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ e } b = 1 \\ |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Então,

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

olhando a figura anterior com os valores notáveis, temos:

$$\boxed{\theta = 45°}$$

2. $z = 2 - 2\sqrt{3}i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \text{ e } b = -2\sqrt{3} \\ |z| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = 4 \end{cases}$$

Então,

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{|z|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{b}{|z|} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

pela figura dos valores notáveis:

$$\boxed{\theta = 300°}$$

3. $z = 8i \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ e } b = 8 \\ |z| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8 \end{cases}$

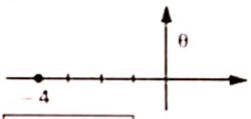
Então,

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{|z|} = \frac{0}{8} = 0 \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{b}{|z|} = \frac{8}{8} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

pela figura dos valores notáveis,

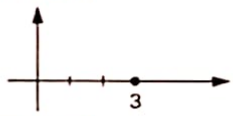
$$\boxed{\theta = 90°}$$

4. $z = -4$



$$\boxed{\theta = 180°}$$

5. $z = 3$



$$\boxed{\theta = 0°}$$

OBSERVAÇÃO Nos casos em que o complexo é real ou imaginário puro, é mais fácil achar o argumento pelo gráfico do que pela trigonometria.

Forma trigonométrica dos complexos

Quando escrevemos um complexo z como $z = a + bi$ estamos escrevendo-o na forma algébrica: é possível, porém, reescrever o mesmo complexo em função do seu módulo e do seu argumento — é a forma trigonométrica do complexo.

Sendo $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, temos:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cdot \cos\theta \quad \text{(I)}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \cdot \operatorname{sen}\theta \quad \text{(II)}$$

Substituindo os resultados (I) e (II) em $z = a + bi$, temos:

$$z = |z| \cdot \cos\theta + |z| \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot i$$

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot i)$$

$\boxed{z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)}$, que é a forma trigonométrica do complexo z.

Exemplos

1. O número $z = 4 \cdot (\cos 45° + i \cdot \operatorname{sen} 45°)$ é um número complexo escrito na forma trigonométrica; temos:

módulo de $z = |z| = 4$ e argumento de $z = \theta = 45°$.

Podemos escrever esse número na forma algébrica, substituindo cos 45° e sen 45° por $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$z = 4 \cdot (\cos 45° + i \cdot \operatorname{sen} 45°) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot i$$

2. O número $z = 6 \cdot (\cos 60° + i \cdot \operatorname{sen} 60°)$ é um número complexo escrito na forma trigonométrica; temos:

módulo de $z = |z| = 6$ e argumento de $z = \theta = 60°$.

Para escrever z na forma algébrica, substituímos cos 60° e sen 60° por $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$, respectivamente:

Scanned by CamScanner

$z = 6 \cdot (\cos 60° + i \cdot \text{sen}\, 60°) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= 3 + 3\sqrt{3} \cdot i.$

3. O número $z = 5 \cdot (\cos 180° + i \cdot \text{sen}\, 180°)$ é um número complexo escrito na forma trigonométrica; temos:

módulo de $z = |z| = 5$ e argumento de $z = \theta = 180°$.

Escrevemos z na forma algébrica, substituindo cos 180° e sen 180° por -1 e por 0, respectivamente:

$z = 5 \cdot (\cos 180° + i \cdot \text{sen}\, 180°) = 5 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -5.$

4. O número $z = -2 + 2i$ pode ser escrito na forma trigonométrica, calculando-se, primeiramente, seu módulo e seu argumento:

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = 135°$$

Agora, $z = -2 + 2i$ na forma trigonométrica se escreve:

$z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) \Rightarrow$
$\Rightarrow z = 2\sqrt{2} \cdot (\cos 135° + i \cdot \text{sen}\, 135°)$

5. O número $z = 4 - 4\sqrt{3} \cdot i$ pode ser escrito na forma trigonométrica se calcularmos inicialmente seu módulo e seu argumento:

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 16 \cdot 3} = \sqrt{64} = 8$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{-4\sqrt{3}}{8} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = 300°$$

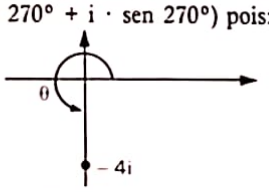
Agora, $z = 4 - 4\sqrt{3} \cdot i$, na forma trigonométrica se escreve:

$z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) \Rightarrow$
$\Rightarrow z = 8 \cdot (\cos 300° + i \cdot \text{sen}\, 300°)$

6. O número imaginário puro $z = -4i$ escrito na forma trigonométrica fica $z = 4 \cdot (\cos 270° + i \cdot \text{sen}\, 270°)$ pois:

$\begin{cases} \text{módulo de } z = |z| = 4 \\ \text{argumento de } z = \theta = 270° \end{cases}$

(estes valores ficam evidentes se fizermos a representação gráfica de z).



Potenciação de complexos

O problema que agora passamos a resolver é o seguinte: dado um número complexo z, sendo $z = a + bi$, como fazemos para obter z^n, isto é, $(a + bi)^n$, onde $n \in \mathbb{N}$?

Fundamentalmente temos duas opções:

1ª Escrevemos $(a+bi)^n$ como um produto de n fatores iguais a $(a+bi)$ e aplicamos a distributiva do produto:

$$\underbrace{(a+bi)^n = (a+bi) \cdot (a+bi) \cdot (a+bi) \ldots (a+bi)}_{n \text{ fatores } (a+bi)}$$

OBSERVAÇÃO Este caminho (só razoável se o expoente n for pequeno) é bastante trabalhoso, por isso deve ser evitado. No livro IV, estudaremos um meio mais fácil de resolução, usando o desenvolvimento do binômio de Newton para $(a+bi)^n$.

2ª Usamos a fórmula de Moivre.

A demonstração desta fórmula foge aos objetivos deste nosso curso; iremos apenas aplicá-la em exercícios.

A fórmula consiste do seguinte: dado um número complexo z escrito na forma trigonométrica

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta),$$

o número z^n, $n \in \mathbb{N}$, é um novo número complexo tal que:

- o módulo de z^n é igual ao módulo de z com expoente n: $|z^n| = (|z|)^n$;
- o argumento de z^n é igual ao argumento de z multiplicado por n: $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$.

Simbolicamente, temos:

$$\boxed{z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}\,(n\theta))}$$

Exemplos

1. $z = 2 \cdot (\cos 45° + i \cdot \text{sen}\, 45°) \Rightarrow$
$\Rightarrow z^4 = 2^4 \cdot (\cos(4 \cdot 45°) + i \cdot \text{sen}\,(4 \cdot 45°))$
$\Rightarrow z^4 = 16 \cdot (\cos 180° + i \cdot \text{sen}\, 180°)$
$\Rightarrow z^4 = 16 \cdot (-1 + i \cdot 0) \Rightarrow \boxed{z^4 = -16}$

2. $z = 3 \cdot (\cos 60° + i \cdot \text{sen}\, 60°) \Rightarrow$
$\Rightarrow z^5 = 3^5 \cdot [\cos(5 \cdot 60°) + i \cdot \text{sen}\,(5 \cdot 60°)]$
$\Rightarrow z^5 = 243 \cdot (\cos 300° + i \cdot \text{sen}\, 300°)$
$\Rightarrow z^5 = 243 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{z^5 = \frac{243}{2}(1 - i\sqrt{3})}$

3. Sendo $z = 4 - 4\sqrt{3} \cdot i$, calcule z^{10}.

Só podemos aplicar a fórmula de Moivre se o complexo z estiver escrito na forma trigonométrica. Então, temos: $z = 4 - 4\sqrt{3} \cdot i \Rightarrow z = 8 \cdot (\cos 300° + i \cdot \text{sen}\, 300°)$, conforme o exemplo 5 do item anterior.

Aplicamos agora a fórmula de Moivre:

$z^{10} = 8^{10} \cdot [\cos(10 \times 300°) + i \cdot \text{sen}\,(10 \times 300°)]$
$z^{10} = (2^3)^{10} \cdot (\cos 3000° + i \cdot \text{sen}\, 3000°)$

Para obter o seno e o cosseno de 3000°, dividimo-lo por 360° para eliminar as voltas completas nele contidas:

$$\begin{array}{r|l} 3000° & 360° \\ \hline 120 & 8 \text{ voltas} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } 3000° = \text{sen } 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 3000° = \cos 120° = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

Substituindo esses valores na última igualdade obtida, temos:

$z^{10} = 2^{30} \cdot (\cos 120° + i \cdot \text{sen}\, 120°)$
$z^{10} = 2^{30} \cdot \left(\frac{-1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$z^{10} = \frac{2^{30}}{2} \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3}) \Rightarrow \boxed{z^{10} = 2^{29} \cdot (-1 + i\sqrt{3})}$

EXERCÍCIOS

1. Dado $z = \cos 45° + i \cdot \text{sen}\, 45°$, calcular z^{-10}.

Solução

Como $z^{-10} = \frac{1}{z^{10}}$, calculamos, inicialmente, z^{10}; para obter z^{10}, usamos a fórmula de Moivre:

Scanned by CamScanner

$z^{10} = (|z|)^{10} \cdot [(\cos(10 \times 45°) + i \cdot \text{sen}(10 \times 45°)]$; como $|z| = 1$, temos: $z^{10} = 1 \cdot (\cos 450° + i \cdot \text{sen } 450°)$; agora, como 450° é maior do que uma volta, eliminamos essa volta, obtendo: $\cos 450° = \cos 90° = 0$ e

$\text{sen } 450° = \text{sen } 90° = 1$.

Voltando à expressão de z^{10}, temos:

$z^{10} = 1 \cdot (\cos 90° + i \cdot \text{sen } 90°) = 1 \cdot (0 + i \cdot 1)$ e, portanto, $z^{10} = i$.

Agora, podemos calcular z^{-10} pois $z^{-10} = \frac{1}{z^{10}}$ e, portanto,

$$z^{-10} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i.$$

Finalizando, temos, então: $\boxed{z^{-10} = -i}$

2. Sendo $z = 3 + 4i$, calcule o módulo de z^4.

Solução

Pela fórmula de Moivre, sabemos que $|z^4| = (|z|)^4$; portanto, basta calcular $|z|$ e, a seguir, elevá-lo ao expoente 4.

Temos, então: $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$; portanto, sendo $|z| = 5 \Rightarrow |z^4| = (|z|)^4 = 5^4 = 625$.

3. Trabalhando no campo dos números complexos:

a) calcule as raízes quadradas de -1;

b) resolva a equação $x^2 + 1 = 0$.

Solução

a) Por definição de raiz quadrada, chama-se "raiz quadrada de -1" ao número x, tal que $x \cdot x = -1$, isto é, $x^2 = -1$.

Evidentemente, esta igualdade é impossível em $\mathbb{R}$; no entanto, em $\mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos) isto é possível pois: $i^2 = -1$ (definição da unidade imaginária) e, também, $(-i)^2 = i^2 = -1$ e, portanto, i e $-i$ são as raízes quadradas de -1, em $\mathbb{C}$.

b) Resolver a equação $x^2 + 1 = 0$ é equivalente a resolver a equação $x^2 = -1$; esta equação nos diz que x deve ser uma raiz quadrada de -1 e, pelo item anterior, as raízes quadradas de -1 são i e $-i$.

Logo, as soluções da equação $x^2 = -1$ são i e $-i$.

4. Trabalhando no campo dos números complexos:

a) calcule as raízes quadradas de -4;

b) resolva a equação $x^2 - 4x + 5 = 0$.

Solução

a) As raízes quadradas de -4 são os números x tais que $x \cdot x = -4$, isto é, $x^2 = -4$. Acompanhe, com cuidado, a resolução desta igualdade:

$$x^2 = -4 \Rightarrow x^2 = 4 \cdot (-1) \Rightarrow \frac{x^2}{4} = -1 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = -1.$$

Esta última igualdade nos diz que $\frac{x}{2}$ deve ser uma raiz quadrada de -1; pelo exercício anterior, sabemos que as raízes quadradas de -1 são i e $-i$; portanto, $\frac{x}{2} = i$ ou $\frac{x}{2} = -i$; destas duas igualdades concluímos que

$\boxed{x = 2i \text{ ou } x = -2i}$

b) Vamos resolver a equação $x^2 - 4x + 5 = 0$; é uma equação do 2º grau e, portanto, usamos a fórmula de Bhaskara para resolvê-la:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Calculamos, inicialmente, o discriminante Δ:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$$

Agora, para continuar, precisamos calcular as raízes quadradas de -4, o que só é possível em $\mathbb{C}$. Pelo resultado do item anterior, temos que as raízes quadradas de -4, em $\mathbb{C}$, são $2i$ e $-2i$.

Voltamos agora à fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, usando para $\sqrt{\Delta}$ o valor $2i$ (poderia ser usado também o valor $-2i$, pois o resultado final seria o mesmo):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 2i}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Portanto, as soluções da equação dada são $2 + i$ e $2 - i$ e, portanto, o conjunto solução é $\{2 + i; 2 - i\}$.

POLINÔMIOS

Um polinômio ou função polinomial P, na variável x, é toda expressão do tipo:

$$\boxed{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}$$

onde $a_0, a_1, \ldots a_n$ são números complexos, $x \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$; assim, são polinomiais as funções $P_1(x) = 4x^3 + x^2 + 2x - 5$; $P_2(x) = 3x + 1$; $P_3(x) = 2$, por exemplo. Não se denominarão polinômios as expressões que contenham a variável x com expoentes negativos ou fracionários, por exemplo, $x^3 + \frac{1}{x} - 1$; $x^{1/2} - 3$; $x^{-2} + \sqrt{x}$.

Valor numérico de um polinômio

Se $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ é um polinômio e α é um número complexo qualquer, chama-se valor numérico do polinômio P no ponto α ao número complexo que se obtém substituindo x por α na expressão que define P(x), ou seja, é o número:

$$\boxed{P(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n}$$

Por exemplo, os valores numéricos do polinômio $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 3$ nos pontos $x = 0$; $x = 1$ e $x = -2$ são respectivamente:

$P(0) = 2 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 0 - 3 = -3$;

$P(1) = 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 - 3 = -4$;

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2)^2 + (-2) - 3 = -37$.

OBSERVAÇÃO Quando ocorrer $P(\alpha) = 0$, dizemos que o número α é uma raiz ou um zero do polinômio P. Por exemplo, as raízes do polinômio $P(x) = x^2 - 4$ são -2 e 2, já que $P(-2) = P(2) = 0$.

Scanned by CamScanner

Polinômio identicamente nulo

Dizemos que um polinômio $P(x)$ é identicamente nulo (ou apenas nulo) quando ocorre $P(\alpha) = 0$, para todo número complexo α. Temos que:

> A condição necessária e suficiente para que um polinômio $P(x)$ seja identicamente nulo é que seus coeficientes sejam todos nulos.

Estamos, então, afirmando que um polinômio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ é identicamente nulo se, e somente se, $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$.

Por exemplo, para que o polinômio $P(x) = ax^2 + (b-1)x + c$ seja identicamente nulo, devemos ter $a = 0$, $b - 1 = 0$ e $c = 0$, ou seja, $a = 0$, $b = 1$ e $c = 0$.

Princípio de identidade de polinômios

Sendo $A(x)$ e $B(x)$ dois polinômios quaisquer, dizemos que $A(x)$ é idêntico a $B(x)$ quando ocorre $A(\alpha) = B(\alpha)$, para todo número complexo α. Indicamos essa identidade por $A(x) \equiv B(x)$.

> A condição necessária e suficiente para que dois polinômios, reduzidos e ordenados, sejam idênticos, é que seus coeficientes sejam ordenadamente iguais.

Assim, por exemplo, para que os polinômios $A(x) = 3x^2 + 4x + 1$ e $B(x) = ax^2 + bx + c$ sejam idênticos devemos ter $a = 3$, $b = 4$ e $c = 1$.

EXERCÍCIOS

1. Dado o polinômio $P(x) = x^3 - 4x^2 + x$, calcular $P(0)$ e $P(1)$.

Solução

$P(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 0 = 0;$
$P(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 = -2.$

2. Os polinômios $A(x) = 4x^3 + ax^2$ e $B(x) = bx^3 + 2x^2 + cx$ são idênticos. Determine as constantes a, b e c.

Solução

Aplicando o princípio da identidade de polinômios, temos:

$A(x) \equiv B(x) \Rightarrow 4x^3 + ax^2 \equiv bx^3 + 2x^2 + cx \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x^3 + ax^2 + 0x \equiv bx^3 + 2x^2 + cx \Rightarrow$
$\Rightarrow b = 4;\ a = 2$ e $c = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{a = 2;\ b = 4 \text{ e } c = 0}$

3. Determinar a, b e c de modo que o polinômio $P(x) = (a-2)x^3 + bx^2 + c - 1$, seja identicamente nulo.

Solução

Para termos $P(x)$ identicamente nulo, os coeficientes de $P(x)$ devem ser todos nulos. Para que isso ocorra devemos ter:

$$\left.\begin{array}{l} a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \\ b = 0 \\ c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = 2;\ b = 0 \text{ e } c = 1}$$

Grau de um polinômio

O grau de um polinômio $P(x)$, não nulo, é o maior expoente da variável x, com coeficiente não nulo, que aparece na representação do polinômio $P(x)$. Indicamos o grau de um polinômio $P(x)$ por $gr(P)$.

Exemplos

1. O grau do polinômio $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$ é 4;
2. O grau do polinômio $P(x) = 3x^7$ é 7;
3. O grau do polinômio $P(x) = 2x + 3$ é 1;
4. O grau do polinômio $P(x) = 5$ é 0.

> **OBSERVAÇÃO** Não se define grau do polinômio nulo.

Operações com polinômios

Adição, subtração e multiplicação:

Certamente você já sabe efetuar estas operações. Faremos alguns exercícios a título de recordação.

EXERCÍCIOS

1. Dados os polinômios $A(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, $B(x) = x^2 + 1$ e $C(x) = 3x - 1$, obter os polinômios:

a) $A(x) + B(x)$;
b) $A(x) \cdot B(x)$;
c) $B(x) - C(x)$;
d) $[B(x)]^2$;
e) $[C(x)]^2 - A(x)$.

Solução

a) $A(x) + B(x) = (x^3 - 2x^2 + 1) + (x^2 + 1) = x^3 - x^2 + 2$
b) $A(x) \cdot B(x) = (x^3 - 2x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)$. Aplicando a propriedade distributiva, obtemos:
$A(x) \cdot B(x) = x^3 \cdot x^2 + x^3 \cdot 1 - 2x^2 \cdot x^2 - 2x^2 \cdot 1 + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot 1$
$A(x) \cdot B(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 1$
c) $B(x) - C(x) = (x^2 + 1) - (3x - 1) = x^2 + 1 - 3x + 1$
$B(x) - C(x) = x^2 - 3x + 2$
d) $[B(x)]^2 = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$
e) $[C(x)]^2 - A(x) = (3x - 1)^2 - (x^3 - 2x^2 + 1) = 9x^2 - 6x + 1 - x^3 + 2x^2 - 1$, portanto:
$[C(x)]^2 - A(x) = -x^3 + 11x^2 - 6x$

2. Os polinômios $P(x) = 2x^2 + 17$ e $Q(x) = (x^2 + b)^2 - (x^2 - a^2) \cdot (x^2 + a^2)$ são iguais. Determinar os valores reais de a e b.

Solução

Temos que: $Q(x) = (x^2 + b)^2 - (x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = x^4 + 2bx^2 + b^2 - (x^4 - a^4) = \cancel{x^4} + 2bx^2 + b^2 - \cancel{x^4} + a^4$; logo $Q(x) = 2bx^2 + b^2 + a^4$

$P(x) \equiv Q(x) \Rightarrow 2x^2 + 17 = 2bx^2 + b^2 + a^4$

$$\begin{cases} 2b = 2 & \text{(I)} \\ b^2 + a^4 = 17 & \text{(II)} \end{cases}$$

A equação (I) nos dá $b = 1$, que substituindo em (II), dará $1 + a^4 = 17 \Rightarrow a^4 = 16 \Rightarrow a = \pm\sqrt[4]{16} \Rightarrow a = \pm 2$.

Logo $\boxed{a = \pm 2 \text{ e } b = 1}$.

Scanned by CamScanner

Divisão de polinômios

Dividir um polinômio A(x) por um polinômio B(x), não nulo, é, por definição, achar um par de polinômios Q(x) e R(x), de tal maneira que:

$$\boxed{A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)}$$

sendo que:

$$\boxed{gr(R) < gr(B) \text{ ou } R(x) \equiv 0}$$

Podemos representar esta divisão da seguinte maneira:

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

O polinômio A(x) chama-se dividendo, B(x), divisor Q(x), quociente e R(x), resto. Observe que a definição de divisão exige que o grau do resto seja menor que o grau do divisor ou, então, que o resto seja nulo.

Quando o resto R(x), da divisão de A(x) por B(x), for nulo, dizemos que o polinômio A(x) é divisível por B(x).

Vamos ver, através de um exemplo, como efetuar a divisão de dois polinômios. O processo que utilizaremos no exemplo seguinte denomina-se método da chave.

Suponhamos a divisão de $A(x) = 2x^3 + 3x - 1$ por $B(x) = x^2 + 2x + 5$:

• colocamos os polinômios A e B numa chave, como na divisão de números inteiros; é conveniente, para evitar erros, que compareçam com coeficiente nulo as potências de x que não figuram no polinômio A. Neste exemplo, A não possui termo em x^2, portanto escrevemos:

$$2x^3 + 0x^2 + 3x - 1 \,\big|\, x^2 + 2x + 5$$

• dividimos o primeiro termo de A pelo primeiro termo de B (neste caso, $2x^3 : x^2 = 2x$), obtendo o primeiro termo do quociente Q:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + 0x^2 + 3x - 1 & x^2 + 2x + 5 \\ \hline & 2x \end{array}$$

• multiplicamos o primeiro termo de Q pelo divisor B e subtraímos o resultado de A. Faça isso colocando o produto $2x \cdot (x^2+2x+5)$ embaixo de A com todos os sinais trocados:

$$\begin{array}{rl|l} + & 2x^3+0x^2+3x-1 & x^2+2x+5 \\ \cline{3-3} & -2x^3-4x^2-10x & 2x \\ \cline{2-2} & -4x^2-7x-1 & \end{array}$$

O resultado $-4x^2 - 7x - 1$ é o primeiro resto parcial. Como esse resultado é um polinômio de grau 2 e o divisor também tem grau 2, repetimos todo o processo anterior (dividimos $-4x^2$ por x^2) até obtermos um resto cujo grau seja menor que o grau do divisor ou resto nulo (no caso da divisão ser exata).

$$\begin{array}{rl|l} + & \cancel{2x^3} + 0x^2 + 3x - 1 & x^2+2x+5 \\ \cline{3-3} & \cancel{-2x^3} - 4x^2 - 10x & 2x-4 \\ \cline{2-2} & + \cancel{-4x^2} - 7x - 1 & \\ & \cancel{4x^2} + 8x + 20 & \\ \cline{2-2} & x+19 & \end{array}$$

O resto obtido agora, x + 19, tem grau menor que o divisor, portanto a divisão está encerrada.

Assim, o quociente é $Q(x) = 2x - 4$ e o resto é $R(x) = x + 19$.

Observe bem! Deve sempre ocorrer $A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$; no nosso exemplo,

$2x^3 + 3x - 1 = (x^2 + 2x + 5) \cdot (2x - 4) + x + 19.$

EXERCÍCIOS

1. Obter o quociente e o resto da divisão de $x^4 - 1$ por $x - 2$.

Solução

Pela chave:

$$\begin{array}{rl|l} + & \cancel{x^4} + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & x - 2 \\ \cline{3-3} & \cancel{-x^4} + 2x^3 & x^3+2x^2+4x+8 \\ \cline{2-2} & + \cancel{2x^3} + 0x^2 + 0x - 1 & \\ & \cancel{-2x^3} + 4x^2 & \\ \cline{2-2} & + \cancel{4x^2} + 0x - 1 & \\ & \cancel{-4x^2} + 8x & \\ \cline{2-2} & + \cancel{8x} - 1 & \\ & \cancel{-8x} + 16 & \\ \cline{2-2} & 15 & \end{array}$$

Portanto: $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$ e $R(x) = 15$.

2. Na divisão de um polinômio P(x) por $x^2 - x + 2$, obtém-se quociente $Q(x) = 2x + 1$ e resto $R(x) = 4x - 3$. Obter o polinômio P(x).

Solução

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x^2 - x + 2 \\ \hline 4x - 3 & 2x + 1 \end{array}$$

A resolução é bem simples; pela definição de divisão, devemos ter $P(x) = (x^2 - x + 2) \cdot (2x + 1) + 4x - 3$, ou efetuando $P(x) = 2x^3 - x^2 + 7x - 1$.

3. Determinar a constante a para que o polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + x$ seja divisível por $x^2 + x + a$.

Solução

Inicialmente, vamos efetuar a divisão pela chave:

$$\begin{array}{rl|l} + & \cancel{x^3} + ax^2 + x + 0 & x^2 + x + a \\ \cline{3-3} & \cancel{-x^3} - x^2 - ax & x + (a - 1) \\ \cline{2-2} & \cancel{(a-1)x^2} + (1 - a)x + 0 & \\ + & \cancel{-(a-1)x^2} - (a - 1)x - a(a - 1) & \\ \cline{2-2} & [(1 - a) - (a - 1)]x - a(a - 1) & \end{array}$$

efetuando as operações em R(x), obteremos

$$R(x) = (2 - 2a)x - a(a - 1)$$

Como P(x) deve ser divisível por $x^2 + x + a$, o resto obtido, $R(x) = (2 - 2a)x - a(a - 1)$, deve ser identicamente nulo, o que ocorre, como já vimos somente se seus coeficientes forem todos nulos, isto é, devemos ter:

$$\begin{cases} 2 - 2a = 0 \\ \quad e \\ -a(a - 1) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo as equações acima, obtemos a = 1.

Scanned by CamScanner

Teorema do resto

> O resto r, da divisão do polinômio P(x) pelo binômio x − a, é igual ao valor numérico do polinômio P(x) para x = a, isto é, r = P(a).

Demonstração:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - a \\ \hline r & Q(x) \end{array}$$

portanto, $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + r$.

Substituindo x = a na identidade acima, teremos:

$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + r$,
$P(a) = 0 \cdot Q(a) + r \Rightarrow P(a) = r$.

★ EXERCÍCIO

Calcular o resto da divisão de $P(x) = x^3 - 2x + 1$ por $x - 2$.

Solução

Pelo teorema do resto temos que r = P(2). Calculando P(2), temos:

$P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 8 - 4 + 1 = 5$

Portanto: r = P(2) = 5

Teorema de D'Alembert

> O polinômio P(x) é divisível por x − a se, e somente se, o número a for raiz do polinômio P(x), isto é, se, e somente se, P(a) = 0.

A explicação é simples. Ao dividir P(x) por x − a, já sabemos que o resto será r = P(a). Mas, se P(x) for divisível por x − a, então devemos ter r = 0, ou seja, P(a) = 0 e, então, a será raiz de P(x).

Por exemplo, o polinômio $P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 2$ admite o número 1 como raiz; de fato:

$P(1) = 3 \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1 - 2 = 3 - 2 + - 1 + 2 - 2 = 0$. Concluímos, então, que $3x^4 - 2x^3 + - x^2 + 2x - 2$ é divisível por x − 1.

EXERCÍCIOS

1. Calcule os restos das divisões seguintes, sem efetuá-las:

a) $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ por $x - 5$;
b) $P(x) = x^2 + 2x - 1$ por $x + 1$;
c) $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 5$ por x;
d) $P(x) = -x^5 + 1$ por $x + 2$.

Solução

a) o resto procurado é:
$r = P(5) = 5^4 - 2 \cdot 5^3 + 5^2 = 625 - 250 + 25 = 400$
b) o resto procurado é:
$r = P(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = 1 - 2 - 1 = -2$
c) $r = P(0) = 2 \cdot 0^3 - 0^2 + 3 \cdot 0 + 5 = 5$
d) $r = P(-2) = -(-2)^5 + 1 = -(-32) + 1 = 33$.

2. O polinômio $P(x) = x^3 + bx^2 - 2x + 3$ é divisível por x − 1. Calcule b.

Solução

Se P(x) é divisível por x − 1, temos r = P(1) = 0, ou seja, $1^3 + b \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 0$, dando b = −2.

3. (FAAP-SP) Calcular a e b para que os polinômios $P(x) = x^2 + ax - 3b$ e $Q(x) = -x^3 + 2ax - b$ sejam divisíveis por x − 1.

Solução

$$\begin{cases} P(x) \text{ é divisível por } x - 1 \\ Q(x) \text{ é divisível por } x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(1) = 0 \\ Q(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1^2 + a \cdot 1 - 3b = 0 \\ -1^3 + 2a \cdot 1 - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 3b = -1 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 4/5} \quad \text{e} \quad \boxed{b = 3/5}$$

4. (FEI-SP) Determine o valor de a para que o polinômio $P(x) = x^3 + (1 - a)x^2 + (1 + a)x - 1$ seja divisível por x − a.

Solução

P(x) é divisível por $x - a \Leftrightarrow P(a) = 0 \Rightarrow a^3 + (1 - a) \cdot a^2 + (1 + a) \cdot a - 1 = 0 \Rightarrow \cancel{a^3} + a^2 - \cancel{a^3} + a + a^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2a^2 + a - 1 = 0$.

Resolvendo a equação de 2º grau acima, obtemos:

$$\boxed{a = -1} \quad \text{ou} \quad \boxed{a = 1/2}$$

5. (UF-MG) Dividindo-se um polinômio P(x) por (x − 1) achou-se resto 6 e dividindo-o por (x − 2) achou-se resto 18. Qual o resto da divisão de P(x) pelo produto (x − 1)(x − 2)?

Solução

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - 1 \\ \hline 6 & Q_1(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} P(x) & x - 2 \\ \hline 18 & Q_2(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} P(x) & (x - 1)(x - 2) \\ \hline ax + b & Q(x) \end{array}$$

Inicialmente, observe que:

P(x) dividido por x − 1 dá resto 6 ⇔ P(1) = 6 (I)

P(x) dividido por x − 2 dá resto 18 ⇔ P(2) = 18 (II)

Esta passagem é importante: ao dividir P(x) pelo produto (x − 1)(x − 2), o resto R(x) ou será nulo ou terá grau no máximo igual a 1, pois o divisor tem grau 2. Logo, R(x) será da forma ax + b, com a e b a determinar. Chamando o quociente dessa divisão de Q(x) podemos escrever, pela definição de divisão:

$P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot Q(x) + ax + b$ (III)

Substituindo x, sucessivamente, por 1 e 2, em (III), obtemos:

$$\begin{cases} P(1) = (1 - 1) \cdot (1 - 2) \cdot Q(1) + a \cdot 1 + b \\ P(2) = (2 - 1) \cdot (2 - 2) \cdot Q(2) + a \cdot 2 + b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(1) = a + b \quad \text{(IV)} \\ P(2) = 2a + b \quad \text{(V)} \end{cases}$$

Mas, por (I) e (II), temos P(1) = 6, P(2) = 18 e então, por substituição nas equações (IV) e (V), obtemos:

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ 2a + b = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = -6 \end{cases}$$

Portanto, o resto $R(x) = ax + b$ é $\boxed{R(x) = 12x - 6}$.

Divisibilidade pelo produto $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$

Se um polinômio P(x) é divisível, separadamente, por $(x - \alpha)$ e por $(x - \beta)$, $\alpha \neq \beta$, então P(x) será divisível pelo produto $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$.

Scanned by CamScanner

Demonstração:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-\alpha \\ \hline 0 & Q_1(x) \end{array} \quad \begin{array}{l|l} P(x) & x-\beta \\ \hline 0 & Q_2(x) \end{array} \quad \begin{array}{l|l} P(x) & (x-\alpha)\cdot(x-\beta) \\ \hline ax+b & Q(x) \end{array}$$

Inicialmente:

$P(x)$ divisível por $x - \alpha \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$ (I)

$P(x)$ divisível por $x - \beta \Leftrightarrow P(\beta) = 0$ (II)

Como já vimos anteriormente, o resto da divisão de $P(x)$ pelo produto $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$ será no máximo de grau 1, ou seja, temos:

$R(x) = ax + b$, com a e b a determinar.

Para mostrar que $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$ precisamos mostrar que $a = b = 0$.

Novamente temos:

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot (x - \beta) \cdot Q(x) + ax + b \quad \text{(III)}$$

Substituindo x, sucessivamente, por α e β, em (III) e levando em conta (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} P(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot (\alpha - \beta) \cdot Q(\alpha) + a \cdot \alpha + b \\ P(\beta) = (\beta - \alpha) \cdot (\beta - \beta) \cdot Q(\beta) + a \cdot \beta + b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = a \cdot \alpha + b \quad \text{(IV)} \\ 0 = a \cdot \beta + b \quad \text{(V)} \end{cases}$$

De (IV) (V) vem: $0 = a \cdot \alpha - a \cdot \beta \Rightarrow 0 = a \cdot (\alpha - \beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 0$ pois $\alpha \neq \beta$.

Substituindo $a = 0$ em (IV), vem $b = 0$; logo

$R(x) = ax + b = 0$ e $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$.

EXERCÍCIOS

1. Mostrar que o polinômio $P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + - 12x + 8$ é divisível por $(x - 1) \cdot (x - 2)$.

Solução

Para demonstrar que $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - 1) \cdot (x - 2)$, basta demonstrar que $P(x)$ é divisível, separadamente, por $x - 1$ e por $x - 2$. Para isso, basta mostrarmos que $P(1) = 0$ e $P(2) = 0$.

De fato:

$$P(1) = 1^5 - 3 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 8 = \\ = 1 - 3 + 2 + 4 - 12 + 8 = 0$$

$$P(2) = 2^5 - 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 8 = \\ = 32 - 48 + 16 + 16 - 24 + 8 = 0$$

2. Mostrar que o polinômio $P(x) = x^{100} - 2x^{50} + 1$ é divisível por $x^2 - 1$.

Solução

Observando que $x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$, basta demonstrar que $P(x)$ é divisível tanto por $x + 1$ como por $x - 1$, de onde resultará que $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - 1) \cdot (x + 1)$.

Para mostrar que $P(x)$ é divisível por $x + 1$, mostramos que $P(-1) = 0$. De fato:

$$P(-1) = (-1)^{100} - 2 \cdot (-1)^{50} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

Analogamente, para mostrar que $P(x)$ é divisível por $x - 1$, mostramos que $P(1) = 0$. De fato:

$$P(1) = 1^{100} - 2 \cdot 1^{50} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

Portanto como $P(1) = 0$ e $P(-1) = 0$, o polinômio $P(x)$ é divisível por $x - 1$ e por $x + 1$ sendo conseqüentemente divisível por $(x - 1) \cdot (x + 1)$.

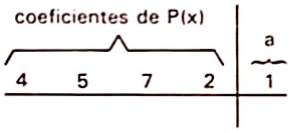
Dispositivo de Briot-Ruffini

Quando dividimos um polinômio $P(x)$ por $x - a$, o resto, como já vimos, pode ser obtido rapidamente sem efetuarmos a divisão. No caso, porém, de querermos o quociente e o resto da divisão, podemos determiná-los através do chamado dispositivo de Briot-Ruffini, que mostramos a seguir, através de exemplos.

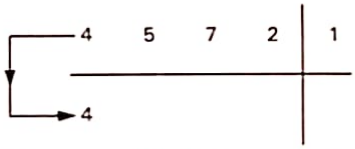
Exemplos

1. Suponhamos a divisão do polinômio $P(x) = 4x^3 + 5x^2 + + 7x + 2$ pelo binômio $x - 1$. As fases de execução são as seguintes:

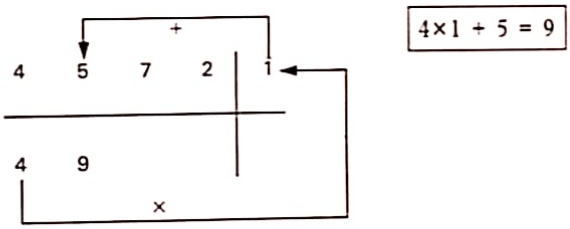
• colocamos, em seqüência, os coeficientes de $P(x)$ e, em seguida, o número a (que, neste exemplo, vale 1):



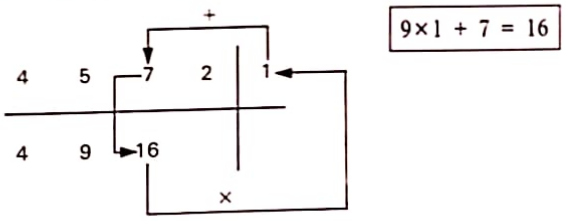
• baixamos o 1º coeficiente de $P(x)$:



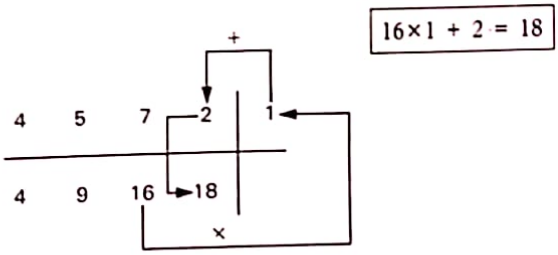
• multiplicamos esse 1º coeficiente pelo número a e somamos o resultado ao próximo coeficiente (5) de $P(x)$, colocando o resultado embaixo do 2º coeficiente:



• repetimos a passagem anterior com o número 9, isto é, fazemos $9 \times 1 + 7 = 16$ e colocamos o resultado embaixo do 7:



• tudo de novo, com o 16, colocando o resultado embaixo do último coeficiente de $P(x)$:



Scanned by CamScanner

• veja agora como identificar os números obtidos: o último número (18) é o resto da divisão: os anteriores são os coeficientes do quociente: como P(x) tem grau 3 e o divisor $x - 1$ tem grau 1, o quociente é de grau 2. Temos, então:

4	5	7	2	1
4	9	16	18	
↑ coef. de x^2	↑ coef. de x	↑ termo indep.	↑ r	

Assim: $Q(x) = 4x^2 + 9x + 16$ e $r = 18$.

2. Vejamos agora, a divisão de $P(x) = x^4 - 3x^2 + x + 3$ por $x + 2$.

Faremos todas as operações numa única chave. Não esqueça que o coeficiente de x^3 em P(x) é 0, e que $a = -2$:

1	0	−3	1	3	−2
1	−2	1	−1	5	
coef. de Q(x)				↑ r	

Os cálculos foram:

$$\begin{cases} 1 \cdot (-2) + 0 = -2 \\ (-2) \cdot (-2) + (-3) = 1 \\ 1 \cdot (-2) + 1 = -1 \\ (-1) \cdot (-2) + 3 = 5 \end{cases}$$

Portanto: $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ e $r = 5$.

EXERCÍCIO

Obter o quociente e o resto das divisões seguintes:

a) $P(x) = 3x^2 - 2x + 5$ por $x - 4$;
b) $P(x) = x^4 - 1$ por $x - 1$;
c) $P(x) = x^4 - 1$ por $x + 1$;
d) $P(x) = 7x^3 + 2x^2 - 8x + 3$ por x.

Solução

a)

3	−2	5	4
3	10	45	

$Q(x) = 3x + 10$; $r = 45$

b)

x^4	x^3	x^2	x		
1	0	0	0	−1	1
1	1	1	1	0	

$Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$; $r = 0$

c)

1	0	0	0	−1	−1
1	−1	1	−1	0	

$Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$; $r = 0$

d)

7	2	−8	3	0
7	2	−8	3	

$Q(x) = 7x^2 + 2x - 8$; $r = 3$

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Se P(x) é um polinômio de grau $n > 0$, chama-se equação algébrica ou equação polinomial à igualdade $P(x) = 0$. Então, equação algébrica de grau n é uma equação do tipo:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \text{ com } a_0 \neq 0$$

Exemplos

1. $3x^5 + x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$, é uma equação algébrica de grau 5;
2. $x^2 - 5x + 6 = 0$, é uma equação algébrica de grau 2;
3. $-4x^3 + ix^2 + 5 = 0$, é uma equação algébrica de grau 3 (i, unidade imaginária).

Teorema fundamental da álgebra

Se $P(x) = 0$ é uma equação algébrica de grau $n > 0$, então existe pelo menos um número r (real ou complexo) que é raiz da equação.

Exemplos

1. Na equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, o número $r = 2$ é raiz, pois $2^4 - 5 \cdot 2^2 + 4 = 16 - 20 + 4 = 0$;
2. Na equação $x^2 + 1 = 0$, o número $r = i$ é raiz, pois $i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$.

O teorema fundamental da álgebra garante a existência de ao menos uma raiz para as equações algébricas, mas não diz como achar essa raiz. Já sabemos achar raízes de equações de 1º e 2º graus; para as equações de 3º e 4º graus, existem fórmulas desenvolvidas por matemáticos italianos do século XVI (Cardano e outros), mas tais fórmulas não são práticas. Para as equações de grau maior ou igual a 5, o matemático norueguês Abel demonstrou ser impossível criar fórmulas nas quais só entrassem as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação envolvendo os coeficientes da equação.

Portanto, encontrar as raízes de uma equação algébrica de grau qualquer não é simples. O que faremos a seguir é reunir um certo número de informações que permitam encontrar essas raízes.

Teorema da decomposição

Seja $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ um polinômio de grau $n > 0$; P(x) pode ser decomposto, ou seja, fatorado, na forma seguinte:

$$P(x) = a_0 \cdot (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

Scanned by CamScanner

onde $r_1, r_2, ..., r_n$ são as raízes de P(x).

Exemplos

1. A forma fatorada do polinômio $P(x) = 3x_2 - 9x + 6$ é: $P(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$, pois suas raízes são $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$ (note que $a_0 = 3$).

2. A forma fatorada do polinômio $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ é: $P(x) = 2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$, pois suas raízes são $r_1 = -1$, $r_2 = 1$ e $r_3 = 2$.

EXERCÍCIOS

1. Simplificar a expressão: $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

Solução

Fatorando o numerador da expressão teremos:

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1) \cdot (x - 3)$$

Note que $a_0 = 1$, e as raízes são $r_1 = -1$ e $r_2 = 3$. Para obtermos tais raízes resolvemos a equação $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Fatorando o denominador temos:

$x^2 - 9 = (x - 3) \cdot (x + 3)$ (diferença de quadrados).

Portanto a nossa expressão poderá ser assim escrita:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} = \frac{(x + 1) \cdot \cancel{(x - 3)}}{(x + 3) \cdot \cancel{(x - 3)}} = \frac{x + 1}{x + 3}$$

2. (FAAP-SP) Se -1 é raiz da equação $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$, achar as outras duas raízes.

Solução

Sendo $P(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$, o enunciado nos diz que -1 é raiz de P(x), ou seja, temos $P(-1) = 0$. Segue-se pelo teorema de D'Alembert, que P(x) é divisível por $x + 1$, isto é, existe um polinômio Q(x) tal que $P(x) = (x + 1) \cdot Q(x)$.

Determinamos Q(x) dividindo P(x) por $x + 1$; para isso, usamos o dispositivo de Briot-Ruffini:

1	1	−3	−3	−1
1	0	−3	0	

Obtemos $Q(x) = x^2 + 0x - 3 = x^2 - 3$. Portanto:

$$P(x) = (x + 1) \cdot (x^2 - 3) \quad \text{I}$$

Porém, $x^2 - 3$ é uma diferença de quadrados:

$$x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3}) \quad \text{II}$$

Substituindo II em I, temos:

$$P(x) = (x + 1) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$$

A expressão acima é a forma fatorada do polinômio P(x), de que trata o teorema da decomposição. Para o cálculo das raízes de P(x), o processo é muito simples.

$$P(x) = 0 \Rightarrow (x + 1)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ \text{ou} \\ x + \sqrt{3} = 0 \\ \text{ou} \\ x - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{3} \\ \text{ou} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

As outras duas raízes são $\pm\sqrt{3}$.

3. (FUVEST-SP) O polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + x + a$ é divisível por $x - 1$. Ache todas as raízes complexas de P(x).

Solução

Como $P(x) = x^3 - x^2 + x + a$ é divisível por $x - 1$, temos $P(1) = 0$, o que nos dá $1^3 - 1^2 + 1 + a = 0$, vindo, então, $a = -1$. Portanto, $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

Agora, dividindo P(x) por $x - 1$:

1	−1	1	−1	1
1	0	1	0	

Obtemos quociente $q(x) = x^2 + 1$ e, então:

$$P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$$

Para obter as raízes de P(x), temos:

$$P(x) = 0 \Rightarrow (x - 1) \cdot (x^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = i \text{ ou } x = -i \end{cases}$$

As raízes complexas de P(x) são: 1, i e $-i$.

4. (FUVEST-SP) Uma das raízes da equação $x^3 + (m + 1)x^2 + (m + 9)x + 9 = 0$ é -1. Determinar m para que as outras raízes sejam reais.

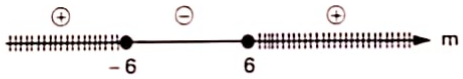
Solução

Fazendo $P(x) = x^3 + (m + 1)x^2 + (m + 9)x + 9$, o enunciado nos diz que $P(-1) = 0$ e, portanto, P(x) é divisível por $x + 1$. Efetuando essa divisão, através do dispositivo de Briot-Ruffini:

1	m + 1	m + 9	9	−1
1	m	9	0	

Obtemos: $P(x) = (x + 1) \cdot (x^2 + mx + 9)$.

As outras raízes de P(x) são as raízes do polinômio $x^2 + mx + 9$. Para que estas raízes sejam reais, devemos ter $\Delta \geqslant 0$, o que nos dá $m^2 - 36 \geqslant 0$ e, portanto, $m \leqslant -6$ ou $m \geqslant 6$.



$$\boxed{m \leqslant -6 \text{ ou } m \geqslant 6}$$

Multiplicidade de uma raiz

O teorema da decomposição, que acabamos de estudar, nos afirma que um polinômio de grau $n > 0$, $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ pode sempre ser escrito na forma fatorada:

$P(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2) ... (x - r_n)$, onde os números $r_1, r_2, ..., r_n$ são as raízes de P(x).

Tiramos, então, uma conclusão importante: todo polinômio de grau $n > 0$ admite pelo menos uma raiz (é o que diz o teorema fundamental da álgebra) e no máximo n raízes distintas.

Assim, por exemplo, um polinômio de 4º grau admite, no máximo, quatro raízes distintas.

Pode acontecer que uma mesma raiz apareça mais de uma vez na forma fatorada de P(x). Neste caso, dizemos que essa raiz é uma raiz múltipla do polinômio P(x), e ao número de vezes que ele aparece chamamos multiplicidade da raiz.

Scanned by CamScanner

Exemplos:

1. A equação $(x - 1)^2 \cdot (x - 3) = 0$, que pode ser escrita como $(x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) = 0$, admite as raízes:

$$\begin{cases} 1, \text{ com multiplicidade 2 (raiz dupla) e} \\ 3, \text{ com multiplicidade 1 (raiz simples).} \end{cases}$$

2. A equação $x^2 \cdot (x - 4)^3 \cdot (x - i) = 0$, que pode ser escrita com $(x - 0) \cdot (x - 0) \cdot (x - 4) \cdot (x - 4) \cdot (x - 4) \cdot (x - i) = 0$, admite as raízes:

$$\begin{cases} 0, \text{ com multiplicidade 2 (raiz dupla)} \\ 4, \text{ com multiplicidade 3 (raiz tripla)} \\ i, \text{ com multiplicidade 1 (raiz simples)} \end{cases}$$

EXERCÍCIO

(PUC-SP) Em relação ao polinômio $P(x) = (x - 1)^2 \cdot (x^2 - 1)$, o que se pode afirmar sobre o número 1?

a) é raiz simples;
b) é raiz dupla;
c) é raiz tripla;
d) é raiz quádrupla;
e) não é raiz.

Solução

Lembrando que $x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$, vem:

$P(x) = (x - 1)^2 \cdot (x^2 - 1) \Rightarrow$
$P(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \Rightarrow$
$P(x) = (x - 1)^3 \cdot (x + 1)$

Portanto teremos a raiz 1 com multiplicidade 3 e a raiz -1 com multiplicidade 1. Logo a resposta é a alternativa **c**.

Teorema das raízes complexas

Seja $P(x)$ um polinômio de grau n, $n \geqslant 2$, com coeficientes reais; se o número $z = a + bi$ ($a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$) é raiz de $P(x)$, então $\bar{z} = a - bi$ também é raiz de $P(x)$.

Deste teorema tiramos as seguinte conclusões:

- se z é uma raiz imaginária com multiplicidade m, então $\bar{z}$ também é uma raiz com multiplicidade m;
- o número de raízes imaginárias é sempre par, pois se z é raiz, $\bar{z}$ também será raiz;
- num polinômio $P(x)$ com coeficientes reais e grau ímpar, sempre existe ao menos uma raiz real.

EXERCÍCIO

(ITAJUBÁ) Resolva a equação $x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0$, sabendo que uma raiz é um número imaginário puro da forma bi.

Solução

Temos que:

- todos os coeficientes da equação são reais, portanto, se bi é raiz da equação $-bi$ também será raiz;
- fazendo $P(x) = x^3 - 2x^2 + 9x - 18$ e escrevendo $P(x)$ na forma fatorada teremos:

$P(x) = (x - bi) \cdot (x + bi) \cdot (x - r)$
$P(x) = (x^2 - b^2i^2) \cdot (x - r)$
$P(x) = (x^2 + b^2) \cdot (x - r)$
$P(x) = x^3 - rx^2 + b^2x - b^2r$

Portanto:

$$x^3 - rx^2 + b^2x - b^2r \equiv x^3 - 2x^2 + 9x - 18$$

E, pelo Princípio da Identidade de Polinômios, teremos:

$$\begin{cases} -r = -2 \Rightarrow r = 2 \\ b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \text{ ou } b = -3 \end{cases}$$

As raízes da equação serão: 2, $-3i$ e $3i$.

Relações de Girard

São as relações entre os coeficientes de uma equação algébrica e as raízes da mesma equação.

Relações de Girard para equações de 2º grau

Para a equação $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$, de raízes r_1 e r_2, temos (com $a_0 \neq 0$):

$$r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_0} \text{ (soma das raízes)}$$

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{a_2}{a_0} \text{ (produto das raízes)}$$

Relações de Girard para equações de 3º grau

Para a equação $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, de raízes r_1, r_2 e r_3, temos (com $a_0 \neq 0$):

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_1}{a_0} \text{ (soma das raízes)}$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{a_2}{a_0} \text{ (soma dos produtos das raízes duas a duas)}$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\frac{a_3}{a_0} \text{ (produto das raízes)}$$

Relações de Girard para equações de 4º grau

Para a equação $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$, de raízes r_1, r_2, r_3 e r_4, temos (com $a_0 \neq 0$):

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{a_1}{a_0} \text{ (soma das raízes)}$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \frac{a_2}{a_0}$$

(soma dos produtos das raízes duas a duas)

$$r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\frac{a_3}{a_0}$$

(soma dos produtos das raízes três a três)

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \frac{a_4}{a_0} \text{ (produto das raízes)}$$

Exemplos

1. Na equação $2x^2 - 3x + 1 = 0$, temos: $a_0 = 2$, $a_1 = -3$ e $a_2 = 1$. Sendo r_1 e r_2 as raízes da equação, temos:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{a_1}{a_0} = -\dfrac{-3}{2} = \dfrac{3}{2} \\ r_1 \cdot r_2 = \dfrac{a_2}{a_0} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

2. Na equação $3x^3 + 2x^2 + 6x + 12 = 0$, temos: $a_0 = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$ e $a_3 = 12$. Chamando de r_1, r_2 e r_3 as raízes da equação, temos:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{a_1}{a_0} = -\dfrac{2}{3} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \dfrac{a_2}{a_0} = \dfrac{6}{3} = 2 \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\dfrac{a_3}{a_0} = -\dfrac{12}{3} = -4 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

3. Na equação $x^4 + x^3 - 2x + 1 = 0$ (que também pode ser escrita $1x^4 + 1x^3 + 0x^2 - 2x + 1 = 0$), temos: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -2$ e $a_4 = 1$. Sendo r_1, r_2, r_3 e r_4 as raízes dessa equação, então:

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \frac{a_2}{a_0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\frac{a_3}{a_0} = -\frac{-2}{1} = 2$$

$$r_1r_2r_3r_4 = \frac{a_4}{a_0} = \frac{1}{1} = 1$$

Relações de Girard para equações de grau n

Para a equação:

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, sendo $r_1, r_2, \ldots, r_n$ as raízes da equação, temos:

$$\boxed{\begin{aligned} &r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = -\frac{a_1}{a_0} \\ &r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_{n-1}r_n = \frac{a_2}{a_0} \\ &r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\frac{a_3}{a_0} \\ &r_1r_2r_3 \ldots r_n = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0} \end{aligned}}$$

EXERCÍCIOS

1. (FUVEST-SP) O número 2 é raiz dupla de $ax^3 + bx + 16$. Determine a e b.

Solução

No polinômio $P(x) = ax^3 + bx + 16$, temos: $a_0 = a$, $a_1 = 0$, $a_2 = b$ e $a_3 = 16$. Sendo 2 uma raiz dupla de P(x), temos as raízes: $r_1 = 2$, $r_2 = 2$ e r_3.

As relações de Girard nos dão:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{0}{a} = 0 \quad \text{(I)}$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{a_2}{a_0} = \frac{b}{a} \quad \text{(II)}$$

$$r_1r_2r_3 = -\frac{a_3}{a_0} = -\frac{16}{a} \quad \text{(III)}$$

(I) $\Rightarrow 2 + 2 + r_3 = 0 \Rightarrow r_3 = -4$

(III) $\Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot (-4) = -\dfrac{16}{a} \Rightarrow a = 1$

(II) $\Rightarrow 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + 2 \cdot (-4) = \dfrac{b}{1} \Rightarrow b = -12$

Logo $\boxed{a = 1 \text{ e } b = -12}$

2. Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$, sabendo que elas formam uma progressão aritmética.

Solução

Como as raízes do polinômio formam uma P.A. de razão, digamos, r, podemos chamar essas raízes de r_1, r_2 e r_3 e escrever:

$$r_1 = r_2 - r \qquad r_3 = r_2 + r$$

As relações de Girard nos dão:

- $r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{a_1}{a_0} \Rightarrow (r_2 - r) + r_2 + (r_2 + r) = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3r_2 = 9 \Rightarrow r_2 = 3$
- $r_1r_2r_3 = -\dfrac{a_3}{a_0} \Rightarrow (r_2 - r) \cdot r_2 \cdot (r_2 + r) = 15 \Rightarrow$
$\Rightarrow (3 - r) \cdot 3 \cdot (3 + r) = 15 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2.$

Como $r = \pm 2$ e $r_2 = 3$, lembrando que as outras raízes são $r_2 - r$ e $r_2 + r$, concluímos que as raízes pedidas são: 1, 3 e 5.

3. Resolver a equação $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$, sabendo-se que duas de suas raízes são inversas.

Solução

Dois números são inversos, quando o produto entre eles for igual a um. Exemplos: 2 e 1/2 são inversos, pois $2 \cdot (1/2) = 1$; 2/3 e 3/2 são inversos, pois $(2/3) \cdot (3/2) = 1$; $2 + \sqrt{3}$ e $2 - \sqrt{3}$ são inversos pois $(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 1$; etc.

Escrevendo as relações de Girard para essa equação teremos:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = \dfrac{3}{2} \quad \text{(I)} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = -\dfrac{3}{2} \quad \text{(II)} \\ r_1r_2r_3 = -\dfrac{2}{2} = -1 \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Como duas dessas três raízes são inversas, temos, por exemplo, que $r_2 = \dfrac{1}{r_1}$ que substituída na igualdade (III) resulta: $r_1 \cdot \dfrac{1}{r_1} \cdot r_3 = -1 \Rightarrow r_3 = -1$

Agora que já temos uma das raízes da equação podemos escrevê-la do seguinte modo:

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x + 1) \cdot Q(x) = 0$$

Q(x) será um polinômio do 2º grau e podemos obter seus coeficientes aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini:

2	−3	−3	2	−1
2	−5	2	0	

Portanto $Q(x) = 2x^2 - 5x + 2$. Resolvendo a equação do 2º grau $2x^2 - 5x + 2 = 0$, obteremos as outras duas raízes da nossa equação original.

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{-1; 2; \frac{1}{2}\right\}$$

Scanned by CamScanner

GEOMETRIA ESPACIAL

Se observarmos os objetos que nos cercam, veremos que eles têm formas bem definidas e que objetos completamente distintos têm o mesmo aspecto, o mesmo "formato".

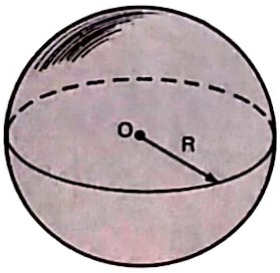
Para classificar e estudar as propriedades desses objetos de mesmo formato é que a geometria criou modelos: esfera, cilindro, cone, pirâmide, prisma etc. Assim:

- uma bola de bilhar, a Lua, a Terra são objetos que lembram uma esfera;
- uma latinha de cerveja, um lápis redondo sem ponta, um palmito lembram um cilindro;
- um copinho de sorvete, a ponta de um lápis, um chapéu de palhaço, um funil lembram um cone;
- um dado, um paralelepípedo de rua, uma coleção de livros iguais bem empilhados, um arquivo de aço lembram um prisma;
- as pirâmides do Egito, o telhado de uma casa com quatro águas são exemplos de pirâmide.

Passaremos agora a estudar esses sólidos isoladamente. Daqui em diante, representaremos o volume dos sólidos por V e sua área por S (entenda-se por área do sólido a área da superfície que limita o sólido).

ESFERA

A superfície que envolve a esfera chama-se superfície esférica. Veja a diferença entre uma esfera e uma superfície esférica: uma bola de bilhar é uma esfera (ela é maciça) e uma bola de pingue-pongue é uma superfície esférica (ela é oca, é apenas uma "casquinha" redonda).



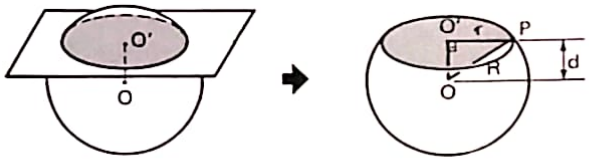
A distância de qualquer ponto da superfície esférica ao centro O da mesma é o raio R; a distância de qualquer ponto interior da esfera ao centro O é sempre menor do que o raio R.

A área S da superfície esférica e o volume V da esfera são dados pelas fórmulas:

$$S = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \qquad V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

Intersecção de uma esfera com um plano

Se você cortar uma laranja com um faca (para tirar uma "tampinha"), estará fazendo, em termos práticos, a secção de uma esfera com um plano:



A secção é um círculo de centro O' e raio r, como na figura anterior. Repare agora o seguinte: como P é um ponto da superfície esférica, sua distância ao centro O é igual ao raio R; sendo d a distância do plano ao centro da esfera, temos, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo OO'P:

$$d^2 + r^2 = R^2$$

EXERCÍCIOS

1. A área da superfície de uma esfera é 16π cm²; determine o raio e o volume da esfera.

Solução

A fórmula da área da superfície da esfera é $S = 4\pi R^2$; no nosso caso, $S = 16\pi$ cm² e, portanto,

Scanned by CamScanner

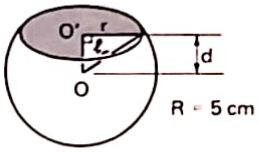
$$4 \cdot \pi \cdot R^2 = 16\pi \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow \boxed{R = 2 \text{ cm}}$$

Agora calculamos o volume da esfera usando a fórmula $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$; sendo $R = 2$ cm, temos: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3$ e, portanto, o volume da esfera é

$$\boxed{V = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3}$$

2. Um plano secciona uma esfera de raio 5 cm, segundo um círculo de área 9π cm². Determine a distância do plano da secção ao centro da esfera.

Solução



A área da secção é 9π cm²; como a secção é um círculo, sua área se calcula pela fórmula πr^2; temos então:

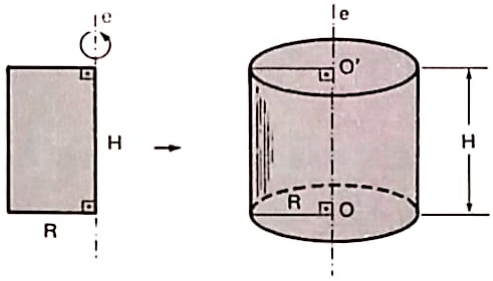
$$\pi r^2 = 9\pi \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow \boxed{r = 3 \text{ cm}}$$

Como $d^2 + r^2 = R^2$, obtemos:

$$d^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow d^2 = 16 \Rightarrow \boxed{d = 4 \text{ cm}}$$

CILINDRO

Estudaremos agora o cilindro reto ou cilindro de revolução; isto é, o cilindro obtido girando-se um retângulo ao redor de um de seus lados:



Observe que o cilindro é limitado por dois círculos paralelos e de mesmo raio, que são suas bases, e uma superfície arredondada, que é a superfície lateral do cilindro; a reta e, que une os centros dos dois círculos, chama-se eixo do cilindro.

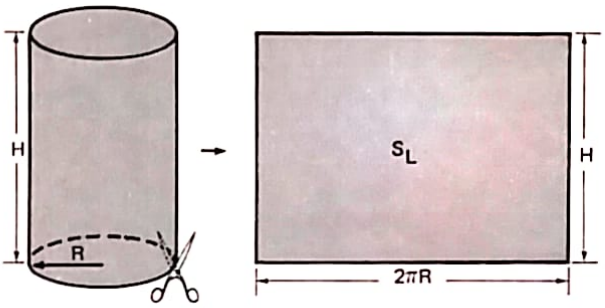
Para o cálculo do volume V do cilindro, determinamos a área da base B (observe que a base é um círculo de raio R e portanto $B = \pi R^2$) e a multiplicamos pela altura H do cilindro (também chamada de geratriz do cilindro). Então:

$$\begin{cases} V = B \cdot H \\ B = \pi \cdot R^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{V = \pi R^2 \cdot H}$$

A área da superfície do cilindro é a soma das áreas de três superfícies: os dois círculos que são as bases mais a área lateral S_L:

$$\boxed{S = 2 \cdot B + S_L}, \qquad \text{onde } B = \pi \cdot R^2.$$

Vamos calcular agora a área da superfície lateral S_L; para isso, imagine um cilindro de papel, sem as bases (uma folha de papel enrolado); corte-o com uma tesoura ao longo de uma geratriz. Abrindo o cilindro e planificando-o, obtemos o retângulo seguinte:



Repare que a base do retângulo é exatamente o comprimento da circunferência da base do cilindro, isto é, $2\pi R$. Como a área do retângulo é o produto das duas dimensões, temos:

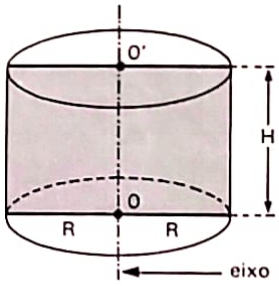
$$\boxed{S_L = 2\pi R \cdot H}$$

OBSERVAÇÃO Chama-se cilindro eqüilátero ao cilindro reto em que a altura é igual ao diâmetro da base; portanto, no cilindro eqüilátero: $\boxed{H = 2 \cdot R}$.

Intersecção de um cilindro reto com um plano

Secção meridiana

É a secção que se obtém com um plano passando pelo eixo do cilindro; esta secção, para um cilindro reto, é um retângulo:

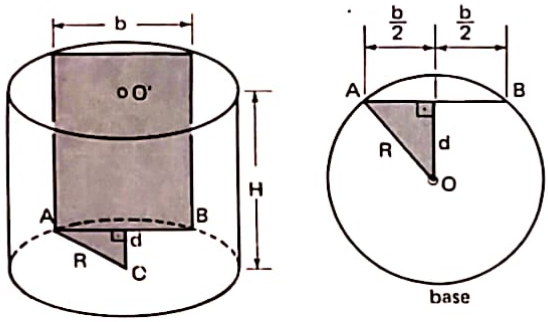


Scanned by CamScanner

Repare que na secção meridiana de um cilindro reto as dimensões são 2R e H, sendo R o raio da base e H a altura do cilindro.

Secção paralela ao eixo do cilindro

É a secção que se obtém cortando um cilindro com um plano paralelo ao eixo do mesmo:



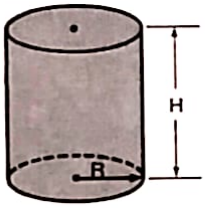
Se d é a distância desse plano ao eixo OO', no triângulo sombreado da base, temos:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + d^2 = R^2 \Rightarrow \boxed{b^2 + 4d^2 = 4R^2}$$

EXERCÍCIOS

1. Um cilindro reto tem 6 cm de altura e 2 cm de raio da base. Calcule sua área e seu volume.

Solução



A área S é a soma das áreas das duas bases com a área lateral: $S = 2B + S_L$.

Mas: $\begin{cases} B = \pi R^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ cm}^2 \\ S_L = 2\pi RH = 2\pi \cdot 2 \cdot 6 = 24\pi \text{ cm}^2 \end{cases}$

Logo, $S = 2B + S_L = 2 \cdot 4\pi + 24\pi = 32\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{S = 32\pi \text{ cm}^2}$

O volume do cilindro é $V = B \cdot H$

Como: $\begin{cases} B = 4\pi \text{ cm}^2 \\ H = 6 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow$ obtemos: $V = 4 \cdot \pi \cdot 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{V = 24\pi \text{ cm}^3}$

2. Calcule a área lateral de um cilindro eqüilátero, cujo volume é 128π cm³.

Solução

O volume de um cilindro se calcula pela fórmula $V = B \cdot H$, onde $B = \pi R^2$ e $H = 2R$, pois o cilindro é eqüilátero.

Como o volume é 128π cm³, temos:

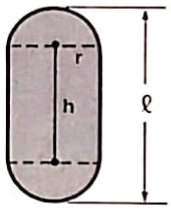
$$\begin{cases} V = B \cdot H = 128\pi \\ H = 2R \end{cases} \Rightarrow \pi R^2 \cdot 2R = 128\pi \Rightarrow R^3 = 64 \Rightarrow R = 4 \text{ cm}$$

Sendo $H = 2R$, temos que $H = 8$ cm.

Agora calculamos a área lateral S_L:

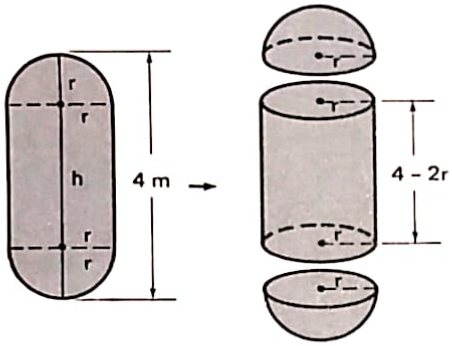
$$\begin{cases} S_L = 2\pi R \cdot H \\ R = 4;\ H = 8 \end{cases} \Rightarrow S_L = 2\pi \cdot 4 \cdot 8 \Rightarrow \boxed{S_L = 64\pi \text{ cm}^2}.$$

3. (FAAP-SP) O comprimento de uma caldeira cilíndrica terminada por duas semi-esferas é $\ell = 4$ m.



Calcular a altura h e o raio r da parte cilíndrica de modo que a área total da caldeira seja igual a 4π m².

Solução



A área total S_T da caldeira é igual à área de uma superfície esférica de raio r (é a soma das superfícies das duas semi-esferas terminais da caldeira) somada à área lateral de um cilindro reto que tem raio da base igual a r e altura h igual a $\ell - 2r = 4 - 2r$.

Então: $S_T = \underbrace{4 \cdot \pi \cdot r^2}_{\text{área da superfície esférica}} + \underbrace{2\pi \cdot r \cdot h}_{\text{área lateral do cilindro}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_T = 4\pi r^2 + 2\pi r \cdot (4 - 2r) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_T = 4\pi r^2 + 8\pi r - 4\pi r^2 \Rightarrow \boxed{S_T = 8\pi r}$

Como a área S_T, pelo enunciado, deve valer 4π m², temos: $8\pi r = 4\pi$ e, finalmente, $r = \frac{4\pi}{8\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{r = 0{,}5 \text{ m}}$

Como a altura h vale $4 - 2r$, temos $h = 4 - 2 \times 0{,}5$ e, portanto,

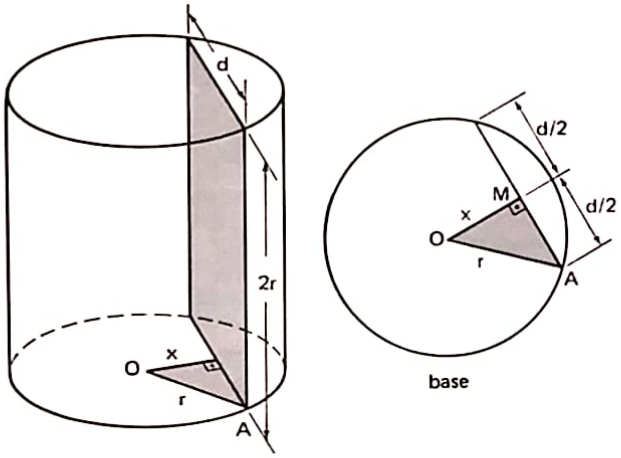
$\boxed{h = 3 \text{ m}}$

4. Um cilindro circular reto com raio da base $r = 5$ cm, e altura 2r, é seccionado por um plano paralelo ao seu eixo, a uma distância $x = 3$ cm desse eixo. Calcule a área dessa secção.

Scanned by CamScanner

Solução

A secção do cilindro com um plano paralelo ao eixo do cilindro é um retângulo de base d e altura 2r:



Para calcular a área do retângulo que é a secção precisamos conhecer a base d e a altura 2r do retângulo; para calcular d consideramos o triângulo sombreado da base do cilindro e aplicamos o teorema de Pitágoras: $r^2 = x^2 + (d/2)^2$.

Como: $\begin{cases} r = 5 \text{ cm} \\ x = 3 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow 5^2 = 3^2 + (d/2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25 = 9 + (d/2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 = (d/2)^2 \Rightarrow d/2 = 4 \text{ cm}$

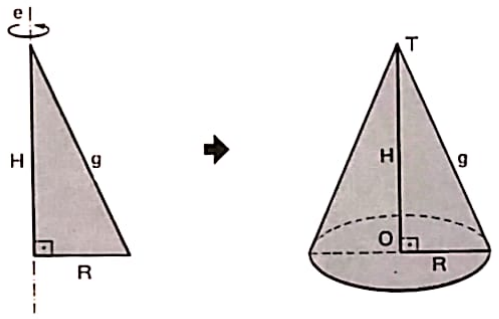
$\Rightarrow \boxed{d = 8 \text{ cm}}$

Agora podemos calcular a área da secção pois já sabemos que sua base d mede 8 cm e sua altura 2r mede 10 cm (pois r = 5 cm); portanto a área é

$$\boxed{8 \times 10 = 80 \text{ cm}^2}$$

CONE

Estudaremos agora o cone circular reto ou cone de revolução, isto é, o cone que se obtém girando um triângulo retângulo ao redor de um dos catetos:



Observe, então, que o cone reto é limitado por uma base circular e uma superfície afunilada, que é sua superfície lateral.

Chamamos de geratriz g do cone ao segmento que une o vértice T a qualquer ponto da circunferência da base e de altura H a distância do vértice T ao plano da base do cone.

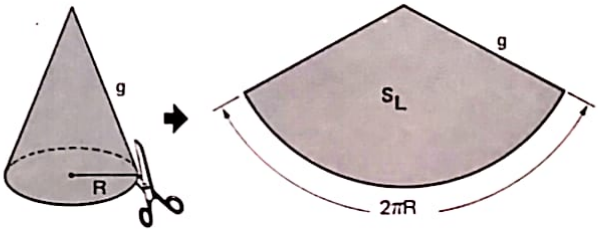
Para o cálculo do volume V do cone, determinamos a área de sua base B ($B = \pi R^2$, pois a base é um círculo) e a multiplicamos por um terço da altura do cone:

$$\begin{cases} V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H \\ B = \pi \cdot R^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H}$$

A área da superfície do cone é a soma das áreas de duas superfícies: o círculo da base e a superfície lateral:

$$\boxed{S = B + S_L}, \text{ onde } B = \pi R^2$$

Para o cálculo da área lateral S_L, imagine um cone de papel sem a base (um "chapeuzinho de aniversário"); cortando-o com uma tesoura ao longo de uma geratriz, abrindo-o e planificando-o, obtemos o setor circular abaixo:



Temos, então, para a área lateral, um setor circular de raio g e arco $2\pi R$; essa área pode ser calculada fazendo o semiproduto do comprimento do arco pelo raio, isto é:

$$S_L = \frac{1}{2} \times 2\pi R \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S_L = \pi R \cdot g}$$

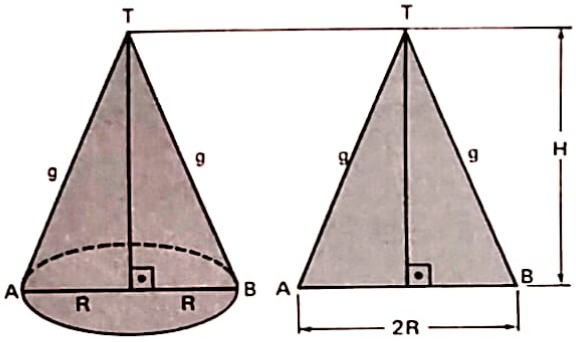
OBSERVAÇÃO Chama-se cone eqüilátero ao cone em que a geratriz é igual ao diâmetro da base; portanto, no cone eqüilátero: $\boxed{g = 2R}$.

Scanned by CamScanner

Intersecção de um cone com um plano

Secção meridiana

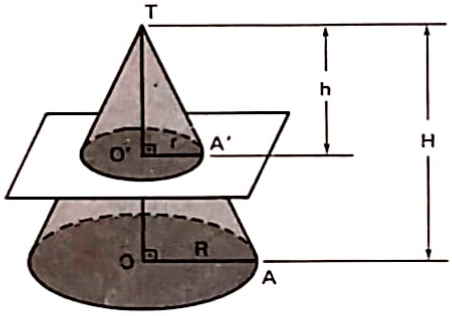
É a intersecção do cone com um plano passando pelo vértice e pelo centro da base:



Repare que, num cone reto, a secção meridiana é um triângulo isósceles de base 2R, altura H, e os outros dois lados são iguais à geratriz g do cone.

Secção paralela à base do cone

Suponha um plano paralelo à base de um cone reto, passando entre o vértice e a base e, portanto, seccionando o cone segundo um círculo de raio r:



Na figura anterior, temos os seguintes elementos:

- um círculo de raio r, que é a secção;
- a distância h do plano de secção até o vértice;
- a altura H, do cone original.

Ao cortar o cone original com o plano de secção, formamos dois novos sólidos: um cone pequeno, de altura h, e um tronco de cone, que é o sólido limitado pelos dois círculos de raios r e R e que tem altura H − h.

Vamos estabelecer as relações entre as áreas das bases e os volumes dos cones pequeno e grande. Para isto, adote a seguinte convenção:

	cone pequeno	cone grande
volume	v	V
raio da base	r	R
altura	h	H
área da base	b	B

Pela semelhança entre os triângulos TO'A' e TOA, vem:

$$\frac{TO'}{TO} = \frac{O'A'}{OA} \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{r}{R} \quad \text{(I)}$$

Portanto: $\frac{b}{B} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \overset{\text{(I)}}{=} \left(\frac{h}{H}\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{b}{B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2} \quad \text{(II)}$$

Assim, a razão entre as áreas das bases é igual ao quadrado da razão entre as alturas correspondentes.

Para os volumes, temos:

$$\frac{v}{V} = \frac{\frac{b \cdot h}{3}}{\frac{B \cdot H}{3}} = \underbrace{\frac{b}{B} \cdot \frac{h}{H} = \left(\frac{h}{H}\right)^2}_{\text{(II)}} \cdot \frac{h}{H} \Rightarrow \boxed{\frac{v}{V} = \left(\frac{h}{H}\right)^3}$$

Assim, a razão entre os volumes é igual ao cubo da razão entre as alturas correspondentes.

Guarde bem as observações seguintes:

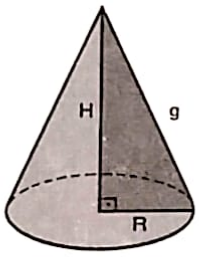
- na figura anterior, o cone original e o cone pequeno são chamados de cones semelhantes;
- as duas últimas conclusões sobre a razão das áreas e a razão dos volumes valem para quaisquer sólidos semelhantes, como, por exemplo, duas esferas, dois cubos, dois tetraedros regulares etc. Para o caso das esferas (sólidos já estudados), por exemplo, temos:
- a razão das áreas das superfícies esféricas é igual ao quadrado da razão dos raios;
- a razão dos volumes das duas esferas é igual ao cubo da razão dos raios.

As mesmas conclusões valem para dois cubos ou para dois tetraedros regulares (sólidos que ainda serão estudados) trocando-se a razão dos raios pela razão das arestas.

EXERCÍCIOS

1. Num cone reto, a altura e a geratriz medem 4 cm e 5 cm, respectivamente. Calcule o volume e a área do cone.

Solução



$$\begin{cases} g = 5 \text{ cm} \\ H = 4 \text{ cm} \end{cases}$$

Inicialmente, no triângulo retângulo da direita da figura, o teorema de Pitágoras nos dá:

$$g^2 = R^2 + H^2 \Rightarrow 25 = R^2 + 16 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow \boxed{R = 3 \text{ cm}}.$$

Agora calculamos a área da base B:

$$B = \pi R^2 \Rightarrow B = \pi \cdot 3^2 \Rightarrow \boxed{B = 9\pi \text{ cm}^2}$$

O volume V é: $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{V = 12\pi \text{ cm}^3}$$

Finalmente, a área S é a soma da área da base com a área lateral: $S = B + S_L$.

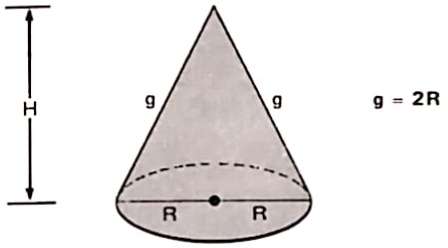
Como $\begin{cases} B = 9\pi \text{ cm}^2 \\ S_L = \pi R g = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi \text{ cm}^2 \end{cases}$, obtemos:

Scanned by CamScanner

$$S = B + S_L = 9\pi + 15\pi \Rightarrow \boxed{S = 24\pi \text{ cm}^2}.$$

2. A área da superfície de um cone eqüilátero é de 48π cm². Calcule seu volume e a área de sua secção meridiana.

Solução



No cone eqüilátero, $g = 2R$ e, portanto, sua área S é: $S = B + S_L \Rightarrow S = \pi R^2 + \pi R g \Rightarrow S = \pi R^2 + \pi R \cdot 2R \Rightarrow S = 3\pi R^2$.

Como a área S é de 48π cm², temos:

$$3\pi R^2 = 48\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow R^2 = 16 \Rightarrow \boxed{R = 4 \text{ cm}}$$

Para calcular o volume do cone precisamos da medida H de sua altura; repare que H é a altura do triângulo eqüilátero de lado $g = 2R = 8$ cm e, portanto, a altura H é

$$H = \frac{g \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{H = 4 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}}.$$

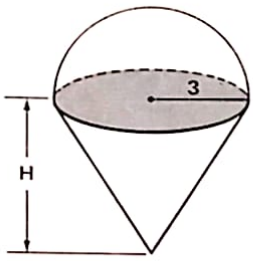
Agora podemos calcular o volume V:

$$\begin{cases} V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H \\ B = \pi R^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 16\pi \cdot 4\sqrt{3} \text{ cm}^3 \\ H = 4 \cdot \sqrt{3} \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \boxed{V = \frac{64\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3}$$

A secção meridiana é um triângulo eqüilátero, de base $2R = 8$ cm e altura $H = 4\sqrt{3}$ cm; portanto, a área da secção meridiana é $\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{16\sqrt{3} \text{ cm}^2}$$

3. (UF-MG) O sólido da figura é formado por um hemisfério cujo raio mede 3 cm e um cone circular cuja altura é H. Se o volume do sólido é 48π cm³, determine H.



Solução

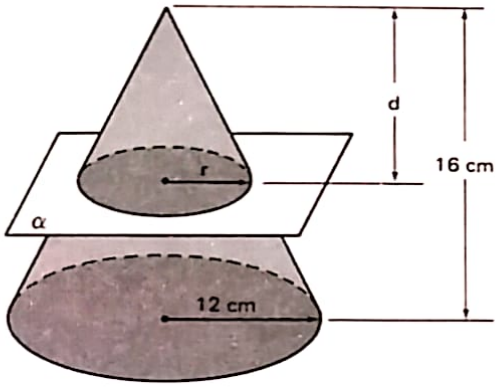
O sólido é formado por um hemisfério (semi-esfera de raio $R = 3$ cm) e um cone circular cujo raio da base é também 3 cm (igual ao do hemisfério) e cuja altura é H. O volume do sólido é, então:

$$V = V_{hem} + V_{cone} = \frac{\frac{2}{3} \times \pi R^3}{2} + \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} = \frac{\frac{4}{3} \times \pi \cdot 27}{2} + \frac{\pi \cdot 9 \cdot H}{3} \Rightarrow V = 18\pi + 3\pi H.$$

Como esse volume é dado e vale 48π cm³, obtemos:

$$V = 18\pi + 3\pi H = 48\pi \Rightarrow 3\pi H = 30\pi \Rightarrow \boxed{H = 10 \text{ cm}}$$

4. (UF-BA) O cone da figura seguinte tem 12 cm de raio e 16 cm de altura, sendo d a distância do vértice a um plano α, paralelo à base.



Determine d de modo que as duas partes do cone separadas pelo plano α tenham volumes iguais.

Solução

Sejam:

$$\begin{cases} v = \text{volume do cone pequeno} \\ V = \text{volume do cone grande} \\ V_t = \text{volume do tronco de cone} \end{cases}$$

Sabemos, pelo enunciado, que o cone pequeno e o tronco do cone têm volumes iguais, isto é, $\boxed{v = V_t}$ (I)

Como o cone pequeno unido ao tronco de cone completam o cone grande, temos: $v + V_t = V \overset{(I)}{\Rightarrow} v + v = V \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2v = V \Rightarrow \boxed{\frac{v}{V} = \frac{1}{2}}$$

Como a razão dos volumes dos cones é igual ao cubo da razão das alturas correspondentes, temos:

$$\frac{v}{V} = \left(\frac{h}{H}\right)^3 \Rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{d}{16}\right)^3 = \left(\frac{d}{2^4}\right)^3 = \frac{d^3}{2^{12}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot d^3 = 2^{12} \Rightarrow d^3 = \frac{2^{12}}{2} = 2^{11} \Rightarrow$$

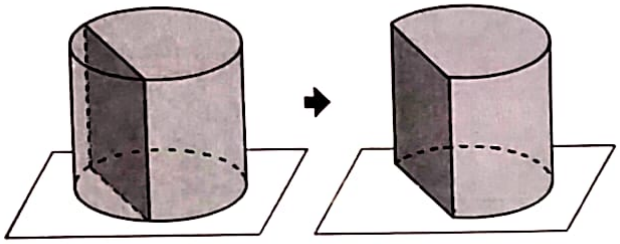
$$\Rightarrow d = \sqrt[3]{2^{11}} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^2} \Rightarrow d = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2^2}$$

$$\boxed{d = 8 \cdot \sqrt[3]{4} \text{ cm}}$$

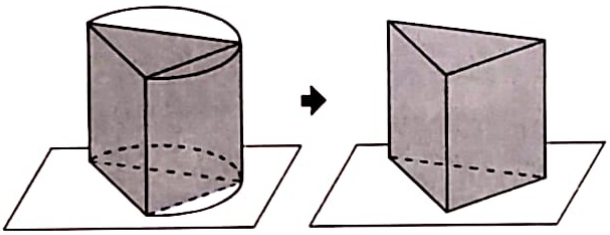
Scanned by CamScanner

PRISMA

Vamos criar um prisma reto a partir de um cilindro reto. Estando o cilindro apoiado pela base num plano horizontal, cortemo-lo verticalmente de uma base à outra com um plano:

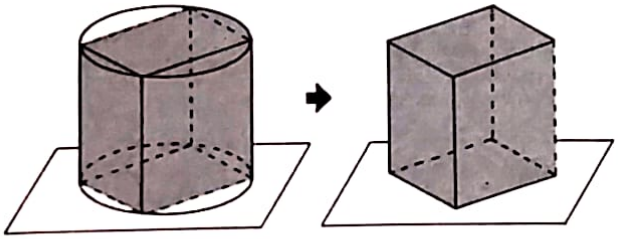


Repetindo mais duas vezes essa operação, de modo a tirar toda a "parte redonda" do cilindro, obtemos um sólido, como na figura seguinte:



Temos assim um sólido com três faces laterais planas e retangulares e duas bases triangulares: é o prisma reto de base triangular.

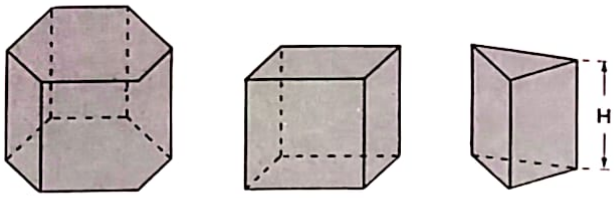
Voltando à idéia inicial, cortando o cilindro quatro vezes, teremos um sólido com quatro faces laterais planas e retangulares e duas bases quadrangulares: é o prisma reto quadrangular:



Observe, então, que o prisma reto é um sólido com duas bases paralelas e iguais, em forma de polígono, e faces laterais retangulares.

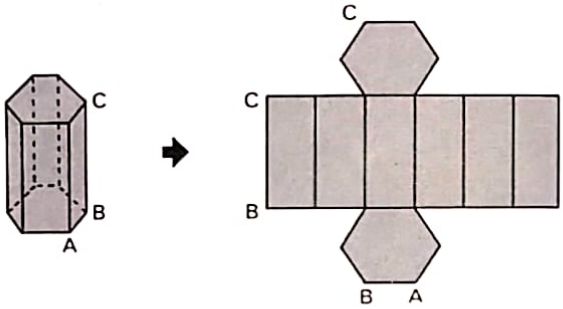
Finalizando, podemos ter prismas triangulares, quadrangulares, pentagonais, hexagonais etc., conforme os polígonos das bases tenham três, quatro, cinco, seis ou mais lados, respectivamente.

Exemplos



hexagonal quadrangular triangular

Temos, ainda, os prismas regulares, que são prismas retos cujas bases são polígonos regulares. Assim, no prisma triangular regular, as bases são triângulos eqüiláteros; no prisma quadrangular regular as bases são quadrados, e assim por diante. Como exemplo, temos um prisma hexagonal regular e sua planificação; veja a figura:



Nos prismas, os lados das faces laterais são chamados de arestas laterais (por exemplo, $\overline{BC}$ na figura) e os lados dos polígonos das bases são chamados de arestas da base; (por exemplo, $\overline{AB}$ na figura); quando o prisma é reto, o comprimento das arestas laterais chama-se altura do prisma.

Volume do prisma

Para se obter o volume V de um prisma, calcula-se a área B de sua base (é a área do polígono que forma a base do prisma) e multiplica-se essa área pela altura H do prisma (essa altura é a distância entre os planos das bases; é igual à aresta lateral, se o prisma for reto), temos então:

$$\boxed{V = B \cdot H}$$

Área do prisma

A área S de um prisma é igual à soma das áreas de todas as faces que o limitam: as duas bases (que têm sempre áreas iguais) e os retângulos que compõem a lateral do prisma. Em símbolos:

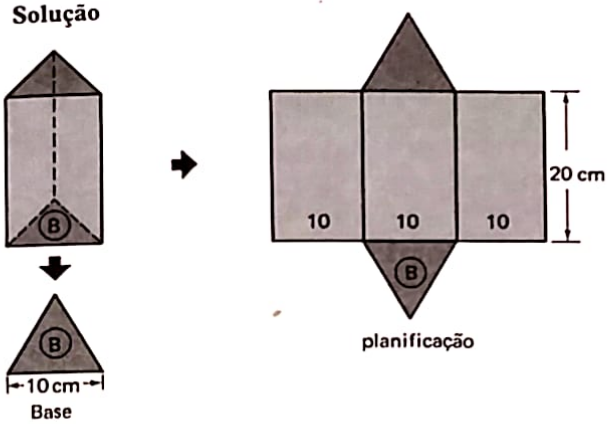
$$\boxed{S = 2B + S_L}$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule o volume e a área total do prisma triangular regular onde a aresta da base mede 10 cm e a aresta lateral mede 20 cm.

Scanned by CamScanner

Solução



Pelo fato de se tratar de um prisma triangular regular, a base é um triângulo eqüilátero; o lado desse triângulo é $\ell = 10$ cm e, portanto, a área da base do prisma é $B = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$ cm².

Como a altura H do prisma é tal que H = 20 cm, temos que o volume V é: $V = B \cdot H = 25\sqrt{3} \cdot 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{V = 500\sqrt{3} \text{ cm}^2}$

A área do prisma é a soma das áreas das 5 faces que o limitam; observe a planificação do prisma e repare que a área do prisma é a soma das áreas de 3 retângulos (área lateral) e de dois triângulos (bases), ou seja:

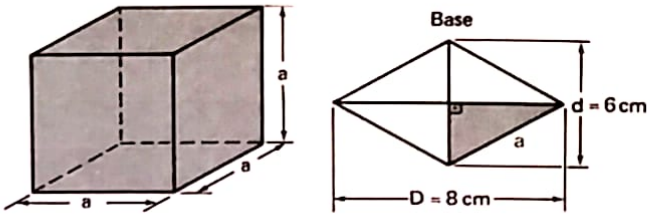
$S = S_L + 2B \Rightarrow S = 3 \cdot 10 \cdot 20 + 2 \cdot 25\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = 600 + 50\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{S = 50(12 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2}$

2. (CESESP-PE) Considere um prisma reto cuja aresta lateral e a aresta da base têm medidas iguais e cuja base é um losango de diagonais 6 cm e 8 cm. Determine o volume e a área lateral do prisma.

Solução



Como num losango as diagonais são perpendiculares, o triângulo retângulo sombreado da base nos dá:

$$a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow \boxed{a = 5 \text{ cm}}$$

A altura H do prisma é igual à aresta lateral (o prisma é reto) e esta, pelo enunciado, é igual à aresta a da base. Logo, $\boxed{H = a = 5 \text{ cm}}$

A base do prisma é um losango e, portanto, sua área é

$$B = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow B = \frac{8 \cdot 6}{2} \Rightarrow \boxed{B = 24 \text{ cm}^2}$$

Calculamos agora o volume V do prisma:

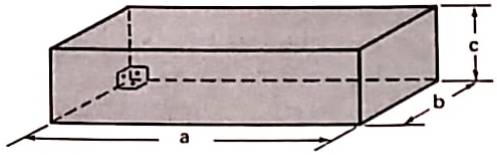
$$\begin{cases} V = B \cdot H \\ B = 24 \text{ cm}^2 \\ H = 5 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow V = 24 \cdot 5 \Rightarrow \boxed{V = 120 \text{ cm}^3}$$

Para o cálculo da área lateral, basta observar que ela é a soma das áreas dos quatro retângulos laterais e que, na verdade, esses retângulos são quadrados de lado a = 5 cm. Portanto, a área lateral é quatro vezes a área de um quadrado de lado 5 cm:

$S_L = 4 \cdot 5 \times 5 \Rightarrow \boxed{S_L = 100 \text{ cm}^2}$

PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO

Paralelepípedo retângulo (ou paralelepípedo reto-retângulo) é o prisma reto, quadrangular, no qual todas as seis faces são retangulares.



Volume

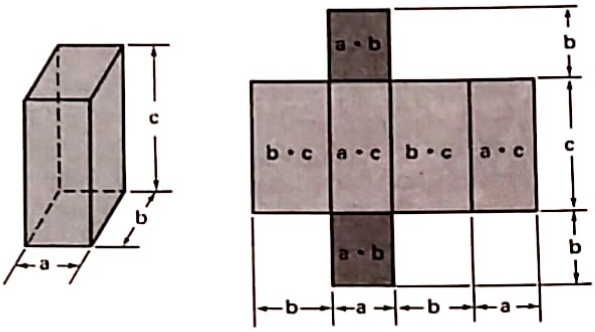
Como o paralelepípedo retângulo é um prisma, então seu volume V calcula-se pela fórmula $V = B \cdot H$; como a base é um retângulo de dimensões a e b, temos:

$V = B \cdot H$; $B = a \cdot b$ e, portanto, $\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$

Logo, o volume do paralelepípedo retângulo é o produto das três dimensões.

Área

A superfície do paralelepípedo retângulo é formada por seis faces retangulares, onde as opostas são iguais. Repare na seguinte planificação:



Scanned by CamScanner

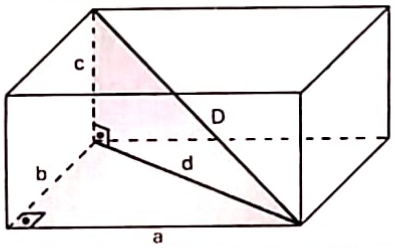
Da análise da planificação concluímos que a área S do paralelepípedo retângulo é:

$S = 2 \times$ (área da base) $+ 2 \times$ (área da face frontal) $+ 2 \times$ (área da face lateral) $= 2 \cdot ab + 2 \cdot ac + 2 \cdot bc$

Logo, $\boxed{S = 2(ab + ac + bc)}$

Diagonal do paralelepípedo

Diagonal do paralelepípedo é o segmento que une dois vértices opostos não coplanares (não na mesma face); veja na figura seguinte:



Para o cálculo do comprimento D da diagonal, usamos duas vezes o teorema de Pitágoras; primeiramente, no triângulo retângulo da base, temos: $\boxed{d^2 = a^2 + b^2}$; a seguir, no triângulo retângulo onde D é a hipotenusa:

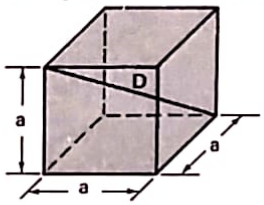
$$\begin{cases} D^2 = d^2 + c^2 \\ d^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Cubo ou hexaedro regular

O cubo é um caso particular do paralelepípedo retângulo; no cubo todas as seis faces são quadradas e suas três dimensões são iguais.

No cubo, temos:



- Volume V: $V = B \cdot H \Rightarrow V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow \boxed{V = a^3}$
- área S: é a soma das áreas dos seis quadrados; logo, temos: $\boxed{S = 6 \cdot a^2}$
- diagonal D: usamos a fórmula obtida para o paralelepípedo retângulo, fazendo $a = b = c$; temos, portanto:

$$D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \Rightarrow D = \sqrt{3a^2} \Rightarrow \boxed{D = a\sqrt{3}}$$

EXERCÍCIOS

1. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são 5 cm, 4 cm e 3 cm. Calcule o volume, a área e o comprimento da diagonal desse sólido.

Solução

O volume do paralelepípedo é o produto das três dimensões e, portanto, $V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V = 5 \cdot 4 \cdot 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{V = 60 \text{ cm}^3}$$

A área do paralelepípedo se calcula pela fórmula seguinte: $S = 2(ab + ac + bc) \Rightarrow$

$$\Rightarrow S = 2 \cdot (5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3) \Rightarrow \boxed{S = 94 \text{ cm}^2}$$

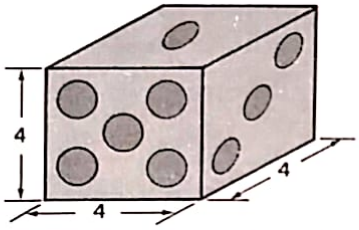
A diagonal se calcula pela fórmula:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow D = \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2} \Rightarrow D = \sqrt{50};$$

logo, temos: $D = \sqrt{25 \cdot 2} \Rightarrow \boxed{D = 5\sqrt{2} \text{ cm}}$

2. (UF-CE) Calcule, em cm³, o volume de um dado fabricado a partir de um cubo de aresta igual a 4 cm, levando em conta que os buracos representativos dos números, presentes em suas faces, são semi-esferas de raio igual a $\frac{1}{\sqrt[3]{7\pi}}$ cm.

Solução



O volume do cubo é $V_c = 4^3 = 64$ cm³. Determinemos, agora, o número de buracos representativos dos números.

Temos:
uma face com 1 buraco
uma face com 2 buracos
uma face com 3 buracos
uma face com 4 buracos
uma face com 5 buracos
uma face com 6 buracos
(+)
total de 21 buracos

Como cada buraco é uma semi-esfera, o volume V_b dos 21 buracos é: $V_b = 21 \cdot \frac{V_{esf}}{2} = \frac{21}{2} \cdot V_{esf} = \frac{21}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V_b = \frac{42}{3} \cdot \pi R^3$; sendo $R = \frac{1}{\sqrt[3]{7\pi}} \Rightarrow R^3 = \frac{1}{7\pi}$ e, portanto, $V_b = \frac{42}{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{7\pi} = 2$;

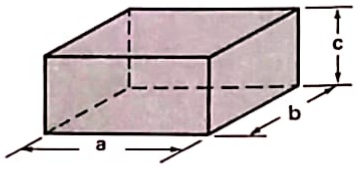
logo, $\boxed{V_b = 2 \text{ cm}^3}$

Finalmente, o volume do dado é o volume do cubo menos o volume dos 21 buracos, ou seja:

$$V_{dado} = V_c - V_b = 64 - 2 = 62 \Rightarrow \boxed{V_{dado} = 62 \text{ cm}^3}$$

3. (UNESP) As medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo formam uma P.G. Se a menor das arestas mede 0,5 cm e o volume de tal paralelepípedo é 64 cm³, calcule a soma das áreas de suas faces.

Solução



Sejam a, b e c as medidas das arestas do paralelepípedo;

Scanned by CamScanner

como a, b e c estão em P.G., temos:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow \boxed{b^2 = ac} \quad \text{(I)}$$

Sendo o volume do paralelepípedo igual a 64 cm³, temos:

$$a \cdot b \cdot c = 64 \Rightarrow a \cdot c \cdot b = 64 \overset{\text{(I)}}{\Rightarrow} b^2 \cdot b = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^3 = 64 \Rightarrow \boxed{b = 4\text{cm}}$$

Como a = 0,5 e b = 4, a equação (I) nos dá:

$$b^2 = ac \Rightarrow 16 = 0{,}5 \cdot c \Rightarrow \boxed{c = 32 \text{ cm}}$$

Agora, a soma S das áreas das faces do paralelepípedo é

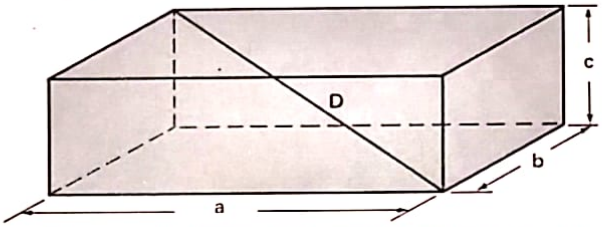
$$S = 2(ab + ac + bc) = 2 \cdot (0{,}5 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 32 + 4 \cdot 32) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 2 \cdot (2 + 16 + 128) \Rightarrow S = 2 \times 146 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S = 292 \text{ cm}^2}$$

4. Num paralelepípedo reto-retângulo, a soma das medidas das arestas é 48 cm e a diagonal mede $5\sqrt{2}$ cm. Calcule a área S do paralelepípedo.

Solução



Observe, pela figura, que a soma das arestas (todas) é 4a + 4b + 4c. Então, 4a + 4b + 4c = 48 ⇒

$$\Rightarrow \boxed{a + b + c = 12} \quad \text{(I)}$$

Agora usamos a fórmula da diagonal do paralelepípedo:

$$\begin{cases} D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ D = 5 \cdot \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 5 \cdot \sqrt{2}$$

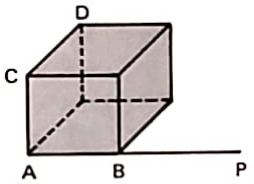
$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 50} \quad \text{(II)}$$

Usando as equações (I) e (II), precisamos calcular a área S = 2ab + 2ac + 2bc do paralelepípedo; para conseguir isto, elevamos a equação (I) ao quadrado: $(a + b + c)^2 = 144 \Rightarrow$

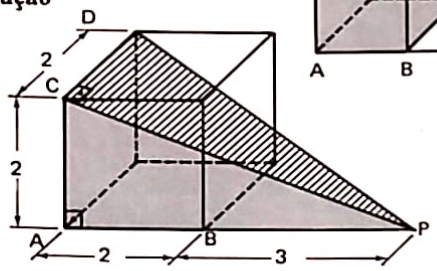
$$\Rightarrow \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{D^2} + \underbrace{2ab + 2ac + 2bc}_{S} = 144$$

Logo, $D^2 + S = 144 \Rightarrow 50 + S = 144 \Rightarrow \boxed{S = 94 \text{ cm}^2}$

5. (FUVEST-SP) A aresta do cubo ao lado mede 2 e BP = 3; calcule PC e PD.



Solução



Unimos o ponto P aos pontos C e D do cubo, obtendo os triângulos retângulos PAC e PCD. Então:

• no triângulo PAC, retângulo em A, vem:

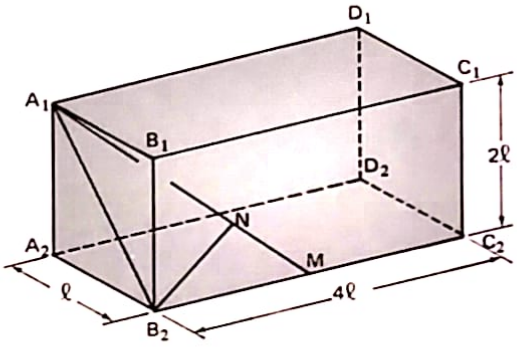
$$(PC)^2 = (AC)^2 + (AP)^2 = 2^2 + 5^2 = 29 \Rightarrow \boxed{PC = \sqrt{29}}$$

• no triângulo PCD, retângulo em C, vem:

$$(PD)^2 = (PC)^2 + (CD)^2 = 29 + 4 = 33 \Rightarrow \boxed{PD = \sqrt{33}}$$

6. (EE MAUÁ-SP) No paralelepípedo retângulo da figura seguinte, calcule a distância do vértice B_2 ao segmento $\overline{A_1M}$, sendo M o ponto médio de $\overline{B_2C_2}$.

Solução



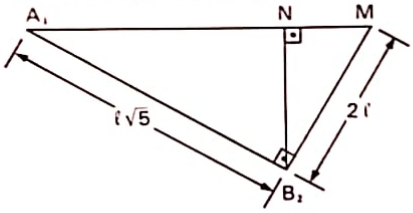
Inicialmente, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $A_1A_2B_2$, calculamos o comprimento do segmento $\overline{A_1B_2}$:

$$(A_1B_2)^2 = (A_1A_2)^2 + (A_2B_2)^2 = (2\ell)^2 + \ell^2 \Rightarrow (A_1B_2)^2 =$$

$$= 4\ell^2 + \ell^2 = 5\ell^2 \Rightarrow \boxed{A_1B_2 = \ell \cdot \sqrt{5}}$$

Analisando agora o triângulo A_1B_2M, concluímos que ele é retângulo em B_2 pois o segmento $\overline{MB_2}$ é perpendicular à face $A_1A_2B_2B_1$ do paralelepípedo e, portanto, perpendicular ao segmento $\overline{A_1B_2}$ contido nesta face.

Observando o triângulo retângulo A_1B_2M, concluímos que o segmento $\overline{B_2N}$ é perpendicular à hipotenusa $\overline{A_1M}$ pois $\overline{B_2N}$ representa a distância de B_2 à reta A_1M e, por definição, distância de ponto à reta é sempre perpendicular à reta. Temos então a seguinte situação:



Usando o teorema de Pitágoras, calculamos A_1M:

$$(A_1M)^2 = (2\ell)^2 + (\ell\sqrt{5})^2 = 4\ell^2 + 5\ell^2 = 9\ell^2 \Rightarrow \boxed{A_1M = 3\ell}$$

Agora, a relação métrica a · h = b · c (o produto da hipotenusa pela altura correspondente é igual ao produto dos catetos), nós dá:

$(A_1M) \cdot (B_2N) = (A_1B_2) \cdot (B_2M)$; substuindo os valores correspondentes, temos:

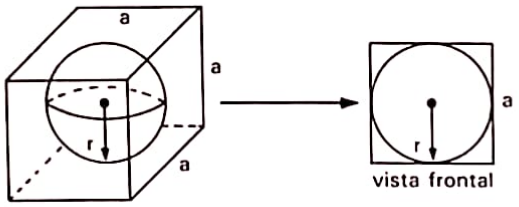
$$\Rightarrow 3\ell \cdot (B_2N) = \ell\sqrt{5} \cdot 2\ell \Rightarrow \boxed{B_2N = \frac{2\ell \cdot \sqrt{5}}{3}}$$

Scanned by CamScanner

7. Considere um cubo de aresta a. Determine:
a) o raio r da esfera inscrita no cubo;
b) o raio R da esfera circunscrita ao cubo.

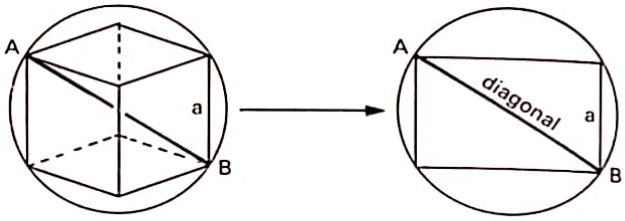
Solução

a) esfera inscrita no cubo é aquela que tangencia todas as seis faces do cubo; os pontos de tangência são os centros das faces. Veja a figura:



Analisando a figura, percebemos que o diâmetro da esfera é igual à aresta do cubo; portanto, $\boxed{r = a/2}$

b) a esfera circunscrita ao cubo é aquela na qual os oito vértices do cubo pertencem à superfície esférica correspondente:

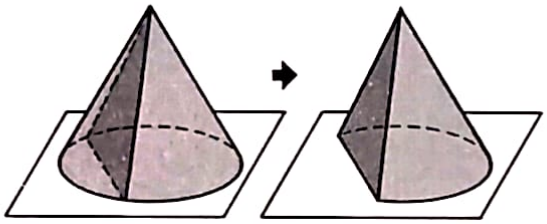


Analisando a figura percebemos que a diagonal $\overline{AB}$ do cubo é igual ao diâmetro da esfera; portanto, como a diagonal do cubo de aresta a é $a\sqrt{3}$, temos:

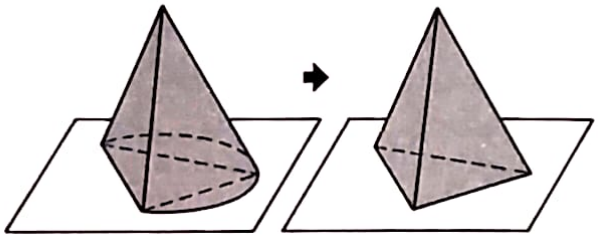
$$2R = a\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{R = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

PIRÂMIDE

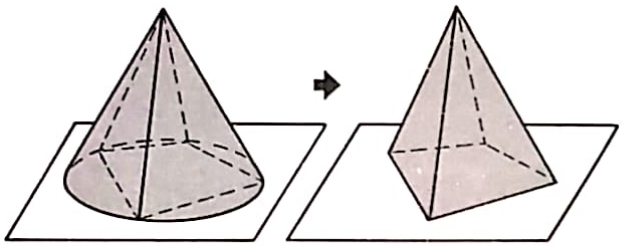
Suponhamos um cone reto apoiado pela base num plano horizontal; vamos cortá-lo, com um plano passando por seu vértice e interceptando a circunferência da base. Obtemos, assim, uma face lateral plana triangular:



Repetindo essa operação mais duas vezes, de modo a retirar toda a parte redonda do cone, obteremos um sólido com três faces laterais planas e triangulares e uma base também triangular — uma pirâmide triangular:



Cortando agora o cone com quatro planos passando por seu vértice, teremos um sólido com quatro faces triangulares e uma base com quatro lados — uma pirâmide quadrangular:

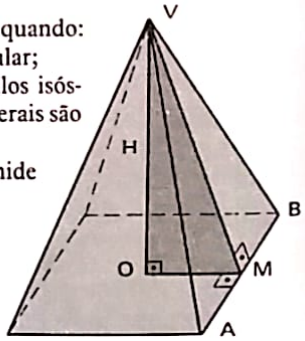


Observe, então, que a pirâmide é um sólido com uma base em forma de polígono e faces laterais triangulares. Podemos ter pirâmides triangulares, quadrangulares, pentagonais, hexagonais etc., conforme o polígono da base tenha três, quatro, cinco, seis ou mais lados, respectivamente.

Pirâmide regular

Uma pirâmide é regular quando:
- a base é um polígono regular;
- as faces laterais são triângulos isósceles e, portanto, as arestas laterais são todas iguais.

Desta forma, numa pirâmide regular quadrangular, por exemplo, a base é um quadrado:



Nas pirâmides regulares temos os elementos:
- a projeção ortogonal do vértice V sobre o plano da base coincide com o centro O da base; a medida do segmento $\overline{VO}$ é a altura H da pirâmide;
- $\overline{OM} = a_b$ = apótema da base; é o segmento que une o centro O da base ao ponto médio M de uma aresta da base, sendo perpendicular a esta aresta;
- $\overline{VM} = a_p$ = apótema da pirâmide; é o segmento que une o vértice V ao ponto médio M de uma aresta da base, sendo perpendicular a esta aresta.

Scanned by CamScanner

Além disso, note que o triângulo VOM é retângulo, o que nos dá: $(VM)^2 = (OM)^2 + (VO)^2$, ou seja:

$$\boxed{(a_p)^2 = (a_b)^2 + H^2}$$

Volume da pirâmide

O volume V de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área B de sua base pela altura H. Simbolicamente:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H}$$

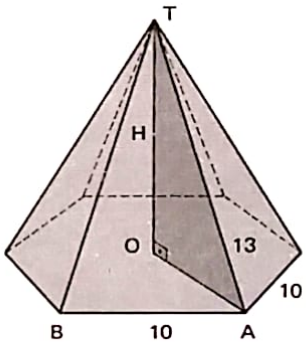
Área da pirâmide

A área S de uma pirâmide é a soma das áreas de todas as faces que a limitam: a base e os triângulos que compõem a lateral da pirâmide (quando a pirâmide é regular, esses triângulos têm todos a mesma área).

EXERCÍCIOS

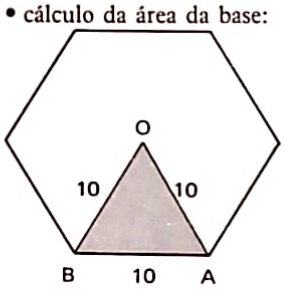
1. Numa pirâmide hexagonal regular, a aresta da base mede 10 cm e a aresta lateral, 13 cm. Calcule o volume e a área da pirâmide.

Solução



Como o volume V é $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$, precisamos inicialmente determinar a área da base B e a altura H.

• cálculo da área da base:



A base é um hexágono regular de lado igual a 10 cm; logo, sua área é a soma das áreas de seis triângulos eqüiláteros de lado $\ell = 10$ cm. Como a área de um triângulo eqüilátero de lado ℓ é $\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, temos:

$$B = \overset{\text{base}}{6 \times \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}} = 6 \times \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} =$$

$$= 6 \times 25\sqrt{3} \quad \boxed{B = 150\sqrt{3}\ \text{cm}^2}$$

• cálculo da altura H.

No triângulo retângulo OAT, temos:

OA = 10 cm (lado do triângulo eqüilátero da base);

AT = 13 cm (aresta lateral da pirâmide);

OT = H; aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

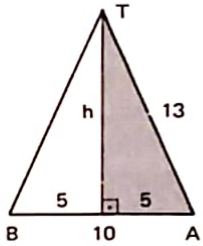
$$13^2 = 10^2 + H^2 \Rightarrow \boxed{H = \sqrt{69}\ \text{cm}}$$

Agora, podemos calcular o volume da pirâmide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 150\sqrt{3} \cdot \sqrt{69} =$$

$$50 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{23} = 50 \cdot 3 \cdot \sqrt{23} \Rightarrow \boxed{V = 150\sqrt{23}\ \text{cm}^3}$$

Calculemos agora a área S da pirâmide. Ela é formada pela area da base B (que já conhecemos) e pelas áreas de seis triângulos isósceles laterais; na figura ao lado temos uma face lateral:



Nesta figura, no triângulo retângulo da direita, temos: $h^2 + 5^2 = 13^2$ e, portanto, h = 12 cm. A área da face lateral, é, então, $S_{face} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{10 \cdot 12}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{S_{face} = 60\ \text{cm}^2}$$

Como são seis faces laterais, a área lateral da pirâmide é $S_L = 6 \cdot S_{face} = 6 \cdot 60\ \text{cm}^2 \Rightarrow \boxed{S_L = 360\ \text{cm}^2}$

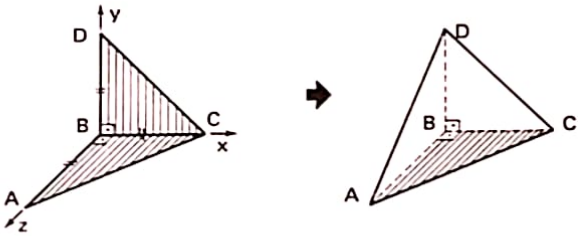
Finalmente, a área total da pirâmide é:

$$S = B + S_L = 150\sqrt{3} + 360 \Rightarrow \boxed{S = 30(5\sqrt{3} + 12)\ \text{cm}^2}$$

2. (PUCC-SP) Dois triângulos ABC e BCD são isósceles, retângulos em B e contidos em planos perpendiculares. Sabendo que a hipotenusa do primeiro triângulo mede $a\sqrt{2}$, determine o volume do sólido ABCD.

Solução

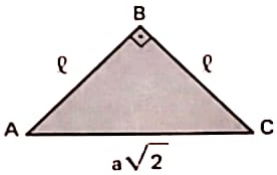
Caso você tenha dificuldade em imaginar a figura correspondente ao enunciado, pense em planos perpendiculares como o chão e uma parede no canto da sala onde você está estudando. Coloque o triângulo ABC no chão e o triângulo BCD na parede, como na figura seguinte:



O sólido ABCD é uma pirâmide. Sua base é o triângulo ABC e sua altura é o segmento $\overline{BD}$, pois $\overline{BD}$ é a distância do vértice D à base ABC, já que $\overline{BD}$ é perpendicular ao plano da base ABC.

Para calcularmos o volume do sólido, precisamos da área B de sua base e da altura H.

• cálculo da área da base B:



O triângulo ABC é retângulo isósceles (AB = BC = ℓ) com hipotenusa $a\sqrt{2}$. Então:

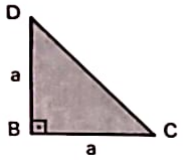
$$(a\sqrt{2})^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow 2a^2 = 2\ell^2 \Rightarrow \boxed{\ell = a}$$

Scanned by CamScanner

Portanto, a área do triângulo ABC é:

$$B = \frac{\ell \cdot \ell}{2} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \boxed{B = \frac{a^2}{2}}$$

• cálculo da altura H:



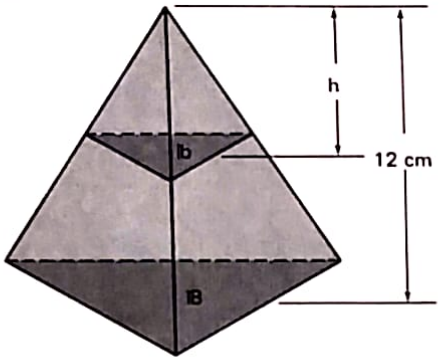
O triângulo BCD também é isósceles e retângulo. Como $BC = \ell = a$, obtemos $BD = a$, ou seja, $\boxed{H = BD = a}$

Finalmente, o volume do sólido ABCD (volume de uma pirâmide) é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6} \Rightarrow \boxed{V = \frac{a^3}{6}}$$

3. Uma pirâmide triangular tem 12 cm de altura. Determinar a que distância do vértice deve-se traçar um plano paralelo à base, de modo que a área da secção obtida seja 1/4 da área da base.

Solução



Exatamente como no caso dos cones semelhantes, aqui também valem os mesmos resultados pois agora temos duas pirâmides semelhantes.

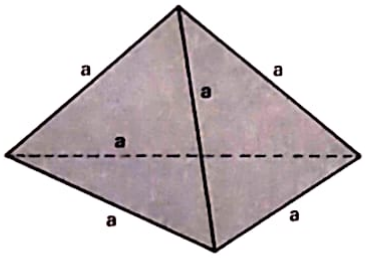
Lembrando então que "a razão das áreas das bases de dois sólidos semelhantes é igual ao quadrado da razão de suas alturas", temos:

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{h}{12}\right)^2 = \frac{h^2}{144} \Rightarrow h^2 = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h = 6 \text{ cm}}$$

Tetraedro regular

Um tetraedro é uma pirâmide de base triangular. O tetraedro é regular quando suas quatro faces são triângulos eqüiláteros; é claro que, neste caso, as quatro faces são iguais entre si.

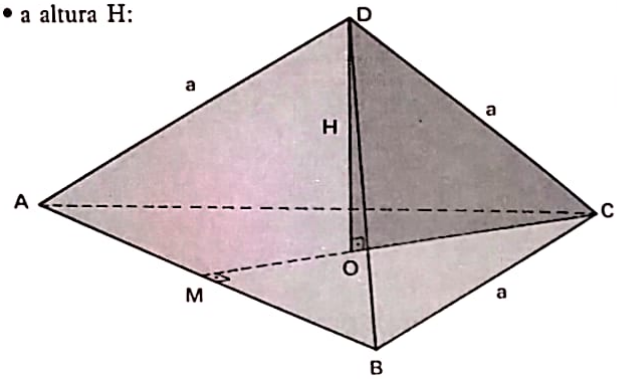


Suponhamos, agora, um tetraedro regular de aresta a; calculemos sua área S, sua altura H e seu volume V, em função da aresta a. Os resultados obtidos você não precisa saber de cor, mas é aconselhável saber como achá-los.

• a área S:

A área S é a soma das áreas das quatro faces triangulares. Como essas faces são triângulos eqüiláteros de lado a, e a área de cada uma delas é $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ (vimos isto em geometria plana), segue-se que a área do tetraedro é $S = 4 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ e, portanto, $\boxed{S = a^2 \cdot \sqrt{3}}$

• a altura H:



A altura será calculada usando o triângulo retângulo DOC, de hipotenusa DC = a e catetos DO = H e OC. Acompanhe o cálculo de OC:

1º no triângulo eqüilátero ABC da base, CM é a altura e, portanto, $\boxed{CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$

2º o ponto O, "pé da altura DO" é o centro da base ABC e, portanto, divide a altura CM na razão 2:1, ou seja, $OC = 2.OM \Rightarrow OC = \frac{2}{3} \cdot CM$

Como $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}}$

Agora aplicamos o teorema de Pitágoras ao triângulo DOC: $(DC)^2 = (DO)^2 + (OC)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow \boxed{H = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

• o volume V:

O volume do tetraedro é $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$, onde:

B = área do triângulo eqüilátero da base: $B = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

H = altura do tetraedro: $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Portanto, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}}$

EXERCÍCIO

1. O volume de um tetraedro regular de aresta a é $18\sqrt{2}$ cm³; calcule a medida de sua aresta.

Solução

Lembrando a fórmula do volume do tetraedro regular de aresta a, temos: $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2} \Rightarrow a^3 \cdot \sqrt{2} =$

$= 18 \cdot 12\sqrt{2} \Rightarrow a^3 = 216 = 6^3 \Rightarrow \boxed{a = 6 \text{ cm}}$

Scanned by CamScanner

ÁLGEBRA

MATRIZES

O estudo das matrizes é um dos mais novos e importantes ramos da Matemática. Grande número de operações executadas por modernos computadores se utilizam de matrizes. Cálculos estatísticos, cálculos matemáticos da área de economia, bem como importantes estudos da física atômica, aplicam matrizes na resolução de seus problemas. No nosso curso, em particular, nos utilizaremos das matrizes para a resolução de sistemas de equações lineares.

Uma matriz de tipo m×n (leia: *m* por *n*) é uma tabela de números reais dispostos em *m* linhas e *n* colunas.

Exemplos

1. A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 7 & 12 \end{bmatrix}$ é do tipo 2×3 (dois por três) pois possui 2 linhas e 3 colunas (m = 2 e n = 3).

Podemos também representar a matriz A de outra maneira:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

2. A matriz $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 2 \\ -1 & \pi \end{bmatrix}$ é do tipo 2×2 (duas linhas e duas colunas).

Casos Particulares

- quando o número *m* de linhas é igual ao número *n* de colunas, dizemos que a **matriz é quadrada de ordem n.** Ex.: $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.
- quando uma matriz tem uma única linha (m = 1), dizemos que ela é uma **matriz-linha**. Ex.: $M = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -9 & 0 \end{bmatrix}$.
- quando uma matriz tem só uma coluna (n = 1), dizemos que ela é uma **matriz coluna**. Ex.: $M = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
- quando todos os elementos de uma matriz são nulos, a matriz denomina-se **matriz nula**. Ex.: $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Representação

Numa matriz genérica A, de *m* linhas e *n* colunas, todos os elementos serão designados por uma mesma letra, afetada de dois índices numéricos: o primeiro índice acusa a linha onde se encontra o elemento considerado e o segundo índice, a coluna (sempre nessa ordem). Assim, por exemplo, na matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ os elementos são:

$a_{11} = 4$ (1ª linha e 1ª coluna) (lê-se: *a* um, um, igual a 4)
$a_{12} = 1$ (1ª linha e 2ª coluna) (lê-se: *a* um, dois, igual a 1)
$a_{13} = 6$ (1ª linha e 3ª coluna)
$a_{21} = 3$ (2ª linha e 1ª coluna)
$a_{22} = 2$ (2ª linha e 2ª coluna)
$a_{23} = 7$ (2ª linha e 3ª coluna)

Genericamente, se a matriz A tem *m* linhas e *n* colunas, teremos:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Resumidamente, podemos representar: $A = (a_{ij})_{m \times n}$

EXERCÍCIOS

1. Na matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, determinar:

a) a_{32}, a_{22} e a_{13}
b) a soma dos elementos da 2ª coluna
c) $a_{21} + a_{33} + a_{12}$

Solução

a) a_{32} é o elemento da 3ª linha e 2ª coluna de A. Logo $a_{32} = -3$. Analogamente: $a_{22} = 0$ (2ª linha e 2ª coluna) e $a_{13} = -1$ (1ª linha e 3ª coluna).
b) A soma dos elementos da 2ª coluna é $a_{12} + a_{22} + a_{32} = 7 + 0 + (-3) = 4$
c) $a_{21} + a_{33} + a_{12} = 3 + 6 + 7 = 16$.

2. Escrever a matriz $A = (a_{ij})$, quadrada de ordem 2, sabendo que $a_{ij} = 3i - 2j$.

Solução

Como a matriz dada é quadrada de ordem 2, temos:

Scanned by CamScanner

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, aplicando a relação dada, $a_{ij} = 3i + -2j$, vamos calcular cada um dos elementos da matriz A.

$a_{11} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$ $\quad a_{21} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4$

$a_{12} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1$ $\quad a_{22} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 2$

Portanto, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes A e B são iguais se forem do mesmo tipo e se tiverem seus elementos correspondentes (que ocupam posições iguais em A e B), respectivamente iguais.

> Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ temos: $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j.

Exemplos

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \\ t = 4 \end{cases}$

2. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & t & 10 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ t = 2 \\ x = 10 \\ y = -1 \end{cases}$

Adição de matrizes

Somam-se matrizes de mesmo tipo, somando-se seus elementos correspondentes. Simbolicamente:

> Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$ temos que a soma A + B é a matriz C, se, e somente se, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo *i* e todo *j*

Exemplos

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+8 \\ 0+1 & 4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Propriedades da adição de matrizes

Sendo A, B e C matrizes do mesmo tipo, e 0 a matriz nula do mesmo tipo das anteriores, temos as seguintes propriedades:

Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$

Comutativa: $A + B = B + A$

Elemento neutro: $A + 0 = 0 + A = A$

Elemento oposto: $A + (-A) = 0$, onde $-A$ é a matriz oposta de A. Obtém-se a matriz $-A$, trocando os sinais de todos os elementos de A.

> **OBSERVAÇÃO** Podemos também definir a diferença $A - B$, de duas matrizes do mesmo tipo, como sendo a soma da matriz A com a oposta da matriz B. Isto é, $A - B = A + (-B)$.
>
> **Exemplo:** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$
>
> $A - B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Multiplica-se um número real por uma matriz, multiplicando-se o número real por todos os elementos da matriz.

Exemplos

a) $2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 7 & 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 14 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot (-6) & \frac{1}{2} \cdot 4 \\ \frac{1}{2} \cdot 0 & \frac{1}{2} \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

EXERCÍCIOS

1. Construir a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, tal que: $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

Solução

A matriz A terá 3 linhas e 3 colunas (3×3), portanto podemos assim representá-la:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Temos:
- $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$, pois $i = j$;
- os demais elementos são todos nulos, pois $i \neq j$.

Logo, a matriz A será: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule as matrizes:

a) $A - B$ $\quad$ b) $A + 2B$ $\quad$ c) $3A - 2B$

Solução

a) $A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A + 2B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$

c) $3A - 2B = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

3. Determinar os números reais x, y e z tais que:

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x & 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & y \\ x & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

Solução

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3y \\ 3x & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 3y \\ (3x+4) & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z = 2} \\ 3y = 3 \Rightarrow \boxed{y = 1} \\ 3x + 4 = x \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{x = -2} \end{cases}$

Scanned by CamScanner

Multiplicação de matrizes

Já mostramos que a soma de matrizes é feita de maneira óbvia: somamos os elementos correspondentes. Infelizmente não podemos repetir esse mesmo tipo de operação na multiplicação de matrizes. O produto de matrizes é feito de maneira muito mais elaborada. Acompanhe.

Começaremos multiplicando uma matriz-linha, A = (2 3 4), por uma matriz-coluna, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. A matriz produto de A por B, que será indicada por AB, terá um único elemento, que será obtido multiplicando os elementos da linha de A pelos elementos da coluna de B, ordenadamente, e somando os resultados. Veja:

$$AB = (2\ 3\ 4).\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = (2 \times 1 + 3 \times 5 + 4 \times 0) = (17)$$

O produto AB é uma matriz do tipo 1×1, cujo único elemento é 17.

É importante você guardar que:

- o número de **colunas** de **A** deve ser **igual** ao número de **linhas** de **B**, para que se defina o produto AB. No exemplo anterior, A tem três colunas e B tem três linhas;
- a **matriz produto AB** tem o mesmo número de **linhas** de **A**, e o mesmo número de **colunas** de **B**. No exemplo anterior, A tem uma linha, B tem uma coluna, e a matriz produto tem uma linha e uma coluna.

Generalizando:

Vamos supor que $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sejam matrizes tais, que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, isto é, A é do tipo $m \times p$, e B é do tipo $p \times n$. Então, o produto AB = C é a matriz de tipo $m \times n$, cujo elemento da linha *i* e coluna *j* é obtido multiplicando a linha *i* de A pela coluna *j* de B. Portanto, teremos:

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}}$$

Acompanhe com atenção os exemplos seguintes:

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $B \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Como A é do tipo 3×2 e B é do tipo 2×1, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B (ambos valem 2). O produto AB será definido resultando uma matriz do tipo 3×1. Para obter a 1ª linha de AB, multiplicamos a 1ª linha de A pela coluna de B:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \times 1 + 6 \times 2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{bmatrix}$$

Para obter o elemento da 2ª linha de AB, multiplicamos a 2ª linha de A pela coluna de B:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \times 1 + 3 \times 2 \\ \dots\dots\dots\dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ \dots\dots \end{bmatrix}$$

Finalmente, vamos obter o elemento da 3ª linha de AB, multiplicando a 3ª linha de A pela coluna de B:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 4 \times 1 + 5 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Portanto: $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$. Como A e B são matrizes do tipo 2×2, o produto $A \cdot B = C$ estará definido e será uma matriz do tipo 2×2, isto é, $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$.

Para obtermos o elemento c_{11}, utilizaremos os elementos da **1ª linha de A**, com os elementos da **1ª coluna de B**. Acompanhe com atenção:

$$c_{11} = \overset{a_{11}}{3} \times \overset{b_{11}}{0} + (-1) \times \overset{a_{12}}{6} \quad \overset{b_{21}}{} = -6$$

Para obtermos o elemento c_{12}, utilizaremos a **1ª linha de A**, com a **2ª coluna de B:**

$$c_{12} = \overset{a_{11}}{3} \times \overset{b_{21}}{5} + (-1) \times \overset{a_{12}}{1} \quad \overset{b_{22}}{} = 14$$

Para obtermos o elemento c_{21}, vamos usar a **2ª linha de A**, com a **1ª coluna de B:**

$$c_{21} = \overset{a_{21}}{4} \times \overset{b_{11}}{0} + \overset{a_{22}}{2} \times \overset{b_{21}}{6} = 12$$

E, finalmente, o elemento c_{22}, será obtido utilizando-se a **2ª linha de A**, com a **2ª coluna de B:**

$$c_{22} = \overset{a_{21}}{4} \times \overset{b_{12}}{5} + \overset{a_{22}}{2} \times \overset{b_{22}}{1} = 22$$

Logo, $A \cdot B = C = \begin{bmatrix} -6 & 14 \\ 12 & 22 \end{bmatrix}$

3. Tomando as mesmas matrizes A e B do exemplo anterior, vamos calcular o produto $D = B \cdot A$. Este produto será também uma matriz do tipo 2×2.

$$D = B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

$d_{11} = 0 \times 3 + 5 \times 4 = 20$
$d_{12} = 0 \times (-1) + 5 \times 2 = 10$
$d_{21} = 6 \times 3 + 1 \times 4 = 22$
$d_{22} = 6 \times (-1) + 1 \times 2 = -4$

Portanto a matriz D será $= \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 22 & -4 \end{bmatrix}$

Observe que a matriz $A \cdot B$, calculada no exemplo 2, é diferente de BA, calculada agora. Quando se opera com matrizes, de um modo geral $AB \neq BA$, isto é, a multiplicação de matrizes não é uma operação comutativa.

4. Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$. Como A tem quatro colunas e B possui três linhas, o produto AB não está definido. Verifique que o produto BA, também não será definido.

5. Se $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $B = [0\ 0\ 1]$, temos:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [0 \quad 0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 \times 0 & 1 \times 0 & 1 \times 1 \\ 0 \times 0 & 0 \times 0 & 0 \times 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que o produto BA, não estará definido, pois o número de colunas de B (3) não é igual ao número de linhas de A (2).

Scanned by CamScanner

OBSERVAÇÃO
- podem estar definidos AB e BA;
- podem não estar definidos nem AB e nem BA;
- um produto pode estar definido e o outro não.

EXERCÍCIOS

1. Determine o tipo de matriz produto AB quando estiver definida, em cada caso seguinte:

a) A é 3×2 e B é 2×4 c) A é 3×1 e B é 1×3
b) A é 1×3 e B é 3×1 d) A é 1×2 e B é 1×2

Solução

a) O número de colunas de A (2) é igual ao número de linhas de B (2), logo, o produto está definido. A matriz produto será do tipo 3×4, pois A tem três linhas e B tem 4 colunas.

b) O número de colunas de A (3) é igual ao número de linhas de B (3) logo o produto está definido e será uma matriz do tipo 1×1, pois A tem uma linha e B tem uma coluna.

c) O número de colunas de A (1) é igual ao número de linhas de B (1), portanto o produto será definido resultando uma matriz do tipo 3×3, pois A tem 3 linhas e B tem 3 colunas.

d) O número de colunas de A (2) é diferente do número de linhas de B (1), logo o produto não estará definido.

2. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} n & 5 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}$, determinar:

a) AB b) BA c) o valor de *n* para o qual AB = BA

Solução

a) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n & 5 \\ 20 & 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 2\cdot n+1\times20 & 2\times5+1\times0 \\ 4\cdot n+3\times20 & 4\times5+3\times0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n+20 & 10 \\ 4n+60 & 20 \end{bmatrix}$

b) $BA = \begin{bmatrix} n & 5 \\ 20 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} n\cdot2+5\times4 & n\cdot1+5\times3 \\ 20\times2+0\times4 & 20\times1+0\times3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n+20 & n+15 \\ 40 & 20 \end{bmatrix}$

c) $AB = BA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2n+20 & 10 \\ 4n+60 & 20 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 2n+20 & n+15 \\ 40 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} n+15 = 10 \\ 4n+60 = 40 \end{cases} \Rightarrow n = -5$

3. (FEI-SP) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, determine X tal que AX = B.

Solução

$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1\cdot x+2\cdot y \\ 0\cdot x+1\cdot y \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x+2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ resolvendo o sistema iremos obter:

$x = 0$ e $y = 1$, portanto $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Considere as matrizes:

a) $A = (a_{ij})$, 3×2, definida por $a_{ij} = i + j$
b) $B = (b_{ij})$, 2×3, definida por $b_{ij} = i^j$
c) $C = (c_{ij})$, $C = AB$.

Determinar o elemento c_{32} da matriz C.

Solução

Para se obter o elemento c_{32}, vamos utilizar a 3ª linha da matriz A, com a 2ª coluna da matriz B. 3ª linha de A; a_{31} e a_{32} (lembrar que $a_{ij} = i + j$)

$a_{31} = 3 + 1 = 4$; $a_{32} = 3 + 2 = 5$

2ª coluna de B; b_{12} e b_{22} (lembrar que $b_{ij} = i^j$)

$b_{12} = 1^2 = 1$; $b_{22} = 2^2 = 4$

Portanto, c_{32} será $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 4 & \cdot \end{bmatrix}$

$c_{32} = 4\times1+5\times4 = 24$

Logo, $c_{32} = 24$.

Propriedades da multiplicação

Propriedade associativa

Sendo as matrizes: A, do tipo $m\times n$; B do tipo $n\times p$ e C do tipo $p\times q$, temos que: $\boxed{(AB)\,C = A(BC)}$

Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

- à direita: sendo A e B matrizes do tipo $m\times n$, e C uma matriz do tipo $n\times p$, temos que: $\boxed{(A+B)\,C = AC + BC}$
- à esquerda: sendo a matriz A do tipo $m\times n$, B e C do tipo $n\times p$, temos que: $\boxed{A(B+C) = AB + AC}$

OBSERVAÇÕES
- lembre que, de um modo geral, a propriedade comutativa não vale para a multiplicação de matrizes, isto é $AB \neq BA$;
- se AB = 0, não podemos concluir que A = 0 ou B = 0, porque podemos ter matrizes não nulas, que multiplicadas resultem uma matriz nula.

Transposta de uma matriz

Dada uma matriz A do tipo $m\times n$, chama-se transposta de A à matriz do tipo $n\times m$ que tem as colunas ordenadamente iguais às linhas de A. A matriz transposta de A é indicada por A^t.

Exemplos

1. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, então a transposta de A será $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Note que a 1ª linha de A é igual à 1ª coluna de B e que a 2ª linha de A é igual à 2ª coluna de B.

2. Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, então $A^t = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = A$. Quando ocorrer $A^t = A$, dizemos que a matriz A é uma matriz simétrica. Para a transposição de matrizes, valem as seguintes propriedades:

- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- $(AB)^t = B^t \cdot A^t$ (atenção à inversão da ordem)

Scanned by CamScanner

EXERCÍCIOS

1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$, verificar que $(AB)^t = B^t \cdot A^t$.

Solução

Como $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times0+2\times7 \\ 4\times0+3\times7 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 14 \\ 21 \end{bmatrix}$, segue-se que: $(AB)^t = [14 \quad 21]$ (I)

Por outro lado, temos $B^t = [0 \quad 7]$, $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e, então: $B^t \cdot A^t = [0 \quad 7] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} =$

$= [0\times1+7\times2 \quad 0\times4+7\times3] = [14 \quad 21]$ (II)

Comparando (I) e (II), concluímos que $(AB)^t = B^t \cdot A^t$.

2. (FEI-SP) Se A é uma matriz quadrada de ordem 2 e A^t sua transposta, determine A tal que $A = 2A^t$.

Solução

Fazemos $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$. A matriz transposta de A é, então, $A^t = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$.

Agora: $A = 2A^t \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2z \\ 2y & 2t \end{bmatrix}$

Pela definição de igualdade de matrizes obteremos:

$$\begin{cases} x = 2x \\ y = 2z \\ z = 2y \\ t = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Portanto, a matriz procurada é $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Matriz identidade

As matrizes $I_1 = [1]$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ etc., são chamadas matrizes unidade ou matrizes identidade de ordem 1, 2, 3 etc., respectivamente.

Assim a matriz identidade de ordem n, que indicamos por I_n, poderá ser assim definida:

$$I_n = (a_{ij})_{n\times n}, \text{ onde } a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

OBSERVAÇÕES

- sendo A uma matriz quadrada de ordem n, e I_n a matriz identidade de ordem n, teremos:

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

- numa matriz quadrada, os elementos a_{ij} tais que $i = j$, formam a diagonal principal da matriz. Por exemplo, numa matriz quadrada de ordem 3, os elementos a_{11}, a_{22} e a_{33} constituem a diagonal principal. Veja portanto que na matriz identidade de ordem *n*, os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1, enquanto que os demais elementos são todos nulos.

Inversão de matrizes

Uma matriz quadrada A, de ordem *n*, é inversível se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$ (onde I_n é matriz identidade de ordem *n*).

Caso não exista a matriz B acima, diremos que a matriz A é não inversível ou singular. A matriz *B*, se existir, também será quadrada, de ordem *n*, e será chamada de **matriz inversa de A**. Indicaremos a matriz B, inversa de A, por A^{-1}. Assim:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Exemplo

A inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ é $A^{-1} =$

$= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Observe que:

$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

(matriz identidade de ordem 2)

$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

Logo: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$

EXERCÍCIOS

1. Obter a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$.

Solução

Fazemos $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$. Pela definição de inversão de matrizes devemos ter $A \cdot A^{-1} = I_2$, ou seja:

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x+2z & 3y+2t \\ 7x+5z & 7y+5t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 3x+2z = 1 \\ 7x+5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ z = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y+2t = 0 \\ 7y+5t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ t = 3 \end{cases}$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

OBSERVAÇÃO Não será necessário verificar a igualdade $A^{-1} \cdot A = I_2$, pois ela certamente será verdadeira.

2. Verificar se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz inversível.

Solução

Fazemos $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, obtendo:

$A \cdot A^{-1} = I_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ 3x & 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3x = 0 \\ y = 0 \\ 3y = 1 \end{cases}$$

Não podemos ter ao mesmo tempo $x = 1$ e $x = 0$, e nem $y = 0$ e $y = 1/3$, portanto o sistema será impossível. Logo, a matriz A não é inversível.

Scanned by CamScanner

Propriedades da inversão de matrizes

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (atenção à inversão de ordem)

DETERMINANTES

Determinante associado a uma matriz quadrada é um número obtido a partir dos elementos dessa matriz. Os determinantes têm várias aplicações na Matemática, entre as quais a resolução de sistemas de equações lineares, como veremos mais adiante.

Determinante associado a uma matriz quadrada de ordem 1:

Se uma matriz A é formada por um único elemento, isto é, se $A = (a_{11})$, então, por definição, o determinante de A é o número $\det A = a_{11}$.

Exemplo

O determinante da matriz $A = (-3)$ é $\det A = -3$.

Determinante associado a uma matriz quadrada de ordem 2:

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, então o determinante da matriz A será indicado por: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

ATENÇÃO Não confunda as notações. Enquanto a matriz é representada por colchetes [ ], o determinante é indicado por duas barras | |.

O determinante da matriz A será assim definido:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Exemplos

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\times5 - 1\times4 = 10 - 4 = 6$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1\times6 - 3\times2 = 6 - 6 = 0$

3. $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\times(-2) - (-2)\times3 = 2 + 6 = 8$

Determinante associado a uma matriz quadrada de ordem 3:

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, então o determinante de A é o número:

$\det A = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) - (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) + - (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$

Existe, no entanto, uma maneira fácil de calcular determinantes de ordem 3, conhecida como regra de Sarrus. Acompanhe com atenção:

- repita as duas primeiras colunas ao lado da matriz;
- os termos com sinal ⊕ são obtidos multiplicando-se os elementos das flechas que acompanham a diagonal principal;
- os termos com sinal ⊖ são obtidos multiplicando-se os elementos das flechas que acompanham a diagonal secundária.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Exemplos

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 10 & 4 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 10 \\ 5 & 7 \end{matrix} =$

$= 60 + 0 + 42 - 150 - 28 - 0 = -76$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{matrix} =$

$= 0 + 0 + 0 - 0 - (-5) - 0 = 5$

OBSERVAÇÃO Lembre que a **matriz** é o **quadro** de números reais, enquanto o **determinante** de uma matriz é o **número real** associado a ela.

EXERCÍCIOS

1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, assinale verdadeiro (V) ou falso (F):

a) $\det A = \det B$

b) $\det A^t = \det A$

c) $\det(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot \det A, \forall \alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

d) $\det(A + B) = \det A + \det B$

e) $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$

Solução

a) F

$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\times2 - 5\times3 = 8 - 15 = -7$

$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1 - 2\times2 = 1 - 4 = -3$

b) V

$A^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A^t) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 4\times2 - 3\times5 = 8 - 15 = -7 = \det A$

c) F

$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\alpha & 5\alpha \\ 3\alpha & 2\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(\alpha \cdot A) = \begin{vmatrix} 4\alpha & 5\alpha \\ 3\alpha & 2\alpha \end{vmatrix} =$

$(4\alpha) \cdot (2\alpha) - (5\alpha) \cdot (3\alpha) = 8\alpha^2 - 15\alpha^2 = -7\alpha^2.$

Como $\alpha \cdot \det A = -7\alpha$, temos que $\det(\alpha \cdot A) \neq \alpha \cdot \det A$.

Scanned by CamScanner

d) F

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(A + B) = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 35 = -20$$

Det A + det B = (−7) + (−3) = −10, logo det (A + B) ≠ ≠ det A + det B.

e) V

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 14 & 13 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 112 - 91 = 21$$

Como det A · det B = (−7) · (−3) = 21, det (A · B) = = det A · det B.

2. (FEI-SP) Calcular o valor de *m* real tal que, $\det(A - m \cdot I_3) = 0$, onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 18 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ e I_3 é a matriz identidade de ordem 3.

Solução

Inicialmente calculamos a matriz $A - mI_3$:

$$A - mI_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 18 & 3 & 3 \end{bmatrix} - m \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 18 & 3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2-m & 1 & 0 \\ 0 & 2-m & -1 \\ 18 & 3 & 3-m \end{bmatrix}$$

Como $\det(A - mI_3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 0 \\ 0 & 2-m & -1 \\ 18 & 3 & 3-m \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando a regra de Sarrus para o determinante no 1º membro, vamos obter:

$$\begin{vmatrix} 2-m & 1 & 0 \\ 0 & 2-m & -1 \\ 18 & 3 & 3-m \end{vmatrix} \begin{matrix} 2-m & 1 \\ 0 & 2-m \\ 18 & 3 \end{matrix} = 0$$

$$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \quad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$$

$(2 - m)(2 - m)(3 - m) + 1 \cdot (-1) \cdot (-18) + + 0 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot (2 - m) \cdot 18 - 3 \cdot (-1) \cdot (2 - m) + -1 \cdot 0 \cdot (3 - m) = 0$

Resolvendo as operações indicadas e reduzindo os termos semelhantes vamos obter:

$-m^3 + 7m^2 - 19m = 0 \Leftrightarrow -m(m^2 - 7m + 19) = 0$

$$\begin{cases} -m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \\ \text{ou} \\ m^2 - 7m + 19 = 0 \Rightarrow m \notin \mathbb{R} \text{ (pois } \Delta < 0) \end{cases}$$

Portanto, teremos $\det(A - mI_3) = 0$, com *m* real, se, e somente se, m = 0.

3. (FAAP-SP) Resolver e discutir a equação:

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Solução

Calculando o determinante pela regra de Sarrus, teremos:

$$D = \begin{vmatrix} x & a & b \\ a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & a \\ a & 0 \\ -b & -c \end{matrix} =$$

$$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \quad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$$

$= -abc - abc + c^2x = c^2x - 2abc = 0$, ou seja, $c(cx - 2ab) = 0$.

Temos, agora, duas possibilidades:

• c = 0

Neste caso, a equação c(cx − 2ab) = 0 reduz-se a 0 · (0 · x − 2ab) = 0, que é satisfeita para qualquer x real. Seu conjunto solução é, então, $S = \mathbb{R}$.

• c ≠ 0

Neste caso, c(cx − 2ab) = 0 nos dá cx − 2ab = 0 e, portanto, $x = \frac{2ab}{c}$. Então, $S = \left\{\frac{2ab}{c}\right\}$.

Resumindo: $S = \begin{cases} \mathbb{R}, \text{ se } c = 0 \\ \left\{\frac{2ab}{c}\right\}, \text{ se } c \neq 0 \end{cases}$

■ Determinante associado a uma matriz quadrada de ordem maior que 3:

Para calcularmos determinantes de matrizes quadradas de ordem maior que 3, precisaremos de algumas definições preliminares que passaremos a ver na seqüência desse assunto. No entanto, é bom deixar claro que tudo que estudaremos a seguir é válido para determinantes de qualquer ordem, inclusive 3 e 2, que já foram estudados.

Menor complementar

Se A é uma matriz quadrada de ordem n ⩾ 2, e a_{ij} é um de seus elementos, então o menor complementar do elemento a_{ij} é o determinante que se obtém retirando a linha *i* e a coluna *j* da matriz A.

Indicaremos o menor complementar do elemento a_{ij} por M_{ij}.

Exemplos

1. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, vamos calcular o menor complementar M_{11} do elemento a_{11}.

Como queremos M_{11}, retiramos a primeira linha e a primeira coluna de A:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

A matriz que "sobra" é $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, cujo determinante é $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 20 = -13$. O valor desse determinante é o menor complementar M_{11}, do elemento a_{11}. Portanto obtemos: $M_{11} = -13$.

2. Para a mesma matriz A do exemplo anterior, o menor complementar M_{23}, do elemento a_{23}, é obtido retirando-se a segunda linha e a terceira coluna de A:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Propriedades da inversão de matrizes

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (atenção à inversão de ordem)

DETERMINANTES

Determinante associado a uma matriz quadrada é um número obtido a partir dos elementos dessa matriz. Os determinantes têm várias aplicações na Matemática, entre as quais a resolução de sistemas de equações lineares, como veremos mais adiante.

Determinante associado a uma matriz quadrada de ordem 1:

Se uma matriz A é formada por um único elemento, isto é, se $A = (a_{11})$, então, por definição, o determinante de A é o número $\det A = a_{11}$.

Exemplo

O determinante da matriz $A = (-3)$ é $\det A = -3$.

Determinante associado a uma matriz quadrada de ordem 2:

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, então o determinante da matriz A será indicado por: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

ATENÇÃO Não confunda as notações. Enquanto a matriz é representada por colchetes [ ], o determinante é indicado por duas barras | |.

O determinante da matriz A será assim definido:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Exemplos

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\times5 - 1\times4 = 10 - 4 = 6$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1\times6 - 3\times2 = 6 - 6 = 0$

3. $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\times(-2) - (-2)\times3 = 2 + 6 = 8$

Determinante associado a uma matriz quadrada de ordem 3:

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, então o determinante de A é o número:

$$\det A = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) - (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) - (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

Existe, no entanto, uma maneira fácil de calcular determinantes de ordem 3, conhecida como regra de Sarrus. Acompanhe com atenção:

- repita as duas primeiras colunas ao lado da matriz;
- os termos com sinal ⊕ são obtidos multiplicando-se os elementos das flechas que acompanham a diagonal principal;
- os termos com sinal ⊖ são obtidos multiplicando-se os elementos das flechas que acompanham a diagonal secundária.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Exemplos

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 10 & 4 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 10 \\ 5 & 7 \end{matrix} =$

$= 60 + 0 + 42 - 150 - 28 - 0 = -76$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{matrix} =$

$= 0 + 0 + 0 - 0 - (-5) - 0 = 5$

OBSERVAÇÃO Lembre que a **matriz** é o **quadro** de números reais, enquanto o **determinante** de uma matriz é o **número real** associado a ela.

EXERCÍCIOS

1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, assinale verdadeiro (V) ou falso (F):

a) $\det A = \det B$

b) $\det A^t = \det A$

c) $\det(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot \det A, \forall \alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

d) $\det(A + B) = \det A + \det B$

e) $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$

Solução

a) F

$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\times2 - 5\times3 = 8 - 15 = -7$

$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1 - 2\times2 = 1 - 4 = -3$

b) V

$A^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A^t) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 4\times2 - 3\times5 = 8 - 15 = -7 = \det A$

c) F

$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\alpha & 5\alpha \\ 3\alpha & 2\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(\alpha \cdot A) = \begin{vmatrix} 4\alpha & 5\alpha \\ 3\alpha & 2\alpha \end{vmatrix} =$

$(4\alpha) \cdot (2\alpha) - (5\alpha) \cdot (3\alpha) = 8\alpha^2 - 15\alpha^2 = -7\alpha^2.$

Como $\alpha \cdot \det A = -7\alpha$, temos que $\det(\alpha \cdot A) \neq \alpha \cdot \det A$.

Scanned by CamScanner

d) F

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(A + B) = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 35 = -20$$

Det A + det B = (−7) + (−3) = −10, logo det (A + B) ≠ ≠ det A + det B.

e) V

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 14 & 13 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 112 - 91 = 21$$

Como det A · det B = (−7) · (−3) = 21, det (A · B) = = det A · det B.

2. (FEI-SP) Calcular o valor de *m* real tal que, $\det(A - m \cdot I_3) = 0$, onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 18 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ e I_3 é a matriz identidade de ordem 3.

Solução

Inicialmente calculamos a matriz $A - mI_3$:

$$A - mI_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 18 & 3 & 3 \end{bmatrix} - m \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 18 & 3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2-m & 1 & 0 \\ 0 & 2-m & -1 \\ 18 & 3 & 3-m \end{bmatrix}$$

Como $\det(A - mI_3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 0 \\ 0 & 2-m & -1 \\ 18 & 3 & 3-m \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando a regra de Sarrus para o determinante no 1º membro, vamos obter:

$$\left|\begin{matrix} 2-m & 1 & 0 \\ 0 & 2-m & -1 \\ 18 & 3 & 3-m \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2-m & 1 \\ 0 & 2-m \\ 18 & 3 \end{matrix} = 0$$

$$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \quad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$$

$(2 - m)(2 - m)(3 - m) + 1 \cdot (-1) \cdot (-18) + + 0 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot (2 - m) \cdot 18 - 3 \cdot (-1) \cdot (2 - m) + -1 \cdot 0 \cdot (3 - m) = 0$

Resolvendo as operações indicadas e reduzindo os termos semelhantes vamos obter:

$-m^3 + 7m^2 - 19m = 0 \Leftrightarrow -m(m^2 - 7m + 19) = 0$

$$\begin{cases} -m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \\ \text{ou} \\ m^2 - 7m + 19 = 0 \Rightarrow m \notin \mathbb{R} \text{ (pois } \Delta < 0) \end{cases}$$

Portanto, teremos $\det(A - mI_3) = 0$, com *m* real, se, e somente se, m = 0.

3. (FAAP-SP) Resolver e discutir a equação:

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Solução

Calculando o determinante pela regra de Sarrus, teremos:

$$D = \left|\begin{matrix} x & a & b \\ a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x & a \\ a & 0 \\ -b & -c \end{matrix} =$$

$$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \quad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$$

$= -abc - abc + c^2x = c^2x - 2abc = 0$, ou seja, $c(cx - 2ab) = 0$.

Temos, agora, duas possibilidades:

• c = 0

Neste caso, a equação $c(cx - 2ab) = 0$ reduz-se a $0 \cdot (0 \cdot x - 2ab) = 0$, que é satisfeita para qualquer x real. Seu conjunto solução é, então, $S = \mathbb{R}$.

• c ≠ 0

Neste caso, $c(cx - 2ab) = 0$ nos dá $cx - 2ab = 0$ e, portanto, $x = \frac{2ab}{c}$. Então, $S = \left\{\frac{2ab}{c}\right\}$.

Resumindo: $S = \begin{cases} \mathbb{R}, \text{ se } c = 0 \\ \left\{\frac{2ab}{c}\right\}, \text{ se } c \neq 0 \end{cases}$

■ Determinante associado a uma matriz quadrada de ordem maior que 3:

Para calcularmos determinantes de matrizes quadradas de ordem maior que 3, precisaremos de algumas definições preliminares que passaremos a ver na seqüência desse assunto. No entanto, é bom deixar claro que tudo que estudaremos a seguir é válido para determinantes de qualquer ordem, inclusive 3 e 2, que já foram estudados.

Menor complementar

Se A é uma matriz quadrada de ordem $n \geqslant 2$, e a_{ij} é um de seus elementos, então o menor complementar do elemento a_{ij} é o determinante que se obtém retirando a linha *i* e a coluna *j* da matriz A.

Indicaremos o menor complementar do elemento a_{ij} por M_{ij}.

Exemplos

1. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, vamos calcular o menor complementar M_{11} do elemento a_{11}.

Como queremos M_{11}, retiramos a primeira linha e a primeira coluna de A:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

A matriz que "sobra" é $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, cujo determinante é $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 20 = -13$. O valor desse determinante é o menor complementar M_{11}, do elemento a_{11}. Portanto obtemos: $M_{11} = -13$.

2. Para a mesma matriz A do exemplo anterior, o menor complementar M_{23}, do elemento a_{23}, é obtido retirando-se a segunda linha e a terceira coluna de A:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Então: $M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$

3. Na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, temos por exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_{41} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$

4. Na matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, temos por exemplo:

$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $M_{11} = 1$

Complemento algébrico ou cofator

Como vimos, M_{ij} é o menor complementar do elemento a_{ij}. O complemento algébrico (cofator) do elemento a_{ij} é o número $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Indica-se o cofator do elemento a_{ij} por A_{ij}. Então:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$$

Exemplos

1. No exemplo **1** anterior, com a matriz

$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, temos:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}}_{A_{11} = -13} = (-1)^2 \cdot (-13) = -13.$

2. Na matriz A do exemplo **3** anterior, vimos que o menor complementar do elemento a_{11} era $M_{11} = 0$. Nesse caso, o cofator do elemento a_{11} naquela matriz é, então:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot 0 = 0.$$

Ainda na mesma matriz, vimos que o menor complementar do elemento a_{41} era $M_{41} = -3$. O cofator desse elemento é, então, $A_{41} = (-1)^{4+1} \cdot M_{41} = (-1)^5 \cdot (-3) = 3$.

Definição de determinantes

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n ($n \geqslant 2$) é igual à soma dos produtos dos elementos de sua primeira linha pelos respectivos cofatores.

Exemplos

1. $D = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 10 & 6 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$

$$D = \underset{a_{11}}{3} \cdot \underbrace{(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}}_{A_{11}} + \underset{a_{12}}{10} \cdot \underbrace{(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}_{A_{12}} + \underset{a_{13}}{1} \cdot \underbrace{(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}}_{A_{13}}$$

ATENÇÃO Embora a aplicação dessa definição seja válida também para determinantes de ordem 3, nestes casos optaremos pela utilização da regra de Sarrus, já que ela nos facilita o trabalho. Mas lembre-se! **A regra de Sarrus só é válida para determinantes de ordem 3.**

2. $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$D = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14}$$

Calculando os determinantes de ordem 3, pela regra de Sarrus, vamos obter:

$D = 2 \cdot (-1)^2 \cdot 120 + 1 \cdot (-1)^3 \cdot 90 =$
$= 2 \times 120 - 1 \times 90 = 150$

3. $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} =$

$= 3 \cdot (-1)^2 \cdot 160 = 480.$

■ Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz A, quadrada de ordem n ($n \geqslant 2$), é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.

ATENÇÃO O teorema de Laplace permite que usemos qualquer linha ou coluna da matriz para calcular seu determinante. Não é mais necessário usar apenas a primeira linha, como vínhamos fazendo. Agora poderemos escolher a linha ou coluna onde houver o maior número de zeros.

Exemplos

1. Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$, então calcularemos det A, pelos elementos da segunda linha, onde há mais zeros.

$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 6 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 2 \cdot A_{24} =$

$= 6 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

Calculando-se os determinantes de ordem 3, obteremos:

$\det A = -6 \cdot (-142) + 2 \cdot (-44) = 852 - 88 = 764$

Scanned by CamScanner

2. Se A tiver uma fila onde todos os elementos, exceto um deles, são nulos, seu determinante é igual ao produto desse elemento pelo seu respectivo cofator. Assim:

$$\begin{vmatrix} \boxed{0 \quad 3 \quad 0} \\ 1 \quad 4 \quad 5 \\ 8 \quad 10 \quad 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{12} = 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-1) \cdot (1 - 40) = 117$$

Obviamente, se todos os elementos de uma fila forem nulos, o determinante será nulo.

Propriedades dos determinantes

■ Transpondo-se uma matriz, seu determinante não se altera.

$$\boxed{\det A^t = \det A}$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -14$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A^t = -14$$

■ Trocando-se de posição duas filas paralelas de uma matriz, seu determinante troca de sinal, mantendo o valor absoluto.

$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$, trocando-se de posição a primeira com a segunda linha vamos ter: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$.

$\begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8$, trocando-se de posição a primeira coluna com a terceira coluna, vamos obter: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -8$.

■ Se duas filas paralelas de uma matriz são iguais, isto é, formadas por elementos respectivamente iguais, então seu determinante é nulo.

Exemplos

1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 3 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$ 1ª linha = 3ª linha

2. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 1ª coluna = 3ª coluna

■ Multiplicando-se (ou dividindo-se) uma fila qualquer de uma matriz por um número, seu determinante fica multiplicado (ou dividido) por esse número.

Exemplos

1. O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ vale -2. Se multiplicarmos, por exemplo, a segunda linha de A por 5, obteremos a matriz $A' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 15 & 5 \end{bmatrix}$, cujo determinante vale -10. Observe que $\det A' = 5 \cdot \det A$.

2. Essa propriedade nos permite colocar em evidência, quando possível, fatores comuns a todos os elementos de uma fila.

Acompanhe no exemplo:

$$\begin{vmatrix} 18 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Primeiramente colocamos 3 em evidência, pois é fator comum a todos os elementos da primeira coluna, depois colocamos 2 em evidência, por ser fator comum a todos os elementos da segunda coluna. Essas passagens poderiam ter sido feitas simultaneamente.

OBSERVAÇÃO Note que uma **matriz** A fica multiplicada por um número real α, se **todos** os seus elementos forem multiplicados por α. Agora, um **determinante** D de uma matriz ficará multiplicado por um número α, se multiplicarmos **apenas uma de suas filas** por esse número α.

■ Multiplicando-se uma matriz A, quadrada, de ordem n, por um número α, obtemos a matriz $\alpha \cdot A$, cujo determinante é igual ao determinante de A multiplicado por α^n.

$$\boxed{\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det A}$$

Observe que essa propriedade é obtida por aplicação da propriedade anterior, n vezes, já que ao multiplicar a matriz A pelo número α, multiplicamos suas n linhas por α.

Exemplo

Se $A = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, então $\det A = 1$. Multiplicando-se a matriz A, por 3, obteremos a matriz $3A = \begin{vmatrix} 12 & 15 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}$, cujo determinante vale 9. Observe então que, $\det(3A) = 3^2 \cdot \det A$.

■ Se duas filas paralelas de uma matriz são proporcionais, então seu determinante é nulo.

Exemplos

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$ (a segunda linha é o triplo da primeira)

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 8 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0$ (a terceira linha é o dobro da primeira)

■ Se uma fila de uma matriz é formada pela soma de duas parcelas, então seu determinante é igual à soma de outros dois determinantes: o primeiro formado pelas primeiras parcelas e o segundo formado pelas segundas parcelas, permanecendo inalteradas as demais filas.

Exemplos

1. $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$

ATENÇÃO Para o fato de estarmos somando determinantes e não matrizes.

2. $\begin{vmatrix} 2+3 & 1+2 & 4+5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 8 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 8 & 5 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 8 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

Scanned by CamScanner

Teorema de Jacobi

> Um determinante não se altera quando se soma a uma de suas filas uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante.

Esse teorema, combinado com o teorema de Laplace, nos permite simplificar o cálculo de determinantes. Podemos, através dele, obter zeros numa determinada fila da matriz, sem alterar o seu determinante. Acompanhe os exemplos:

$$1.\ D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Nessa primeira passagem, multiplicamos a primeira coluna por -2 e somamos o resultado à segunda coluna. Com isso, conseguimos obter um zero na posição a_{12}, sem alterar o determinante. Continuando teremos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Numa segunda passagem, multiplicamos a 1ª coluna por (-1) e somamos à terceira coluna.

Podemos agora aplicar o teorema de Laplace na quarta linha do determinante:

$$D = 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -17$$

> **OBSERVAÇÃO** Para resolver o determinante de terceira ordem poderíamos optar entre aplicar de novo o teorema de Laplace na 1ª linha ou aplicar a regra de Sarrus.

$$2.\ D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & -2 & -3 & -5 \\ 4 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

Multiplicamos a primeira coluna por (-1) e somamos sucessivamente à segunda, terceira e quarta coluna respectivamente. Agora pelo teorema de Laplace aplicado na 1ª linha vem:

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -2 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -19$$

EXERCÍCIOS

1. Calcular os seguintes determinantes:

a) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & 10 \\ 5 & 7 & 8 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 8 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix}$

Solução

a) Multiplicamos a primeira coluna sucessivamente por (-2), (-3) e (-4) e somamos à segunda, terceira e quarta coluna respectivamente, obtendo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & 10 \\ 5 & 7 & 8 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & -7 & -17 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Agora aplicamos o teorema de Laplace na primeira linha:

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -3 & -7 & -17 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Resolvendo por Sarrus ou tornando a aplicar o teorema de Laplace, vamos obter: $D = 0$.

b) $\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \\ \text{(linha nula)}}} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \\ \text{(3ª linha} = 3\times\text{1ª linha)}}} = 0$

2. Calcular o determinante das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ m & a_2 & 0 & 0 \\ n & p & a_3 & 0 \\ q & r & s & a_4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Matrizes como essas, em que de um "lado" da diagonal principal todos os elementos são iguais a zero, chamam-se matrizes triangulares. O determinante dessas matrizes é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Solução

a) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ m & a_2 & 0 & 0 \\ n & p & a_3 & 0 \\ q & r & s & a_4 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4\times3\times5 = 60$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5\times2\times3 = 30$

Determinante do produto de matrizes

> Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então det $(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$.

Esse importante resultado é conhecido como **teorema de Binet.**

Determinante da inversa de uma matriz

O determinante da matriz inversa de uma matriz quadrada

Scanned by CamScanner

A é igual ao inverso do determinante de A.

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}} \quad (\det A \neq 0)$$

Essa propriedade na verdade é uma conseqüência do teorema de Binet. Temos que: se A é inversível e A^{-1} é sua inversa, então $A \cdot A^{-1} = I_n$. Assim teremos:

$\det (A \cdot A^{-1}) = \det I_n \Rightarrow (\det A) \cdot (\det A^{-1}) = \det I_n$

mas $\det I_n = 1$, logo se $\det A \neq 0$, obtemos:

$\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

De fato, a condição necessária e suficiente para que uma matriz seja inversível é que seu determinante seja diferente de zero.

Importante!

$$\boxed{A \text{ é inversível} \Leftrightarrow \det A \neq 0}$$

EXERCÍCIOS

1. Se A e B são matrizes quadradas de ordem 3, tais que det A = 2 e det B = 5, calcule:

a) $\det (A \cdot B)$
b) $\det (A^2)$
c) $\det (A^t \cdot B^3)$
d) $\det (A^{-1})$

Solução

a) $\det (A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B) = 2 \times 5 = 10$

b) $\det (A^2) = \det (A \cdot A) = (\det A) \cdot (\det A) = (\det A)^2 = 2^2 = 4$

c) $\det (A^t \cdot B^3) = (\det A^t) \cdot (\det B^3) = (\det A) \cdot (\det B)^3 = 2 \times 5^3 = 250$

d) $\det (A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{2}$

2. Se A é uma matriz quadrada de ordem 3 tal que det A = 3

e $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $\det (A \cdot B)$
b) $\det (A^{-1})$
c) $\det (B^{-1})$
d) $\det (2A)$

Solução

Inicialmente teremos:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 4 \text{ (regra de Sarrus)}$$

a) $\det (A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B) = 3 \times 4 = 12$

b) $\det (A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{3}$

c) $\det (B^{-1}) = \dfrac{1}{\det B} = \dfrac{1}{4}$

d) $\det (2A) = 2^3 \cdot \det A = 8 \times 3 = 24$ (reveja a 5ª propriedade dos determinantes)

3. Diz-se que uma matriz A quadrada, de ordem *n*, é uma matriz ortogonal, quando sua inversa é igual à sua transposta. Mostre que, se uma matriz A é ortogonal, então det A = ± 1.

Solução

A definição de matriz ortogonal nos diz que:

A é ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$

Aplicando determinantes a ambos os membros da igualdade $A^{-1} = A^t$, obteremos: $\det (A^{-1}) = \det (A^t)$.

Como $\det (A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$ e $\det (A^t) = \det A$

Então: $\dfrac{1}{\det A} = \det A$ ou $(\det A)^2 = 1$, obtendo-se finalmente, $\det A = \pm 1$.

4. Determine os valores de *a* para que a matriz

$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, seja inversível.

Solução

Para que a matriz A seja inversível devemos ter como condição necessária e suficiente que det A ≠ 0. Logo:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 3a \text{ (regra de Sarrus)}$$

Portanto: $a^2 - 3a \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \text{e} \\ a \neq 3 \end{cases}$

Determinantes de Vandermonde

Os determinantes do tipo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \text{ etc. são}$$

chamados determinantes de Vandermonde. Note que cada coluna é uma progressão geométrica, com o primeiro termo, igual a 1.

Os elementos da segunda linha do determinante são chamados elementos característicos e o determinante de Vandermonde será obtido efetuando-se o produto de todas as diferenças possíveis entre os elementos característicos, respeitando-se a condição: cada elemento, a partir do segundo, menos todos os seus antecessores. Acompanhe nos exemplos:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{vmatrix} =$

$= (3 - 2) \cdot (5 - 2) \cdot (5 - 3) = 1 \times 3 \times 2 = 6$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ 9 & 25 & 16 & 4 \\ 27 & 125 & 64 & 8 \end{vmatrix} =$

$= (5 - 3) \cdot (4 - 3) \cdot (4 - 5) \cdot (2 - 3) \cdot (2 - 5) \cdot (2 - 4) =$
$= 2 \times 1 \times (-1) \times (-1) \times (-3) \times (-2) = 12$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 25 & 9 \end{vmatrix} =$

$= (5 - 2) \quad (3 - 2) \cdot (3 - 5) = -6$

Nesse último exemplo, primeiro fizemos a transposição, lembrando que $\det A = \det A^t$ e na seqüência aplicamos Vandermonde.

Scanned by CamScanner

EXERCÍCIOS

1. Resolver a equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 4 & 9 & x^2 \\ 1 & 8 & 27 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

Solução

Chamando-se de V o determinante de Vandermonde no 1º membro, obtemos: $V = (2 - 1) \cdot (3 - 1) \cdot (3 - 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$.

Agora:

$$V = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ \text{ou} \\ x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ \text{ou} \\ x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \end{cases}$$

Então: $S = \{1, 2, 3\}$.

2. Calcular:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 \\ (\log 2)^2 & (\log 20)^2 & (\log 200)^2 \end{vmatrix}$$

Solução

O determinante V é um determinante de Vandermonde, portanto:

$$V = (\log 20 - \log 2)(\log 200 - \log 2)(\log 200 - \log 20)$$

$$V = \left(\log \frac{20}{2}\right)\left(\log \frac{200}{2}\right)\left(\log \frac{200}{20}\right)$$

$$V = (\log 10)(\log 100)(\log 10)$$

$$V = 1 \times 2 \times 1 = 2$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Para classificarmos e resolvermos sistemas de equações lineares, utilizaremos a teoria de matrizes e determinantes que acabamos de estudar.

Equação linear a *n* incógnitas

Uma equação com *n* incógnitas $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ é chamada de linear quando for do tipo:

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b}$$

Os números reais $a_1, a_2, \ldots a_n$ são chamados coeficientes da equação e o número *b* é o termo independente dessa equação.

Observe que, numa equação linear, todas as incógnitas têm expoente igual a 1. Assim, por exemplo, são lineares as equações:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \quad \text{e} \quad x - 2y + 3z = 4$$

Não são lineares as equações:

$$3x_1^2 + 2x_2 + 5\sqrt{x_3} = 1 \quad \text{e} \quad x - 2y^2 + 4z^3 = -1$$

Sistema linear de *m* equações a *n* incógnitas

Um sistema de *m* equações a *n* incógnitas $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ é linear quando suas *m* equações são todas lineares.

Exemplo

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ 4y - 3z = 2 \end{cases} \quad \text{é um sistema linear}$$

Solução de um sistema linear

A solução de um sistema de equações lineares é um conjunto ordenado de números $(s_1; s_2; s_3; \ldots; s_n)$, tal que, se fizermos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$, teremos todas as equações do sistema satisfeitas.

Exemplos

1. No sistema $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$

o par ordenado (4; 2) onde x = 4 e y = 2, satisfaz a ambas as equações do sistema. Veja:

$$\begin{cases} 4 - 2 \times 2 = 0 \\ 3 \times 4 + 2 \times 2 = 16 \end{cases}$$

Além disso, essa é a única solução para o sistema. O conjunto solução será $S = \{(4; 2)\}$.

2. No sistema $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2y + 4z = 8 \\ x - z = 0 \end{cases}$

temos o terno ordenado (x, y, z) = (1, 2, 1) como solução. Observe que:

$$\begin{cases} 1 + 2 - 3 \times 1 = 0 \\ 2 \times 2 + 4 \times 1 = 8 \\ 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Classificação de um sistema linear

Um sistema linear é chamado de **possível** ou **compatível**, quando admite **pelo menos uma solução**. Em caso contrário, isto é, quando **não admitir solução alguma**, será **impossível** ou **incompatível**.

Caso um sistema seja possível, podem ocorrer duas situações: o sistema pode ser **possível e determinado** ou **possível e indeterminado**. Na primeira situação, o sistema tem uma única solução e, na segunda situação, infinitas soluções.

Exemplos

1. O sistema $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$

é possível e determinado. Sua única solução, como já vimos, é o par ordenado (4; 2).

2. O sistema $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases}$

é possível e indeterminado. Observe que a segunda equação é igual à primeira multiplicada por 3. Na verdade, o sistema é equivalente à única equação: $x - 2y = 0$. Essa equação nos dá $x = 2y$; fazendo, então, a incógnita y assumir valores arbitrários, obtemos uma infinidade de pares (x; y), satisfazendo o sistema. Por exemplo, alguns desses pares seriam: (0; 0) (nesse caso fizemos y = 0); (2; 1) (fizemos y = 1) etc. É costume mudar o nome da incógnita que passamos para o segundo membro, para uma letra grega. Fazendo então $y = \alpha$, obtemos $x = 2y = 2\alpha$. As soluções do sistema são, então, todos os pares ordenados $(x; y) = (2\alpha; \alpha)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. O conjunto solução é portanto $S = \{(2\alpha; \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Scanned by CamScanner

3. O sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$

é impossível, pois a segunda equação é incompatível com a primeira. Nenhum par ordenado (x; y) irá satisfazer a ambas as equações simultaneamente. Portanto $S = \varnothing$.

Resumindo:

- sistema possível e determinado: uma única solução;
- sistema possível e indeterminado: infinitas soluções.

■ Sistemas lineares de *n* equações a *n* incógnitas

Consideremos um sistema linear de *n* equações a *n* incógnitas, como o seguinte:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Para esse sistema, definimos:

- determinante do sistema;

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- determinante relativo à incógnita x_1;

$$D_{x1} = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n2} \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \\ \\ \dots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nn} \end{matrix} \end{vmatrix}$$

Observe: D_{x1} foi obtido substituindo-se a primeira coluna do determinante D, que é a coluna dos coeficientes de x_1, pelos termos independentes $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Analogamente, definimos:

determinante relativo à incógnita x_2;

$$D_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{matrix}} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \\ \\ \dots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nn} \end{matrix} \\ a_{21} & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

e assim por diante, até o determinante relativo à incógnita n.

$$D_{xn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{matrix}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ a_{n1} & a_n & \dots & \end{vmatrix}$$

Exemplo

No sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

■ Regra de Cramer

ATENÇÃO Quando $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado, isto é, admite uma única solução.

O valor de cada incógnita, nesse caso, pode ser obtido pela chamada **regra de Cramer**:

O valor da incógnita x_i, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ é igual à fração $\frac{D_{xi}}{D}$, onde D_{xi} é o determinante relativo à incógnita x_i e D é o determinante do sistema.

Assim temos:

$$\boxed{x_1 = \frac{D_{x1}}{D}, \; x_2 = \frac{D_{x2}}{D}, \; \dots \; x_n = \frac{D_{xn}}{D}}$$

Exemplo

No sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - 2z = -7 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases}$, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

Como $D \neq 0$, o sistema terá uma única solução, que será obtida aplicando-se a regra de Cramer:

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -7 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -7 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -20,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -7 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -30$$

Pela regra de Cramer, obtemos:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-10}{-10} = 1; \; y = \frac{D_y}{D} = \frac{-20}{-10} = 2;$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-30}{-10} = 3$$

O terno ordenado (1; 2; 3) é a solução do sistema.

EXERCÍCIOS

1. (FUVEST- SP) Resolver, aplicando a regra de Cramer, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x + 3y - 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Solução

O sistema dado escreve-se como se segue:

$$\begin{cases} x + y + 0 \cdot z = 1 \\ -2x + 3y - 3z = 2 \\ x + 0 \cdot y + z = 1 \end{cases}$$

Temos, então:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

Scanned by CamScanner

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Pela regra de Cramer, obtemos:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{2} = -1;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{4}{2} = 2;$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto: $S = \{(-1; 2; 3)\}$.

2. Resolver a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solução

Vamos verificar que a equação matricial é equivalente a um sistema de equações. Efetuando-se o produto de matrizes no primeiro membro vamos obter:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x + 3y + 4z \\ 2y - z \\ x + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 & \text{I} \\ 2y - z = 0 & \text{II} \\ x + z = 1 & \text{III} \end{cases}$$

Resolver a equação matricial inicial é, então, equivalente a resolver o sistema linear obtido. Para esse sistema, temos:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -7;\quad D_x = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -9$$

Pela regra de Cramer, temos:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{9}{7}$$

Esse valor de x, substituído na equação III do sistema, nos dá $z = -\frac{2}{7}$. Substituindo em II, temos $y = -\frac{1}{7}$.

A solução da equação matricial é, então, a matriz:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/7 \\ -1/7 \\ -2/7 \end{bmatrix}$$

Discussão de um sistema linear

Vimos que um sistema linear de *n* equações a *n* incógnitas com determinante D não nulo, é possível e determinado, isto é, tem solução única que pode ser obtida pela regra de Cramer.

Quando o determinante D for nulo, o sistema poderá ser possível e indeterminado, ou impossível. Guarde os seguintes resultados:

- se o determinante D do sistema for nulo e todos os determinantes relativos a todas as incógnitas o forem também, então o sistema será possível e indeterminado, isto é, admitirá infinitas soluções;

> $D = 0$ e $D_{x1} = D_{x2} = \ldots = D_{xn} = 0$ o sistema é possível e indeterminado.

- se o determinante D for nulo e pelo menos um dos determinantes relativos às incógnitas não for nulo, então o sistema é impossível.

> $D = 0$ e ($D_{x1} \neq 0$ ou $D_{x2} \neq 0$ ou ... $D_{xn} \neq 0$) o sistema é impossível.

Exemplos

1. No sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + 4y = 0 \end{cases}$ temos $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2$

Como $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado.

2. No sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 6x + 4y = 2 \end{cases}$ temos que $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ e $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$. O sistema é, então, possível e indeterminado ($D = D_x = D_y = 0$).

3. No sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 6x + 4y = 5 \end{cases}$ temos $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$ e

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -6$. Como $D = 0$ e $D_x \neq 0$, o sistema é impossível.

Observe que não é necessário o cálculo de Dy; faríamos esse cálculo apenas se tivesse ocorrido $D = 0$ e $D_x = 0$.

EXERCÍCIOS

1. Classificar o sistema a seguir, quanto ao número de soluções:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 5x - 8y + 5z = 3 \end{cases}$$

Solução

Temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 0,\qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0,\quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & -8 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Como $D = D_x = D_y = D_z = 0$, o sistema é possível e indeterminado.

2. Classificar o sistema a seguir quanto ao número de soluções:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + z = 0 \\ 5x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Solução

Temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad D_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Como $D = 0$ e $D_x \neq 0$, concluímos que o sistema é impossível (observe que não foi necessário calcular D_y e D_z, pois ocorreu $D_x \neq 0$).

3. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o sistema

$$\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

seja possível e indeterminado.

Scanned by CamScanner

Solução

O sistema será possível e indeterminado se tivermos $D = D_x = D_y = D_z = 0$. Calculando-se esses determinantes, obtemos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = k - 3,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ k & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3k^2 - 3k - 18,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & k & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2k^2 + 2k + 12,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & k \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - k$$

Ocorre, então, $D = 0 \Leftrightarrow k - 3 = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

Para $k = 3$, verificamos que: $D_x = 3\times3^2 - 3\times3 - 18 = 0$, $D_y = -2\times3^2 + 2\times3 + 12 = 0$ e $D_z = 3 - 3 = 0$. Portanto, para $k = 3$, temos $D = D_x = D_y = D_z = 0$ e o sistema será possível e indeterminado. A resposta é portanto $k = 3$.

4. Determinar $k \in \mathbb{R}$ para que o sistema:

$\begin{cases} kx - y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$, seja impossível.

Solução

Para que o sistema seja impossível devemos ter $D = 0$ e D_x ou D_y diferente de zero.

Verificamos, inicialmente, que $D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Impondo, então, $D = 0$, obtemos:

$$\begin{vmatrix} k & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -2.$$

5. Discutir em função do número real *a*, o sistema nas incógnitas x, y:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + ay = 0 \end{cases}$$

Solução

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a - 6,\ D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

Teremos então:

- se $D \neq 0$, o que equivale a $a - 6 \neq 0$ e, portanto $a \neq 6$, o sistema será possível e determinado;
- se $D = 0$, o que equivale a $a = 6$, obtemos $D_x = 6$ e $D_y = -3$ (D_y não depende de *a*). Temos, então, nesse caso, $D = 0$ e $D_x \neq 0$ (assim como $D_y \neq 0$).

Resumindo temos:

$\begin{cases} \text{para } a \neq 6, \text{ o sistema é possível e determinado} \\ \text{para } a = 6, \text{ o sistema é impossível} \end{cases}$

6. Discutir, em função do número real *m*, o sistema:

$$\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + my - z = -2 \\ x + 2y + mz = 1 \end{cases}$$

Solução

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & m & -1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + 3m - 10$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -2 & m & -1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = -3m^2 + 3m + 6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 4m - 8$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & m & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4m - 8$$

Calculamos agora os valores de *m* que anulam o determinante D.

$D = 0 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow m = -5$ ou $m = 2$

Obtemos a primeira conclusão importante:

se $m \neq -5$ e $m \neq 2$, então $D \neq 0$ e o sistema é possível e determinado.

Resta saber o que acontece nos dois casos em que $D = 0$.

Para $m = -5$, obtemos $D_x = -84$. Como $D_x \neq 0$ e $D = 0$ o sistema será impossível.

Para $m = 2$, obtemos: $D_x = 0$, $D_y = 0$ e $D_z = 0$ e como $D = 0$, o sistema será possível e indeterminado.

Resumindo temos:

$\begin{cases} m \neq -5 \text{ e } m \neq 2 \Rightarrow \text{sistema possível e determinado} \\ m = 2 \Rightarrow \text{sistema possível e indeterminado} \\ m = -5 \Rightarrow \text{sistema impossível} \end{cases}$

Sistemas lineares homogêneos

Um sistema linear é homogêneo quando os termos independentes de todas as suas equações são nulos. Tal tipo de sistema, que é um caso particular do que estudamos até agora, tem então o seguinte aspecto:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \boxed{0} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \boxed{0} \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \boxed{0} \end{cases}$$

As propriedades importantes de um sistema linear homogêneo são as seguintes:

- todo sistema linear homogêneo é sempre possível, admite pelo menos a solução $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, chamada solução trivial ou nula;
- em todo sistema linear homogêneo ocorre $D_{x1} = D_{x2} = \ldots = D_{xn} = 0$;
- se o determinante de um sistema linear homogêneo for diferente de zero, então a única solução do sistema será a solução trivial;
- para que um sistema linear homogêneo de *n* equações a *n* incógnitas admita soluções não triviais (além da solução trivial) é necessário e suficiente que seu determinante seja nulo (pois, quando $D = 0$, o sistema é indeterminado).

EXERCÍCIOS

1. Verifique se o sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ 3x - y - 4z = 0 \end{cases}$, admite soluções não triviais.

Scanned by CamScanner

Solução

Temos: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 61 \neq 0$, portanto o sistema é determinado, apresentando apenas a solução trivial (0, 0, 0).

2. Determine λ para que o sistema:

$$\begin{cases} \lambda x - y = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$ admita soluções não nulas.

Solução

O sistema terá soluções não nulas se, e somente se:

$$D = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Resolvendo à equação do segundo grau vamos obter: $\lambda = -\frac{1}{2}$ ou $\lambda = 1$.

3. A equação matricial $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, admite solução $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Determine λ.

Solução

Inicialmente, transformamos a equação matricial no sistema linear equivalente. Acompanhe:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = \lambda x \\ x + 4y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda x + 3y = 0 \\ x + 4y - \lambda y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-\lambda)x + 3y = 0 \\ x + (4-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

A conclusão é a seguinte: a equação matricial do início admite solução $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ se, e somente se, o sistema obtido admitir solução $(x; y) \neq (0; 0)$, isto é, solução não trivial. Isso ocorre quando:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, temos:

$(2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 5$.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que visa desenvolver métodos de raciocínio que nos permitam estabelecer fórmulas para calcular o número de determinados agrupamentos, formados com os elementos de um dado conjunto.

A origem desse assunto está ligada ao estudo dos jogos de azar, tais como: lançamento de dados, jogos de carta etc. Atualmente, você também pode perceber a utilização da Análise Combinatória nas estimativas de acerto em jogos populares tais como: loteria esportiva, loto, loteria federal etc., além de aplicações mais específicas, como confecções de horários, de planos de produção, de número de placas de automóveis etc.

Fatorial

Introduziremos inicialmente o conceito de fatorial que será de grande utilidade nos exercícios de Análise Combinatória.

Definição:

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1}$$

O símbolo n! lê-se fatorial de *n* ou *n* fatorial.

Exemplos

1. $2! = 2 \times 1 = 2$
2. $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
3. $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

Definimos:

$\boxed{0! = 1}$ $\boxed{1! = 1}$

OBSERVAÇÃO

$\boxed{n! = n \cdot (n-1)!}$ $(n \geqslant 1)$

Exemplos

1. $6! = 6 \times 5!$
2. $9! = 9 \times 8!$

EXERCÍCIOS

1. Simplificar as expressões:

a) $\frac{7!}{6!}$ b) $\frac{8!}{8 \cdot 6!}$ c) $\frac{20! \times 8! \times 3!}{4! \times 19! \times 7!}$

Solução

a) $\frac{7!}{6!} = \frac{7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 7$

b) $\frac{8!}{8 \times 6!} = \frac{\cancel{8} \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{8} \times \cancel{6!}} = 7$

c) $\frac{20! \times 8! \times 3!}{4! \times 19! \times 7!} = \frac{20 \times \cancel{19!} \times 8 \times \cancel{7!} \times \cancel{3!}}{4 \times \cancel{3!} \times \cancel{19!} \times \cancel{7!}} = \frac{20 \times 8}{4} = 40$

2. Simplificar as expressões:

a) $\frac{(n+2)!}{n!}$ b) $\frac{(2n)!}{(2n-2)!}$

Solução

a) $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = (n+2) \cdot (n+1)$

b) $\frac{(2n)!}{(2n-2)!} = \frac{(2n) \cdot (2n-1) \cdot \cancel{(2n-2)!}}{\cancel{(2n-2)!}} = 2n \cdot (2n-1)$

3. Resolver as equações ($n \in \mathbb{R}$):

a) $(2n-1)! = 24$

b) $(n+1)! = 20 \cdot (n-1)!$

c) $\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = 7n$

Solução

a) Lembrando que $4! = 24$, podemos escrever:

$(2n-1)! = 4! \Leftrightarrow 2n - 1 = 4 \Leftrightarrow 2n = 5 \Leftrightarrow n = \frac{5}{2}$

Portanto: $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

b) $(n+1)! = 20 \cdot (n-1)!$

$(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!} = 20 \cdot \cancel{(n-1)!} \Leftrightarrow n^2 + n = 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 20 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau obtemos $n = 4$ ou $n = -5$; ($n = -5$ não convém). Portanto $S = \{4\}$.

Scanned by CamScanner

OBSERVAÇÃO No exercício anterior pudemos cortar o fator $(n - 1)!$ na resolução da equação, pois esse fator necessariamente é diferente de zero.

c) $\dfrac{(n + 1)! - n!}{(n - 1)!} = 7n$

$$\frac{(n + 1) \cdot n \cdot (n - 1)! - n \cdot (n - 1)!}{(n - 1)!} = 7n$$

Colocando-se $(n - 1)!$ fatorial em evidência no numerador da fração vamos encontrar:

$$\frac{(n - 1)! \cdot [(n + 1) \cdot n - n]}{(n - 1)!} = 7n \Leftrightarrow n^2 + n - n =$$

$$= 7n \Leftrightarrow n^2 - 7n = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau teremos: $n = 7$ ou $n = 0$; ($n = 0$ não convém). Portanto $S = \{7\}$.

4. Determinar $x \in \mathbb{R}$, tal que: $50 < (2x + 1)! < 500$

Solução

Como $(2x + 1)!$ deve estar compreendido entre 50 e 500, devemos ter: $(2x + 1)! = 5!$ (pois $5! = 120$). Logo $2x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 2$. Portanto $S = \{2\}$.

Princípio Multiplicativo

Nesse princípio irá basear-se toda a seqüência da Análise Combinatória. Vamos apresentar alguns exemplos iniciais antes de formular o enunciado do Princípio Multiplicativo.

Exemplos:

1. Um rapaz possui cinco camisas e duas calças. De quantos modos diferentes ele poderá se vestir?

A escolha de uma calça poderá ser feita de duas maneiras diferentes. Escolhida a primeira calça, o rapaz poderá escolher qualquer uma das cinco camisas, formando portanto cinco conjuntos diferentes. Se tivesse escolhido a segunda calça, novamente poderia combinar essa calça com as cinco camisas que possui, formando outros cinco conjuntos diferentes. Portanto o número total de maneiras diferentes de se vestir nesse caso será: $2 \times 5 = 10$.

Poderíamos esquematizar o problema desse modo:

- escolha de uma calça: 2 possibilidades diferentes
- escolha de uma camisa: 5 possibilidades diferentes

Total: $2 \times 5 = 10$

2. Quantos números de dois algarismos podemos formar com os algarismos de 1 a 9?

- escolha de um algarismo para a casa das dezenas: 9 possibilidades
- escolha de um algarismo para a casa das unidades: 9 possibilidades

Total: $9 \times 9 = 81$

Podemos portanto formar 81 números de dois algarismos com os algarismos de 1 a 9.

3. Num grupo de 5 rapazes e 4 moças, de quantos modos distintos podem ser escolhidos um rapaz para presidente e uma moça para secretária de grêmio estudantil?

- escolha de um rapaz para presidente: 5 possibilidades
- escolha de uma moça para secretária: 4 possibilidades

Total: $5 \times 4 = 20$

Enunciado do Princípio Multiplicativo Se tivermos dois acontecimentos, A e B, sendo que a ocorrência de um deles independe da ocorrência do outro, A acontecendo de m maneiras diferentes e B de n maneiras diferentes, o total de possibilidades da ocorrência de A seguida da ocorrência de B, será $m \times n$.

EXERCÍCIOS

1. Quantos números de dois algarismos podem ser formados no sistema de numeração decimal?

Solução

- escolha de um algarismo para a casa das dezenas: 9 possibilidades (o zero não pode ocupar essa posição);
- escolha de um algarismo para a casa das unidades: 10 possibilidades.

Total: $9 \times 10 = 90$

2. Quantos números pares de dois algarismos podem ser formados com os algarismos de 1 a 9?

a) podendo ocorrer a repetição de algarismos.

b) sem ocorrer a repetição de algarismos.

Solução

a) • escolha de um algarismo para a casa das unidades: 4 possibilidades (o número deve terminar em 2, 4, 6 ou 8, para ser par);

- escolha de um algarismo para a casa das dezenas: 9 possibilidades.

Total: $9 \times 4 = 36$

b) • escolha de um algarismo para a casa das unidades: 4 possibilidades (2, 4, 6, 8)

- escolha de um algarismo para a casa das dezenas: 8 possibilidades, já que do total de 9 algarismos que podem ser escolhidos não podemos utilizar aquele que estiver ocupando a casa das unidades, para que não haja repetição.

Total: $8 \times 4 = 32$

3. Quantos são os divisores do número 72?

Solução

Cada divisor de 72 é da forma $2^x \cdot 3^y$ (pois $72 = 2^3 \cdot 3^2$, onde $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$.

- escolha de um valor para x: 4 possibilidades (0, 1, 2, 3)
- escolha de um valor par y: 3 possibilidades (0, 1, 2)

Total: $4 \times 3 = 12$ divisores

OBSERVAÇÃO O Princípio Multiplicativo pode ser generalizado para mais de dois eventos. Acompanhe os exercícios resolvidos a seguir.

4. No sistema decimal, quantos são os números de três algarismos distintos que podemos formar?

Solução

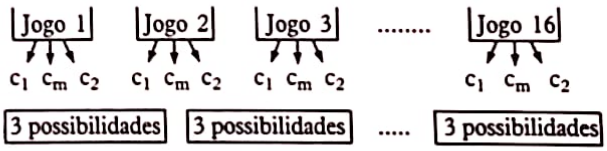
- escolha de um algarismo para a casa das centenas: 9 possibilidades (pois o zero não pode ocupar essa posição);
- escolha de um algarismo para a casa das dezenas: 9 possibilidades, pois embora o zero possa ocupar essa posição, não podemos repetir o algarismo que se encontra na casa das centenas.
- escolha de um algarismo para a casa das unidades: 8 possibilidades já que não podemos repetir o algarismo das centenas e nem o das dezenas.

Total: $9 \times 9 \times 8 = 648$

5. Quantos são os resultados possíveis para um teste da loteria esportiva com 16 jogos?

Solução

Para cada um dos 16 jogos, temos três resultados possíveis (coluna 1, coluna do meio e coluna 2). Pelo Princípio Multiplicativo teremos que o total de resultados possíveis será:



Scanned by CamScanner

$T = 3 \times 3 \times 3 \times ... \times 3 = 3^{16} = 43046721$ resultados distintos.

Faça esse problema para um teste da loteria esportiva com 13 jogos. Compare os resultados e analise o que representou o aumento de três jogos em cada teste para o total de resultados possíveis.

Arranjos simples

Seja o conjunto A = {1, 2, 3}. Quantos números com 2 algarismos distintos podemos formar com os elementos de A?

Teremos como resposta do problema os seguintes números: 12, 13, 21, 23, 31 e 32. Cada número obtido será chamado de agrupamento. Note, então, que obtivemos 6 agrupamentos distintos.

A ordem dos elementos que formam cada agrupamento é considerada, isto é, os agrupamentos 12 e 21, por exemplo, são diferentes embora formados pelos mesmos elementos (os algarismos 1 e 2). Tais agrupamentos, formados por elementos distintos e cuja ordem é levada em conta, chamam-se **Arranjos Simples**.

ATENÇÃO Arranjos Simples	não há repetição de elementos; a ordem dos elementos é considerada.

Cálculo do número de Arranjos Simples sendo *n* o número de elementos de um conjunto A, o número de arranjos simples de *n* elementos tomados *p* a *p* será dado por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$A_{n,p}$: lê-se aranjo de *n* elementos tomados *p* a *p*

Exemplo

Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os elementos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5}?

Nesse caso $n = 5$, que indica o total de elementos que temos para usar, e $p = 3$ que é a forma segundo a qual os elementos vão ser associados, já que o problema pede números de três algarismos. Aplicando a fórmula vamos obter:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$$

Portanto, poderemos formar 60 números com três algarismos distintos.

EXERCÍCIOS

1. Calcular: $\dfrac{A_{6,2} - A_{4,1}}{A_{5,2}}$

Solução

Calculando cada um dos arranjos que aparecem na expressão vamos ter:

$$A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 6 \times 5 = 30$$

$$A_{4,1} = \frac{4!}{(4-1)!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4$$

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

Voltando à fração incial: $\dfrac{30-4}{20} = \dfrac{26}{20} = \dfrac{13}{10}$

2. Resolver a equação: $A_{x,3} = 10 \cdot A_{x,2}$

Solução

Aplicando a fórmula do número de arranjos, vamos obter:

$$\frac{x!}{(x-3)!} = 10 \cdot \frac{x!}{(x-2)!}$$

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \cancel{(x-3)!}}{\cancel{(x-3)!}} =$$

$$= \frac{10 \cdot x \cdot (x-1) \cdot \cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}}$$

$$\cancel{x} \cdot \cancel{(x-1)} \cdot (x-2) = 10 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{(x-1)} \Leftrightarrow x - 2 =$$

$$= 10 \Leftrightarrow \boxed{x = 12}$$

3. (CESCEM-SP) Com os algarismos 0, 1, 2, 5 e 6, sem os repetir, quantos números compreendidos entre 100 e 1 000 poderemos formar?

Solução

Como os números devem estar compreendidos entre 100 e 1 000, terão 3 algarismos. Como não pode haver repetição de elementos e a ordem dos elementos em cada agrupamento é considerada (por exemplo o número 123 é diferente do número 132) trata-se de um problema de arranjos simples.

números iniciados por 1: 1 ___ ___ $\Rightarrow A_{4,2} = 12$

números iniciados por 2: 2 ___ ___ $\Rightarrow A_{4,2} = 12$

números iniciados por 5: 5 ___ ___ $\Rightarrow A_{4,2} = 12$

números inciados por 6: 6 ___ ___ $\Rightarrow A_{4,2} = 12$

Portanto o total de números pedido é $4 \times 12 = 48$.

4. Em um campeonato de futebol participam dez clubes, todos com a mesma possibilidade de vencer. De quantas maneiras diferentes poderemos ter a classificação para os três primeiros lugares?

Solução

Note que a ordem dos elementos em cada agrupamento é importante, pois o clube A em primeiro, B em segundo e C em terceiro é diferente de B em primeiro, A em segundo e C em terceiro. Não há repetição de elementos, pois o mesmo clube não pode ocupar duas posições diferentes simultaneamente. Portanto, trata-se de um problema de arranjos simples. Temos um total de dez clubes para ocuparem três posições, logo: $A_{10,3} = 720$.

5. Quantos números pares de 4 algarismos distintos podemos formar com os elementos do conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 7\}$?

Solução

Os elementos do conjunto A são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Temos portanto 7 algarismos para serem utilizados. Como os números devem ser pares terão que terminar em 0, 2, 4 ou 6.

terminados em 0: ___ ___ ___ 0 $\Rightarrow A_{6,3}$

terminados em 2: ___ ___ ___ 2 $\Rightarrow A_{6,3}$

terminados em 4: ___ ___ ___ 4 $\Rightarrow A_{6,3}$

terminados em 6: ___ ___ ___ 6 $\Rightarrow A_{6,3}$

Total: $4 \times A_{6,3}$

No caso em que os números terminarem em 2, 4 e 6, eles não poderão começar por zero.

Scanned by CamScanner

$$\left.\begin{array}{l} \underline{0}\ __\ __\ \underline{2} \Rightarrow A_{5,2} \\ \underline{0}\ __\ __\ \underline{4} \Rightarrow A_{5,2} \\ \underline{0}\ __\ __\ \underline{6} \Rightarrow A_{5,2} \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \times A_{5,2}$$

Portanto o total de números pedido será:
$4 \times A_{6,2} - 3 \times A_{5,2} = 4 \times 120 - 3 \times 20 = 480 - 60 = 420.$

OBSERVAÇÃO Todos os problemas de Arranjos Simples também poderão ser resolvidos pelo Princípio Multiplicativo. Você poderá optar por aquele processo que achar mais conveniente.

Permutações simples

Caso particular de $A_{n,p}$ quando n = p. As permutações de *n* elementos serão indicadas por P_n. Podemos determinar P_n do seguinte modo:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \text{ portanto:}$$

$$\boxed{P_n = n!}$$

Exemplos
1. $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
2. $P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$

EXERCÍCIOS

1. Quantos números com 5 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5?
Solução
Verificando que n = p = 5, vamos obter:
$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$
Portanto, poderemos formar 120 números.

2. Quantos são os anagramas da palavra "cola"?
Solução
Anagramas são palavras obtidas efetuando-se todas trocas possíveis entre as letras de uma palavra dada e que podem ter ou não significado na linguagem corrente.
A palavra em questão, "cola", possui 4 letras distintas, logo o total de anagramas será igual ao total de permutações que podem ser feitas com essas 4 letras, isto é:
Total de anagramas: $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$

3. (FUVEST-SP) O número de anagramas da palavra FUVEST que começam e terminam por vogal é:
a) 24 d) 120
b) 48 e) 144
c) 96
Solução
A palavra FUVEST tem 6 letras. Vamos analisar dois casos:
• começando por U e terminando por E:
U ____ ____ ____ ____ E $\Rightarrow P_4 = 4! = 24$
• começando por E e terminando por U:
E ____ ____ ____ ____ U $\Rightarrow P_4 = 4! = 24$
Portanto, o total de anagramas pedido é: $2 \times 24 = 48$. Alternativa **b**.

4. (FAAP-SP) Permutando os algarismos 2, 4, 6 e 8, formamos números. Dispondo esses números em ordem crescente, qual o número que ocupa a 22ª posição?
Solução
2 ____ ____ ____ $\Rightarrow P_3 = 3! = 6$
4 ____ ____ ____ $\Rightarrow P_3 = 3! = 6$
6 ____ ____ ____ $\Rightarrow P_3 = 3! = 6$
8 2 ____ ____ $\Rightarrow P_2 = 2! = 2$
8 4 2 6 é o 21º número, portanto o 22º será: 8462.

5. Quantos são os anagramas da palavra "arara"?
Solução
A palavra "arara" tem 5 letras. Mas devemos considerar que existem letras repetidas. Ao trocarmos, por exemplo, a posição de duas letras *A*, não obteremos um novo anagrama. Precisamos portanto "descontar" todas as trocas de posição entre letras iguais. Nesse caso o total de anagramas será dado por:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = 10 \quad \left\{\begin{array}{l} 5, \text{ total de letras da palavra} \\ 3, \text{ total de letras a} \\ 2, \text{ total de letras r} \end{array}\right.$$

Combinações simples

São agrupamentos onde a ordem com que os elementos comparecem não é considerada.
Exemplo
Quantas duplas distintas podemos formar com 3 pessoas A, B e C?
Repare que agora, se mudarmos a posição dos elementos em um agrupamento não obteremos um novo agrupamento. Isto é, a dupla AB é igual à dupla BA, a dupla AC é a mesma que CA e a dupla BC é a mesma que CB. Portanto o total de duplas distintas será 3 (AB, AC e BC).
O número de combinações de *n* elementos tomados *p* a *p*, que indicamos por $C_{n,p}$ será dado por:

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}}$$

EXERCÍCIOS

1. Quantas comissões formadas de 4 elementos cada uma podemos formar com 10 alunos de uma classe?
Solução

$$C_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!4!} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

2. Quantos são os resultados distintos possíveis de serem obtidos num teste da loto?
Solução
Cada resultado possível corresponde a um conjunto de 5 números, sem importância de ordem, obtidos de um total de cem números. Teremos então:

$$C_{100,5} = \frac{100!}{(100-5)!5!} = \frac{100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96 \times 95!}{95! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} =$$
$$= 75\,287\,520$$

3. (FATEC-SP) Resolver a equação:
$A_{n,3} = 3 \cdot C_{n,4}$
Solução
$A_{n,3} = 3 \cdot C_{n,4}$

$$\frac{\cancel{n!}}{(n-3)!} = 3 \cdot \frac{\cancel{n!}}{(n-4)!\,4!}$$

$3 \cdot (n-3)! = (n-4)! \cdot 4! \Leftrightarrow 3 \cdot (n-3) \cdot (n-4)! =$
$= (n-4)! \cdot 24 \Leftrightarrow 3n - 9 = 24 \Leftrightarrow 3n = 33 \Leftrightarrow n = 11.$
Portanto S = {11}.

4. Numa escola existem 10 professores de Matemática e 7 de Física. Quantas comissões podemos formar compostas de 5 professores de Matemática e 3 de Física?

Scanned by CamScanner

Solução

- escolha dos professores de Matemática: $C_{10,5} = 252$
- escolha dos professores de Física: $C_{7,3} = 35$

Pelo Princípio Multiplicativo vamos ter: $C_{10,5} \times C_{7,3} = 252 \times 35 = 8820$.

Poderemos portanto formar 8820 comissões.

5. Quantas diagonais tem um hexágono?

Solução

Hexágono: 6 lados, 6 vértices

Para obtermos as diagonais, devemos tomar os vértices dois a dois ($C_{6,2}$) e "descontar" os lados do polígono, pois não são diagonais.

Chamando de D o número de diagonais, vamos ter:

$D = C_{6,2} - 6 \Leftrightarrow D = 15 - 6 \Leftrightarrow D = 9$

O hexágono tem portanto 9 diagonais.

OBSERVAÇÃO Para um polígono de *n* lados ($n > 3$), teremos:

$$\boxed{D = C_{n,2} - n}$$

6. (PUC-SP) Calcule $A_{m,3}$ sabendo que $C_{m,3} = 84$.

Solução

$$\frac{m!}{(m-3)!3!} = C_{m,3} \Leftrightarrow \frac{m!}{(m-3)!} = 3! \times C_{m,3} \Leftrightarrow A_{m,3} = 6 \times 84 \Leftrightarrow A_{m,3} = 504.$$

7. Dadas duas retas paralelas, tomam-se 8 pontos sobre uma delas e 5 sobre outra. Quantos triângulos existem com vértices nos pontos considerados?

Solução

Temos um total de 13 pontos. Para formarmos triângulos devemos tomar esses pontos 3 a 3 ($C_{13,3}$). Porém, os 8 pontos que estão sobre uma mesma reta não definirão triângulos entre si ($C_{8,3}$) o mesmo ocorrendo com os 5 pontos pertencentes a outra reta ($C_{5,3}$). Logo, o total de triângulos possíveis de serem obtidos será:

$C_{13,3} - C_{8,3} - C_{5,3} = 286 - 56 - 10 = 220.$

Poderemos formar, portanto, 220 triângulos.

8. (FUVEST-SP) Um químico possui 10 tipos de substâncias. De quantos modos possíveis poderá associar 6 dessas substâncias se, entre as dez, duas somente não podem ser juntadas porque produzem mistura explosiva?

Solução

- total de associações: $C_{10,6} = 210$
- total de associações onde aparecem juntas A e B: $C_{8,4} = 70$

Logo, o total de associações possíveis será:

$C_{10,6} - C_{8,4} = 210 - 70 = 140.$

9. (CESGRANRIO-RJ) Seja M um conjunto de 20 elementos. O número de subconjuntos de M que contém exatamente 18 elementos é:

a) 360 b) 190 c) 180 d) 120 e) 18

Solução

Temos um total de 20 elementos para escolhermos 18, independendo da ordem. Logo, teremos

$$C_{20,18} = \frac{20!}{(20-18)!\,18!} = 190.$$

Portanto, o total de subconjuntos com 18 elementos que podemos formar com um conjunto de 20 elementos, será 190. Alternativa **b**.

10. (USP) Uma organização dispõe de 10 economistas e 6 administradores. Quantas comissões de 6 pessoas podem ser formadas de modo que cada comissão tenha no mínimo 3 administradores?

a) 2400 b) 675 c) 3136 d) 60 e) 3631

Solução

Teremos que considerar as seguintes comissões:

- com 3 administradores e 3 economistas: $C_{6,3} \times C_{10,3} = 2400$
- com 4 administradores e 2 economistas: $C_{6,4} \times C_{10,2} = 675$
- com 5 administradores e 1 economista: $C_{6,5} \times C_{10,1} = 60$
- com 6 administradores e nenhum economista: teremos só uma possibilidade.

O total de comissões que poderemos formar será então: $2400 + 675 + 60 + 1 = 3136$.

Alternativa **c**.

BINÔMIO DE NEWTON

Chamamos de Binômio de Newton a expressões do tipo

$$\boxed{(x + a)^n, \text{ com } x \in \mathbb{C},\ a \in \mathbb{C} \text{ e } n \in \mathbb{N}}$$

Veremos a seguir um método de desenvolvimento de expressões deste tipo. Neste método utilizaremos o conceito de números binomiais, que passaremos a estudar agora.

Números binomiais

Sendo *n* e *p* números naturais, com $n \geqslant p$, define-se:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

O símbolo $\binom{n}{p}$ lê-se "binomial *n* sobre *p*".

Exemplo

1. $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!} \times 2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10$

2. $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5!}}{\cancel{5!} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 8 \times 7 = 56$

Casos particulares

- $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1$
- $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$, com $n \geqslant 1$.
- $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \times 0!} = \frac{n!}{n! \times 1} = \frac{n!}{n!} = 1$

Exemplos

1. $\binom{7}{0} = 1$; $\binom{12}{0} = 1$; $\binom{3}{0} = 1$

2. $\binom{8}{1} = 8$; $\binom{6}{1} = 6$; $\binom{15}{1} = 15$

Scanned by CamScanner

3. $\binom{5}{5} = 1$; $\binom{9}{9} = 1$; $\binom{13}{13} = 1$

Binomiais complementares

Sendo n e p números naturais, com $n \geqslant p$, chamamos de **números binomiais complementares** aos binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{k}$, onde $p + k = n$ (ou seja, a soma dos dois números de baixo é igual ao número de cima).

Exemplos

1. $\binom{8}{3}$ e $\binom{8}{5}$ **2.** $\binom{12}{5}$ e $\binom{12}{7}$

3. $\binom{6}{1}$ e $\binom{6}{5}$ **4.** $\binom{10}{0}$ e $\binom{10}{10}$

O principal fato relativo aos números binomiais complementares é que eles são iguais:

$$\boxed{\begin{matrix} n, p, k \in \mathbb{N} \\ p + k = n \end{matrix} \Rightarrow \binom{n}{p} = \binom{n}{k}}$$

A explicação é simples e se baseia na definição de números binomiais. Demonstrando:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Como $p + k = n \Rightarrow k = n - p$. Substituindo este resultado no segundo número binomial, temos:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-p)!\,[n-(n-p)]!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

e, portanto, os binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{k}$, com $p + k = n$, são iguais.

Exemplos

1. $\binom{8}{2} = \binom{8}{6}$; **2.** $\binom{7}{1} = \binom{7}{6}$; **3.** $\binom{9}{0} = \binom{9}{9}$

Igualdade de binomiais

Dois números binomiais do tipo $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{k}$ são iguais se, e somente se, têm o mesmo "denominador" ou são complementares.

Veja os seguintes exemplos:

1. $\binom{8}{p} = \binom{8}{2} \Rightarrow \boxed{p = 2}$ ou $p + 2 = 8 \Rightarrow \boxed{p = 6}$

2. $\binom{9}{p} = \binom{9}{4} \Rightarrow \boxed{p = 4}$ ou $p + 4 = 9 \Rightarrow \boxed{p = 5}$

3. $\binom{6}{p} = \binom{6}{2p} \Rightarrow \begin{cases} p = 2p \Rightarrow -p = 0 \Rightarrow \boxed{p = 0} \text{ ou} \\ p + 2p = 6 \Rightarrow 3p = 6 \Rightarrow \boxed{p = 2} \end{cases}$

EXERCÍCIOS

1. Calcular os seguintes números binomiais:

a) $\binom{12}{8}$ b) $\binom{9}{4}$ c) $\binom{8}{2}$

Solução

Resolvemos estes exercícios aplicando a definição de número binomial: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

a) $\binom{12}{8} = \frac{12!}{8!(12-8)!} = \frac{12!}{8!\times 4!} = \frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8!}{8!\times 4\times 3\times 2\times 1} =$

$= \frac{11\times 10\times 9}{2\times 1} = 495$

b) $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!\times 5!} = \frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5!}{4\times 3\times 2\times 1\times 5!} =$

$= \frac{9\times 7\times 6}{3} = 126$

c) $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!\times 6!} = \frac{8\times 7\times 6!}{2\times 1\times 6!} = \frac{8\times 7}{2\times 1} = 28$

2. Determine n, $n \in \mathbb{N}$, de modo que os seguintes números binomiais sejam iguais:

a) $\binom{7}{n} = \binom{7}{2}$ b) $\binom{15}{n} = \binom{15}{4n}$ c) $\binom{8}{n} = \binom{8}{n-2}$

Solução

Dois números binomiais de mesmo "numerador" são iguais se tiverem o mesmo "denominador" ou se forem dois binomiais complementares. Acompanhe:

a) $\binom{7}{n} = \binom{7}{2} \Rightarrow \boxed{n = 2}$ ou $n + 2 = 7 \Rightarrow \boxed{n = 5}$

b) $\binom{15}{n} = \binom{15}{4n} \Rightarrow \begin{cases} n = 4n \Rightarrow -3n = 0 \Rightarrow \boxed{n = 0} \text{ ou} \\ n + 4n = 15 \Rightarrow 5n = 15 \Rightarrow \boxed{n = 3} \end{cases}$

c) $\binom{8}{n} = \binom{8}{n-2} \Rightarrow \begin{cases} n = n - 2 \Rightarrow 0 = -2; \text{ impossível ou} \\ n + n - 2 = 8 \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow \boxed{n = 5} \end{cases}$

3. Resolva as seguintes equações:

a) $2 \cdot \binom{n}{n-4} = 5 \cdot \binom{n}{n-2}$ b) $\binom{15}{3-n} = \binom{15}{2n}$

Solução

a) Aplicamos a definição de número binomial a ambos os membros da igualdade:

$$2 \cdot \binom{n}{n-4} = 5 \cdot \binom{n}{n-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\times\frac{n!}{(n-4)!\,[n-(n-4)]!} = 5\times\frac{n!}{(n-2)!\,[n-(n-2)]!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\times\frac{1}{(n-4)!\times 4!} = 5\times\frac{1}{(n-2)!\times 2!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(n-4)!\times 4\times 3\times 2\times 1} = \frac{5}{(n-2)\times(n-3)\times(n-4)!\times 2\times 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{5}{(n-2)\times(n-3)\times 2}$$

Multiplicando esta última igualdade "em cruz", temos: $2 \cdot (n-2) \cdot (n-3) = 60 \Rightarrow (n-2) \cdot (n-3) = 30 \Rightarrow$ $\Rightarrow n^2 - 5n - 24 = 0$; resolvendo esta equação de 2º grau, obtemos duas soluções: $n = 8$ ou $n = -3$. Como n é o "numerador" do número binomial e este não pode ser negativo, excluímos a solução -3, restando apenas a solução $n = 8$. Logo, $\boxed{S = \{8\}}$.

b) A equação $\binom{15}{3-n} = \binom{15}{2n}$ dada é uma igualdade de dois números binomiais; sabemos que dois números binomiais de mesmo "numerador" são iguais se tiverem o mesmo "denominador" ou se forem binomiais complementares.

Temos então:

Scanned by CamScanner

$$\binom{15}{3-n} = \binom{15}{2n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 - n = 2n \Rightarrow 3 = 3n \Rightarrow \boxed{n = 1} \text{ ou} \\ 3 - n + 2n = 15 \Rightarrow 3 + n = 15 \Rightarrow \boxed{n = 12}. \end{cases}$$

A solução n = 12 não serve pois o "denominador" do 1º número binomial ficaria negativo (isto não pode acontecer) e o "denominador" do 2º número binomial ficaria maior que o "numerador" (isto também não pode acontecer); portanto, a solução da equação é: S = {1}.

Triângulo de Pascal

Os números binomiais $\binom{n}{p}$ podem ser escritos numa tabela triangular de tal modo que os binomiais de mesmo "numerador" *n* fiquem todos numa mesma linha e os de mesmo "denominador" *p* fiquem todos numa mesma coluna, formando assim o triângulo de Pascal (também conhecido como triângulo de Tartaglia):

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2} \cdots\cdots \binom{n}{n-2}\ \binom{n}{n-1}\ \binom{n}{n}$$

Calculando cada número binomial da tabela anterior e substituindo-o no local correspondente no triângulo de Pascal, obtemos:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
.....

Repare que:

1. O primeiro e o último elemento de cada linha vale 1. Isto se explica pois são binomiais do tipo $\binom{n}{0}$ e $\binom{n}{n}$, que valem 1 para todo número *n* natural.
2. A soma de dois números "vizinhos" de uma mesma linha é igual ao número situado imediatamente abaixo do segundo número somado. Veja os seguintes exemplos:

1 ③ + ③ 1 ..... linha de numerador 3
1 4 ⑥ 4 1 ..... linha de numerador 4
① + ⑤ 10 ⑩ + ⑤ 1 .. linha de numerador 5
1 ⑥ 15 20 ⑮ 6 1 ..... numerador 6

Podemos formalizar esta propriedade conhecida como **relação de Stifel**, da seguinte maneira:

- dois números binomiais "vizinhos" estão na mesma linha e, portanto, têm o mesmo "numerador" *n*;
- dois números binomiais "vizinhos" estão em colunas consecutivas e, portanto, seus "denominadores" são dois números naturais consecutivos p e p + 1;
- o resultado da adição destes binomiais é um binomial situado na linha imediatamente seguinte (portanto com "numerador" n + 1) e debaixo do 2º número somado (portanto com "denominador" igual ao do 2º número, isto é, p + 1);
- visualmente, no triângulo de Pascal, temos:

$$\left(\quad\right)\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}\left(\quad\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\quad\right)\left(\quad\right)\ \binom{n+1}{p+1}\left(\quad\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}} \text{ (relação de Stifel)}$$

3. A soma de todos os elementos da linha de "numerador" *n* é igual a 2^n. Veja:

1ª linha ⇒ "numerador" zero ... 1 ... = 2^0
2ª linha ⇒ "numerador" 1 ... 1 + 1 ... = 2 = 2^1
3ª linha ⇒ "numerador" 2 ... 1 + 2 + 1 ... = 4 = 2^2
4ª linha ⇒ "numerador" 3 ... 1 + 3 + 3 + 1 ... 8 = 2^3
5ª linha ⇒ "numerador" 4 ... 1 + 4 + 6 + 4 + 1 ... = 16 = 2^4

Generalizando, a linha de "numerador" *n* é:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots$$

$$\ldots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Exemplos

1. Aplicando a relação de Stifel: $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$, temos:

a) $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \binom{7}{3}$ b) $\binom{8}{5} + \binom{8}{6} = \binom{9}{6}$

c) $\binom{10}{7} + \binom{10}{8} = \binom{11}{8}$ d) $\binom{15}{10} + \binom{15}{11} = \binom{16}{11}$

2. a soma dos binomiais $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$ é igual a $2^4 = 16$ pois é a soma dos números binomiais de "numerador" 4 do triângulo de Pascal.

3. A soma dos binomiais $\binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7}$ é igual a $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$, pois é a soma dos números binomiais de "numerador" 7 do triângulo de Pascal, com exceção do primeiro binomial da linha, que vale 1.

Scanned by CamScanner

EXERCÍCIOS

1. Calcule:

a) $\binom{30}{12} + \binom{30}{13}$

b) $\binom{20}{15} + \binom{20}{16} + \binom{21}{17}$

c) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{8}{5} + \binom{9}{6}$

d) $\binom{16}{10} - \binom{15}{10}$

Solução

a) Para somar $\binom{30}{12}$ com $\binom{30}{13}$, aplicamos a relação de Stifel:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \Rightarrow \binom{30}{12} + \binom{30}{13} = \binom{31}{13}$$

b) Aplicamos a relação de Stifel duas vezes consecutivas:

$$\underbrace{\binom{20}{15} + \binom{20}{16}}_{\text{Stifel}} + \binom{21}{17} = \underbrace{\binom{21}{16} + \binom{21}{17}}_{\text{Stifel}} = \binom{22}{17}$$

c) Aplicamos a relação de Stifel três vezes seguidas:

$$\underbrace{\binom{7}{3} + \binom{7}{4}}_{\text{Stifel}} + \binom{8}{5} + \binom{9}{6} = \underbrace{\binom{8}{4} + \binom{8}{5}}_{\text{Stifel}} + \binom{9}{6} = \underbrace{\binom{9}{5} + \binom{9}{6}}_{\text{Stifel}} = \binom{10}{6}$$

d) Localizamos esses binomiais no triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccc} \binom{15}{9} + \binom{15}{10} & & \binom{15}{11} \\ & \downarrow & \\ \binom{16}{9} & \binom{16}{10} & \binom{16}{11} \end{array}$$

Pela relação de Stifel, percebemos que: $\binom{15}{9} + \binom{15}{10} = \binom{16}{10}$ e, portanto, $\binom{16}{10} - \binom{15}{10} = \binom{15}{9}$

2. Calcule:

a) $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \ldots + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}$;

b) $\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \ldots + \binom{9}{7} + \binom{9}{8}$.

Solução

a) A soma apresentada é a soma dos números binomiais da linha de "numerador" 8 do triângulo de Pascal. Esta soma é igual a $2^8 = 256$ (propriedade do triângulo de Pascal).

b) A soma apresentada é formada por binomiais de "numerador" 9, porém não é a soma da linha de "numerador" 9 do triângulo, pois faltam o primeiro e o último binomial. Como a soma da linha toda vale 2^9, e os dois elementos faltantes valem 1 cada um, então a soma apresentada vale:

$$2^9 - 1 - 1 = 512 - 2 = 510$$

3. Determine n, $n \in \mathbb{N}$, de modo que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 4096.$$

Solução

A soma apresentada é a soma dos números binomiais da linha de "numerador" n do triângulo de Pascal. Sabemos que esta soma vale 2^n. Temos, portanto: $2^n = 4096$.

Fatorando o número 4096 (decompondo em fatores primos) descobrimos que $4096 = 2^{12}$. Substituindo este resultado na equação $2^n = 4096$, temos: $2^n = 2^{12}$. Portanto, concluímos que $n = 12$.

Desenvolvimento do Binômio de Newton

Binômios de Newton são expressões do tipo: $(2x + 5y)^4$, $(x - 3)^7$, $(3x + 2)^2$, $(2 - i)^{10}$ etc. Resumindo:

$(x + a)^n$, onde n é um número natural

e onde x representa a primeira parcela da soma e a representa a segunda parcela da soma.

Quando trabalhamos com produtos notáveis (livro I), aprendemos a desenvolver expressões do tipo $(x + a)^2$ ou $(x + a)^3$. Agora vamos aprender um método geral, um método que serve para desenvolver binômios do tipo $(x + a)^n$, onde o expoente n é um número natural qualquer.

Vamos desenvolver alguns binômios do tipo $(x + a)^n$ para valores particulares de n e, a seguir, intuir uma regra geral a partir dos casos particulares:

se $n = 0 \Rightarrow (x + a)^0 = 1$

se $n = 1 \Rightarrow (x + a)^1 = x + a \Rightarrow 1 \cdot x + 1 \cdot a$

se $n = 2 \Rightarrow (x + a)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot a + a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot a + 1 \cdot a^2$

se $n = 3 \Rightarrow (x + a)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot a + 3 \cdot x \cdot a^2 + a^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot a + 3 \cdot x \cdot a^2 + 1 \cdot a^3$

se $n = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + a)^4 = x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot a + 6 \cdot x^2 \cdot a^2 + 4 \cdot x \cdot a^3 + a^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot a + 6 \cdot x^2 \cdot a^2 + 4 \cdot x \cdot a^3 + 1 \cdot a^4$

OBSERVAÇÃO Este último resultado se obtém multiplicando-se $(x + a)^2$ por $(x + a)^2$.

Analisando estes resultados (por exemplo, o último), constatamos que:

- a primeira parcela do binômio, o x, aparece em todas as parcelas (com exceção da última) com expoentes decrescentes de um em um, a partir do expoente n do binômio;
- a segunda parcela do binômio, o a, aparece em todas as parcelas (com exceção da primeira) com expoentes crescentes de um em um, a partir de 1, até o expoenete n do binômio;
- os coeficientes numéricos das parcelas são os elementos da linha de "numerador" n do triângulo de Pascal. Confira: olhe para os coeficientes numéricos, para os números dentro dos círculos e repare que eles são os números que formam as linhas do triângulo de Pascal. Por exemplo, para $(x + a)^4$ os coeficientes numéricos são 1, 4, 6, 4 e 1, exatamente os mesmos que constam da linha de "numerador" 4 do triângulo de Pascal.

A partir destas três últimas constatações é que podemos escrever o "desenvolvimento do Binômio de Newton":

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot a^1 + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot a^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^n$$

Observe que:

- os expoentes de x vão decrescendo, de um em um, a partir de n até zero. No último termo, temos x com expoente zero: $\binom{n}{n} \cdot x^0 \cdot a^n = \binom{n}{n} \cdot 1 \cdot a^n = \binom{n}{n} \cdot a^n$;

Scanned by CamScanner

• os expoentes de *a* vão aumentando, de um em um, desde zero até *n*. No primeiro termo, onde não aparece o *a* temos *a* com expoente zero: $\binom{n}{0} \cdot x^n \cdot a^0 = \binom{n}{0} \cdot x^n \cdot 1 = \binom{n}{0} \cdot x^n$;

• os coeficientes numéricos são os números binomiais da linha de "numerador" *n* do triângulo de Pascal.

• o desenvolvimento do binômio $(x + a)^n$ é formado por n + 1 termos.

Exemplos

1. O desenvolvimento do binômio $(x + 2)^5$ é formado de 5 + 1, isto é, 6 termos, tais que:

a) os coeficientes binomiais são os binomiais de "numerador" 5: $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{5}{4}$ e $\binom{5}{5}$, cujos valores são: 1, 5, 10, 10, 5, e 1, respectivamente (veja estes valores no triângulo);

b) o *x* aparece com os expoentes 5, 4, 3, 2, 1 e zero, nesta ordem;

c) o *2* aparece com os expoentes 0, 1, 2, 3, 4 e 5, nesta ordem.

Temos, então:

$$(x + 2)^5 = \binom{5}{0} \cdot x^5 \cdot 2^0 + \binom{5}{1} \cdot x^4 \cdot 2^1 + \binom{5}{2} \cdot x^3 \cdot 2^2 + \binom{5}{3} \cdot x^2 \cdot 2^3 + \binom{5}{4} \cdot x^1 \cdot 2^4 + \binom{5}{5} \cdot x^0 \cdot 2^5 \Rightarrow$$

$$(x + 2)^5 = 1 \cdot x^5 \cdot 1 + 5 \cdot x^4 \cdot 2 + 10 \cdot x^3 \cdot 4 + 10 \cdot x^2 \cdot 8 + 5 \cdot x \cdot 16 + 1 \cdot 1 \cdot 32 \Rightarrow$$

$$\boxed{(x + 2)^5 = x^5 + 10 \cdot x^4 + 40 \cdot x^3 + 80 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 32}$$

2. O desenvolvimento do binômio $(2x + 3)^4$ é formado de 4 + 1, isto é, 5 termos, tais que:

a) os coeficientes binomiais são os binomiais de "numerador" 4: $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$ e $\binom{4}{4}$, cujos valores são 1, 4, 6, 4 e 1, respectivamente;

b) a primeira parcela do binômio é *2x*, que aparece com os expoentes 4, 3, 2, 1 e zero, nesta ordem;

c) a segunda parcela, que é o *3*, aparece com os expoentes 0, 1, 2, 3 e 4, nesta ordem.

Temos, então;

$$(2x + 3)^4 = \binom{4}{0} \cdot (2x)^4 \cdot 3^0 + \binom{4}{1} \cdot (2x)^3 \cdot 3^1 + \binom{4}{2} \cdot (2x)^2 \cdot 3^2 + \binom{4}{3} \cdot (2x)^1 \cdot 3^3 + \binom{4}{4} \cdot (2x)^0 \cdot 3^4 =$$

$$= (2x + 3)^4 = 1 \cdot 16x^4 \cdot 1 + 4 \cdot 8x^3 \cdot 3 + 6 \cdot 4x^2 \cdot 9 + 4 \cdot 2x \cdot 27 + 1 \cdot 1 \cdot 81 =$$

$$\boxed{(2x + 3)^4 = 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81}$$

3. O desenvolvimento de $(3x - 1)^6$ tem 7 termos. Neste caso, a segunda parcela do binômio é (– 1). Acompanhe:

$$(3x - 1)^6 = \binom{6}{0} \cdot (3x)^6 \cdot (-1)^0 + \binom{6}{1} \cdot (3x)^5 \cdot (-1)^1 + \binom{6}{2} \cdot (3x)^4 \cdot (-1)^2 + \binom{6}{3} \cdot (3x)^3 \cdot (-1)^3 + \binom{6}{4} \cdot (3x)^2 \cdot (-1)^4 + \binom{6}{5} \cdot (3x)^1 \cdot (-1)^5 + \binom{6}{6} \cdot (3x)^0 \cdot (-1)^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3x - 1)^6 = 1 \cdot 729x^6 \cdot 1 + 6 \cdot 243x^5 \cdot (-1) + 15 \cdot 81x^4 \cdot 1 + 20 \cdot 27x^3 \cdot (-1) + 15 \cdot 9x^2 \cdot 1 + 6 \cdot 3x \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{(3x - 1)^6 = 729x^6 - 1458x^5 + 1215x^4 - 540x^3 + 135x^2 - 18x + 1}$$

4. O desenvolvimento de $(1 - 2x)^3$ tem 4 termos. Neste caso, a primeira parcela é o "1" e a segunda parcela é (– 2x). Acompanhe:

$$(1 - 2x)^3 = \binom{3}{0} \cdot 1^3 \cdot (-2x)^0 + \binom{3}{1} \cdot 1^2 \cdot (-2x)^1 + \binom{3}{2} \cdot 1^1 \cdot (-2x)^2 + \binom{3}{3} \cdot 1^0 \cdot (-2x)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - 2x)^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-2x) + 3 \cdot 1 \cdot 4x^2 + 1 \cdot 1 \cdot (-8x^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(1 - 2x)^3 = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3}$$

Termo geral

No desenvolvimento de um binômio do tipo $(x + a)^n$, obtemos n + 1 termos, que são:

1º termo: $T_1 = \binom{n}{0} \cdot x^n \cdot a^0 = 1 \cdot x^n \cdot 1 = x^n$

2º termo: $T_2 = \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot a^1$

3º termo: $T_3 = \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot a^2$

4º termo: $T_4 = \binom{n}{3} \cdot x^{n-3} \cdot a^3$; e assim sucessivamente até o último termo, que é o termo de índice n + 1:

$$T_{n+1} = \binom{n}{n} \cdot x^0 \cdot a^n = 1 \cdot 1 \cdot a^n = a^n$$

Percebemos, então, que todos os n + 1 termos são formados pelo produto de um número binomial, uma potência de *x* e uma potência de *a*, da seguinte forma:

$$\boxed{T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^p}$$

Observe: se o "denominador" do binomial é p, o expoente de *x* é n – p, o expoente de *a* é p, e o índice do termo é p + 1. Repare também que a soma dos expoentes de *x* e de *a* é sempre igual a *n*, em todos os termos.

Exemplos

1. No desenvolvimento do binômio $(x + a)^n$, temos:

a) $\binom{n}{4} \cdot x^{n-4} \cdot a^4$ é o 5º termo, isto é,

$T_5 = \binom{n}{4} \cdot x^{n-4} \cdot a^4$

b) $\binom{n}{7} \cdot x^{n-7} \cdot a^7$ é o 8º termo, isto é,

$T_8 = \binom{n}{7} \cdot x^{n-7} \cdot a^7$

2. No desenvolvimento do binômio $(2x + 3)^5$, temos:

a) o 3º termo, isto é, o T_3, é: $T_3 = \binom{5}{2} \cdot (2x)^{5-2} \cdot 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow T_3 = 10 \cdot (2x)^3 \cdot 3^2 = 10 \cdot 8x^3 \cdot 9 = 720x^3$.

Scanned by CamScanner

b) o 5º termo, isto é, o T_5, é: $T_5 = \binom{5}{4} \cdot (2x)^{5-4} \cdot 3^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow T_5 = \binom{5}{4} \cdot (2x)^1 \cdot 3^4 = 5 \cdot 2x \cdot 81 = 810x.$

EXERCÍCIOS

1. Calcule $(1 + i)^4$, onde i é a unidade imaginária.

Solução

Este problema foi resolvido no livro III, utilizando a fórmula de Moivre. Vamos, agora, resolvê-lo usando o desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(1 + i)^4 = \binom{4}{0} \cdot 1^4 \cdot i^0 + \binom{4}{1} \cdot 1^3 \cdot i^1 +$$
$$+ \binom{4}{2} \cdot 1^2 \cdot i^2 + \binom{4}{3} \cdot 1^1 \cdot i^3 + \binom{4}{4} \cdot 1^0 \cdot i^4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1 + i)^4 = 1 \cdot 1 \cdot i^0 + 4 \cdot 1 \cdot i + 6 \cdot 1 \cdot i^2 +$$
$$+ 4 \cdot 1 \cdot i^3 + 1 \cdot 1 \cdot i^4$$

Lembrando que: i^0, i^1, i^2, i^3 e i^4 são, respectivamente, 1, i, -1, $-i$ e 1, temos, substituindo:

$$(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6 \cdot (-1) + 4 \cdot (-i) + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1 + i)^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{(1 + i)^4 = -4}$$

2. No desenvolvimento do binômio $(3x - 2)^6$, calcule o 3º e o 6º termos.

Solução

Utilizando a fórmula do termo geral do desenvolvimento do binômio $T_{p+1} = \binom{6}{p} \cdot (3x)^{6-p} \cdot (-2)^p$;

temos, então:

para $p = 2 \Rightarrow T_{p+1} = T_3 = \binom{6}{2} \cdot (3x)^4 \cdot (-2)^2 =$

$= 15 \cdot 81x^4 \cdot 4 \Rightarrow \boxed{T_3 = 4860x^4}$

para $p = 5 \Rightarrow T_{p+1} = T_6 = \binom{6}{5} \cdot (3x)^1 \cdot (-2)^5 =$

$= 6 \cdot 3x \cdot (-32) \Rightarrow \boxed{T_6 = -576x}$

3. No desenvolvimento do binômio $(2x^2 - 5)^8$, determine (se existir) o termo em x^{10}.

Solução

Inicialmente, repare que neste binômio, a primeira parcela é $2x^2$ e a segunda é (-5). Para descobrir qual é o termo em x^{10} no desenvolvimento, aplicamos a fórmula do termo geral: $T_{p+1} = \binom{8}{p} \cdot (2x^2)^{8-p} \cdot (-5)^p =$

$= \binom{8}{p} \cdot 2^{8-p} \cdot x^{16-2p} \cdot (-5)^p.$

Como queremos o termo em x^{10}, tomamos o expoente de x na expressão do termo geral, e igualamo-lo a 10:

$16 - 2p = 10 \Rightarrow -2p = 10 - 16 \Rightarrow 2p = 6 \Rightarrow \boxed{p = 3}.$

Concluímos, assim, que o termo em x^{10} é aquele em que $p = 3$. Logo, é o 4º termo:

$$T_4 = \binom{8}{3} \cdot (2x^2)^5 \cdot (-5)^3 = \frac{8!}{3! \times 5!} \cdot 2^5 \cdot x^{10} \cdot (-125)$$
$$= -224000 \cdot x^{10}$$

4. (UNESP) Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$.

Solução

Precisamos saber, incialmente, que "termo independente x" num desenvolvimento é sempre o termo em que não aparece o x, isto é, é o termo em x^0, que vale sempre 1.

O termo geral do desenvolvimento do binômio dado é:

$$T_{p+1} = \binom{6}{p} \cdot (x^2)^{6-p} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p =$$
$$= \binom{6}{p} \cdot x^{12-2p} \cdot (x^{-1})^p \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T_{p+1} = \binom{6}{p} \cdot x^{12-2p} \cdot x^{-p} =$$
$$= \binom{6}{p} \cdot x^{12-3p} \quad \text{(I)}$$

Como queremos o termo em x^0 (termo independente de x), tomamos o expoente de x na expressão do termo geral e igualamo-lo a zero: $12 - 3p = 0 \Rightarrow 3p = 12 \Rightarrow \boxed{p = 4}.$

Concluímos, assim, que o termo independente de x é aquele em que $p = 4$. Substituindo este resultado em (I), temos: $T_{4+1} = T_5 = \binom{6}{4} \cdot x^{12-12} = 15x^0 = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{T_5 = 15}$

OBSERVAÇÃO Se neste exercício (ou no anterior) o valor de p resultasse um número fracionário, concluiríamos que não existe o termo pedido no desenvolvimento do binômio dado.

Scanned by CamScanner

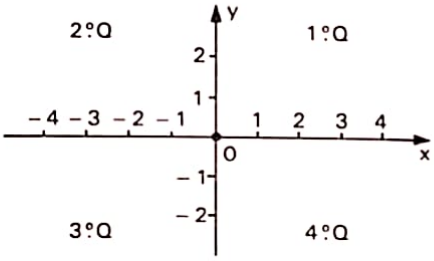
GEOMETRIA ANALÍTICA

A Geometria Analítica tem por finalidade resolver problemas geométricos utilizando recursos algébricos. Ela é o elo de ligação entre a Geometria e a Álgebra.

A Geometria Analítica Plana, que estudaremos neste livro, consiste, resumidamente, em representar o ponto, que é um ente geométrico, através de um par ordenado de números reais, que é um ente algébrico. A partir daí, representar retas, circunferências e outras curvas através de equações.

Sistema de coordenadas cartesianas

Na Geometria Analítica Plana os pontos, as retas e as circunferências são elementos geométricos contidos num mesmo plano. Neste plano, traçamos um par de eixos perpendiculares concorrentes num ponto O, chamado de **origem do sistema**:



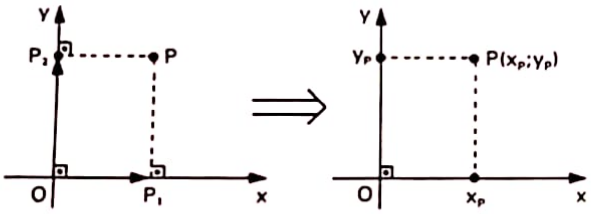
Na figura ao lado temos:

- o eixo Ox, chamado de **eixo das abscissas**, orientado positivamente no sentido da esquerda para a direita;
- o eixo Oy, chamado de **eixo das ordenadas**, orientado positivamente no sentido de baixo para cima;
- os **quadrantes**, que são as quatro regiões do plano divididas pelos eixos; são denominados 1º, 2º, 3º e 4º, conforme a posição que ocupam em relação aos eixos.

O par de eixos traçados neste plano, aqui chamado de plano cartesiano, define o sistema de coordenadas cartesianas ortogonais (ou perpendiculares).

Coordenadas de um ponto

Num plano cartesiano, utilizando um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, podemos nos utilizar de um par ordenado de números reais para representar qualquer ponto pertencente ao plano, da seguinte forma:

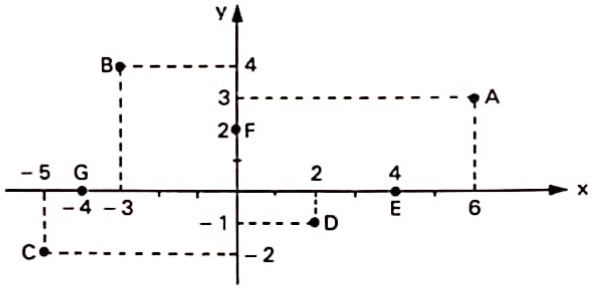


Pelo ponto P do plano cartesiano traçamos retas perpendiculares aos eixos Ox e Oy, obtendo os pontos P_1 e P_2. Temos então:

- a medida algébrica do segmento OP_1 é x_P (positiva ou negativa, conforme OP_1 esteja direcionado para a direita ou para a esquerda de O); se a medida algébrica de OP_1 é x_P, marcamos o ponto P_1 do eixo das abscissas simplesmente com x_P, conforme vemos na figura da direita.
- a medida algébrica do segmento OP_2 é y_P (positiva ou negativa, conforme OP_2 esteja direcionado para cima ou para baixo de O); se a medida algébrica de OP_2 é y_P, marcamos o ponto P_2 do eixo das ordenadas simplesmente com y_P, conforme vemos na figura da direita.

A abscissa e a ordenada de um ponto P são suas coordenadas e são assim representadas: $P(x_P; y_P)$.

Exemplo



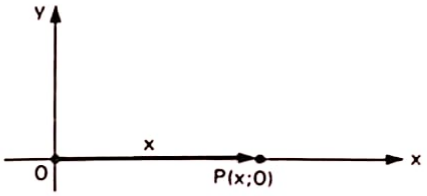
Da observação da figura anterior, concluímos:

- A tem abscissa 6 e ordenada 3 ⇒ A(6;3)
- B tem abscissa – 3 e ordenada 4 ⇒ B(– 3;4)
- C tem abscissa – 5 e ordenada – 2 ⇒ C(– 5; – 2)
- D tem abscissa 2 e ordenada – 1 ⇒ D(2; – 1)
- E tem abscissa 4 e ordenada zero ⇒ E(4; 0)
- F tem abscissa zero e ordenada 2 ⇒ F(0; 2)
- G tem abscissa – 4 e ordenada zero ⇒ G(– 4; 0)

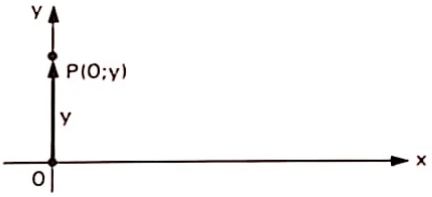
Scanned by CamScanner

Nesta associação de pares ordenados a pontos do plano, temos os seguintes casos particulares:

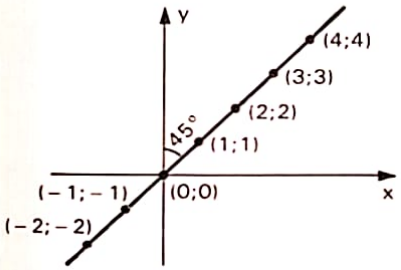
- ao ponto origem 0 fica associado o par (0; 0);
- todo **ponto do eixo de abscissas tem ordenada nula** e portanto o par ordenado associado a ele é do tipo (x; 0);

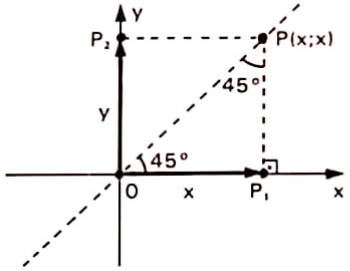


- todo **ponto do eixo das ordenadas tem abscissa zero** e portanto o par ordenado associado a ele é do tipo (0; y);



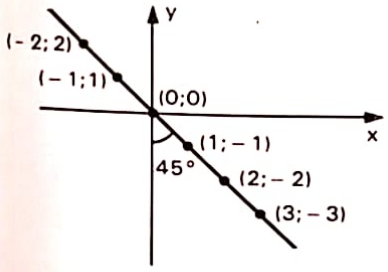
- todo **ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares** (1º e 3º) **tem abscissa e ordenada iguais**; o par ordenado associado a um ponto dessa bissetriz é do tipo (x; x).

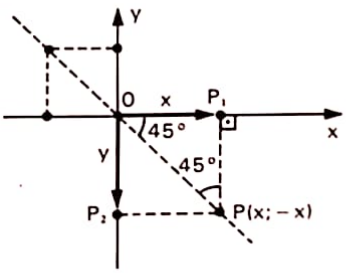




Este último fato é fácil de ser entendido se repararmos que o triângulo OPP_1 da figura da direita é isósceles e, portanto, $OP_1 = P_1P = OP_2$ e, portanto $x = y$.

- todo **ponto da bissetriz dos quadrantes pares** (2º e 4º) **tem abscissa e ordenada opostas**; o par ordenado associado a um ponto dessa bissetriz é do tipo (x; – x):





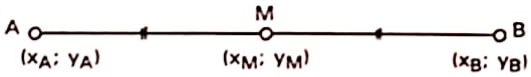
A última conclusão fica facilmente compreendida quando percebemos que o triângulo OPP_1 da figura da direita é isósceles e, portanto, os segmentos OP_1 e OP_2, em módulo, são iguais. Como OP_2 está direcionado para baixo, conclui-se que *y* é negativo e, portanto, $y = -x$ (repare que no 2º quadrante, o *y* é positivo e o *x* é negativo).

Ponto médio de um segmento

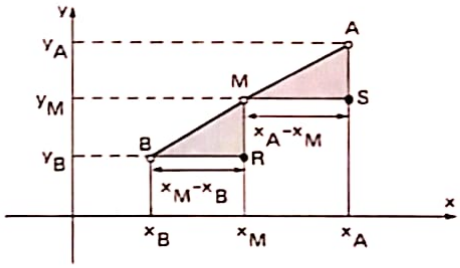
A abscissa e a ordenada do ponto médio (M) de um segmento ($\overline{AB}$) são iguais, respectivamente, à média aritmética das abscissas e das ordenadas dos extremos do segmento.

Formalizando, temos:

$$\boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}$$



Acompanhe a explicação na figura seguinte:



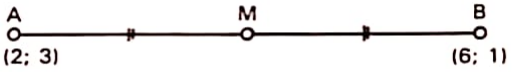
Se M é o ponto médio de $\overline{AB}$, os triângulos BMR e MAS são iguais, o que nos dá $\overline{BR} = \overline{MS}$ e, então:

$$x_M - x_B = x_A - x_M \Rightarrow 2 \cdot x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Analogamente, pela igualdade dos segmentos $\overline{MR}$ e $\overline{AS}$, obtemos:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Exemplo



O ponto M, médio de $\overline{AB}$ na figura anterior, tem coordenadas:

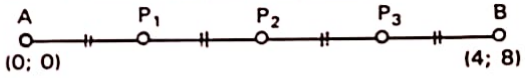
$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow M(4; 2)$$

EXERCÍCIOS

1. Achar os pontos que dividem o segmento $\overline{AB}$ em quatro partes iguais; dados: A(0; 0) e B(4; 8).

Solução

Consideremos o seguinte esquema:



Scanned by CamScanner

Inicialmente calculamos o ponto P_2, médio de $\overline{AB}$.

$$\begin{cases} x_{P_2} = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{0 + 4}{2} = 2 \\ y_{P_2} = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{0 + 8}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow P_2(2; 4)$$

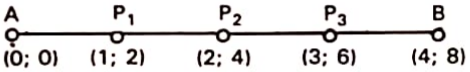
Agora, calculamos P_1 que é médio de $\overline{AP_2}$:

$$\begin{cases} x_{P_1} = \dfrac{x_A + x_{P_2}}{2} = \dfrac{0 + 2}{2} = 1 \\ y_{P_1} = \dfrac{y_A + y_{P_2}}{2} = \dfrac{0 + 4}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow P(1; 2)$$

Finalmente, calculamos P_3 que é médio de $\overline{P_2B}$:

$$\begin{cases} x_{P_3} = \dfrac{x_{P_2} + x_B}{2} = \dfrac{2 + 4}{2} = 3 \\ y_{P_3} = \dfrac{y_{P_2} + y_B}{2} = \dfrac{4 + 8}{2} = 6 \end{cases} \Rightarrow P(3; 6)$$

Temos então a seguinte situação final:



Repare que as abscissas dos pontos formam uma P.A. (progressão aritmética) de razão 1 e as ordenadas formam uma P.A. de razão 2. Este fato pode ser utilizado para se encontrar as abscissas e as ordenadas dos pontos P_1, P_2 e P_3 da seguinte forma:

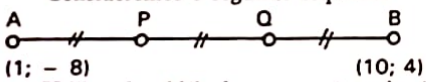
• quando passamos do ponto A ao ponto B, a abscissa varia de 0 a 4 ($\Delta x = x_B - x_A = 4 - 0 = 4$). Como o segmento $\overline{AB}$ está dividido em 4 partes iguais, essa variação de 4 unidades deve ser dividida por 4, dando uma variação de 1 unidade. Assim, quando passamos de A para P_1, de P_1 para P_2, de P_2 para P_3 e de P_3 para B, as abscissas vão aumentando de 1 em 1;

• quando passamos do ponto A ao ponto B, a ordenada varia de 0 a 8 ($\Delta y = y_B - y_A = 8 - 0 = 8$). Dividindo essa variação de 8 unidades por 4 (pois $\overline{AB}$ está dividido em 4 partes iguais) concluímos que as ordenadas vão aumentando de 2 em 2 a partir de A em direção a B.

2. Determinar as coordenadas dos pontos P e Q que dividem o segmento $\overline{AB}$ em 3 partes iguais, sendo A(1; −8) e B(10; 4).

Solução

Consideremos o seguinte esquema:



Utilizando a idéia das progressões aritméticas, lançada no exemplo anterior, concluímos que:

• quando passamos do ponto A ao ponto B, ocorre uma variação de abscissas de 9 unidades ($\Delta x = x_B - x_A = 10 - 1 = 9$). Como o segmento $\overline{AB}$ está dividido em 3 partes iguais, concluímos que essa variação de 9 unidades deve ser dividida por 3, dando uma variação de 3 unidades para cada parte. Portanto, a partir do ponto A, as abscissas variam de 3 em 3, resultando:

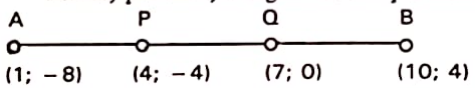
$$\begin{cases} x_P = x_A + 3 \Rightarrow x_P = 1 + 3 \Rightarrow \boxed{x_P = 4} \\ x_Q = x_P + 3 \Rightarrow x_Q = 4 + 3 \Rightarrow \boxed{x_Q = 7} \end{cases}$$

• quando passamos de A para B, a variação de ordenadas é de 12 unidades ($\Delta y = y_B - y_A = 4 - (-8) = 4 + 8 = 12$). Dividindo essa variação por 3, concluímos que as ordenadas aumentam de 4 em 4 a partir de A em direção a B. Temos:

$$y_P = y_A + 4 \Rightarrow y_P = -8 + 4 \Rightarrow \boxed{y_P = -4}$$

$$y_Q = y_P + 4 \Rightarrow y_Q = -4 + 4 \Rightarrow \boxed{y_Q = 0}$$

Temos, portanto, a seguinte situação final:

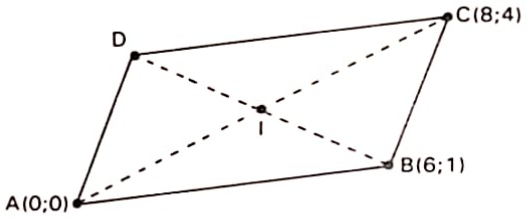


3. Os pontos A(0; 0), B(6; 1) e C(8; 4) são três vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD. Determine o ponto I, intersecção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e o vértice D.

Solução

Vamos inicialmente lembrar que um paralelogramo é um quadrilátero que tem lados opostos paralelos e iguais, e onde o ponto de intersecção das diagonais é o ponto médio das mesmas.

Temos então o seguinte esquema:



Como I é o ponto médio da diagonal $\overline{AC}$, temos:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{0 + 8}{2} = 4 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{0 + 4}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow I(4; 2)$$

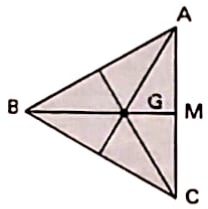
Agora vamos determinar o vértice D usando o fato de que o ponto I é o ponto médio da diagonal $\overline{BD}$. Temos então:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow 4 = \dfrac{6 + x_D}{2} \Rightarrow 6 + x_D = 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{x_D = 2} \\ y_I = \dfrac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow 2 = \dfrac{1 + y_D}{2} \Rightarrow 1 + y_D = 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{y_D = 3} \end{cases}$$

Portanto, o vértice D tem coordenadas (2; 3).

Baricentro de um triângulo

Baricentro de um triângulo é o ponto de intersecção das medianas, isto é, dos segmentos que unem um vértice ao ponto médio do lado oposto. Temos, assim, a seguinte figura:



A respeito dela podemos afirmar:

A abscissa e a ordenada do baricentro G, de um triângulo ABC, são iguais, respectivamente, à média aritmética das abscissas e das ordenadas dos vértices do triângulo.

Scanned by CamScanner

Temos então as seguintes expressões:

$$\boxed{x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \text{ e } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}}$$

Este resultado pode ser entendido se lembrarmos que o baricentro G de um triângulo divide a mediana $\overline{BM}$ na razão 2:1, a partir do vértice e portanto $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM}$. Temos, então, o seguinte esquema:

Partindo do ponto B, em direção ao ponto M, a variação de abscissas é $\Delta x = x_M - x_B$. Como o segmento $\overline{BM}$ está dividido em 3 partes iguais, a variação de abscissas entre 2 pontos consecutivos é $\frac{x_M - x_B}{3}$.

Sendo G o segundo ponto a partir de B, temos:

$$x_G = x_B + 2 \cdot \frac{x_M - x_B}{3} \Rightarrow 3 \cdot x_G = 3 \cdot x_B + 2 \cdot x_M + - 2 \cdot x_B \Rightarrow 3 \cdot x_G = x_B + 2 \cdot x_M \quad (*)$$

Como o ponto M é o ponto médio do lado $\overline{AC}$, podemos escrever que: $x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow \boxed{2 \cdot x_M = x_A + x_C}$.

Substituindo este resultado na expressão (*), obtemos:

$$3 \cdot x_G = x_B + x_A + x_C \Rightarrow \boxed{x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}}.$$

Analogamente, demonstramos a relação para a ordenada y_G.

Exemplo

O baricentro do triângulo ABC, de vértices A(0; 4), B(1; 3) e C(−2; 7), é o ponto G, cujas coordenadas são:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \\ = \dfrac{0 + 1 + (-2)}{3} = -\dfrac{1}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \\ = \dfrac{4 + 3 + 7}{3} = \dfrac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{G\left(-\frac{1}{3}; \frac{14}{3}\right)}$$

EXERCÍCIO

O ponto G, de coordenadas (α; β) é o baricentro do triângulo ABC. Sabendo que *G* pertence ao eixo de abscissas, *A* pertence ao eixo de ordenadas e sendo B(6; −1) e C(−3; −3), calcule as coordenadas de *A* e de *G*.

Solução

Como o ponto G pertence ao eixo de abscissas, sua ordenada é zero, isto é β = 0. Da mesma forma, como o vértice A pertence ao eixo de ordenadas, sua abscissa é zero, isto é, $x_A = 0$.

Lembrando as fórmulas das coordenadas do baricentro de um triângulo, temos:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow \alpha = \dfrac{0 + 6 + (-3)}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\alpha = 1} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow 0 = \dfrac{y_A + (-1) + (-3)}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{y_A = 4} \end{cases}$$

Portanto, o ponto A é o ponto (0; 4) e G é o ponto (1; 0).

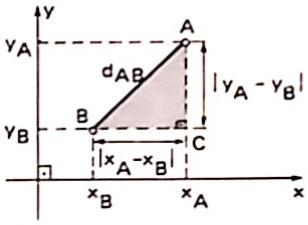
Distância entre dois pontos

Sendo *A* e *B* dois pontos distintos, chamamos **de distância** entre *A* e *B* ao comprimento do segmento $\overline{AB}$.

Num plano cartesiano, sendo $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$, a distância (d_{AB}) entre eles é calculada pela fórmula:

$$\boxed{d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}$$

Vejamos a seguir como chegar a esta fórmula.

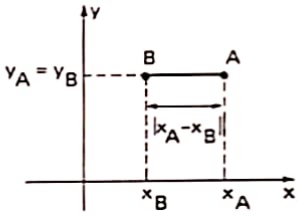


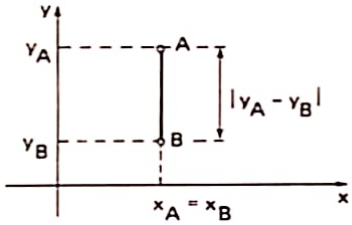
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos: $(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (d_{AB})^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$.

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da igualdade, chegamos à fórmula:

$$\boxed{d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}$$

Repare que esta fórmula é válida mesmo quando o segmento $\overline{AB}$ é paralelo a um dos eixos:





Quando o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo das abscissas, temos $y_A = y_B$, o que nos dá $y_A - y_B = 0$ e, portanto,
$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + 0} \Rightarrow$
$\Rightarrow d_{AB} = |x_A - x_B|$

Analogamente, quando o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo de ordenadas, temos: $x_A = x_B$ e, portanto,
$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{0 + (y_A - y_B)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow d_{AB} = |y_A - y_B|$

ATENÇÃO Nestas duas últimas expressões o sinal de módulo é necessário, pois distância entre dois pontos é sempre um número não negativo.

Exemplos

1. A distância entre os pontos A(6; 4) e B(2; 1) é:
$d_{AB} = \sqrt{(6 - 2)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

2. A distância do ponto A(5; 12) à origem O(0; 0) é:
$d_{A_O} = \sqrt{(5 - 0)^2 + (12 - 0)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

3. A distância do ponto A(3; −2) ao ponto B(−2; 5) é:
$d_{AB} = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + [(-2) - 5]^2} = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = \sqrt{74}$

Scanned by CamScanner

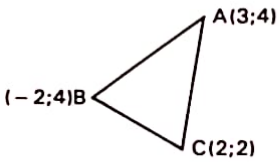
EXERCÍCIOS

1. Calcular o perímetro do triângulo ABC, cujos vértices são: A(3; 4), B(−2; 4) e C(2; 2).

Solução

Os comprimentos dos lados do triângulo são as distâncias entre seus vértices.

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, temos:



$AB = d_{AB} = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{5^2 + 0} = 5$

$AC = d_{AC} = \sqrt{(3 - 2)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

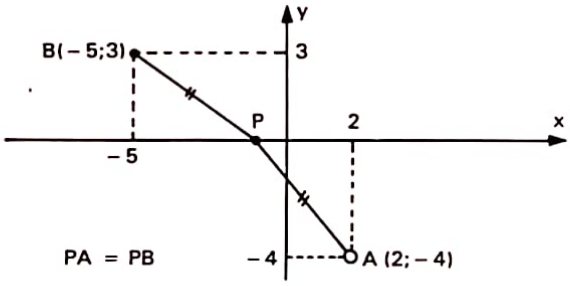
$BC = d_{BC} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

O perímetro é, então, $AB + AC + BC = 5 + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{per(\Delta ABC) = 5 + 3\sqrt{5}}$

2. Determine um ponto do eixo de abscissas e eqüidistante dos pontos A(2; −4) e B(−5; 3).

Solução



O ponto P procurado tem ordenada $y_P = 0$, pois está sobre o eixo de abscissas. Chamando de x sua abscissa, temos o ponto P(x; 0).

Como o ponto P é eqüidistante de A e B, temos:

$PA = PB \Rightarrow d_{PA} = d_{PB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (0 + 4)^2} = \sqrt{(x + 5)^2 + (0 - 3)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 16 = x^2 + 10x + 25 + 9 \Rightarrow$

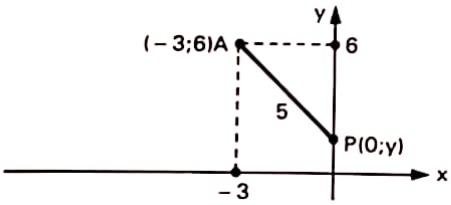
$\Rightarrow -14x = 34 - 20 = 14 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

Portanto, o ponto procurado é o ponto P(−1; 0).

3. Determine um ponto do eixo de ordenadas cuja distância ao ponto A(−3; 6) seja 5.

Solução

Esquematizando o enunciado, temos:



O ponto P procurado tem abscissa $x_P = 0$, pois está sobre o eixo das ordenadas. Chamando de y sua ordenada, temos o ponto P(0; y).

Como a distância entre os pontos P e A é 5, escrevemos:

$PA = 5 \Rightarrow d_{PA} = 5 \Rightarrow \sqrt{(0 + 3)^2 + (y - 6)^2} = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{9 + y^2 - 12y + 36} = 5 \Rightarrow \sqrt{y^2 - 12y + 45} = 5.$

Elevando ao quadrado ambos os membros desta última igualdade, temos: $y^2 - 12y + 45 = 25 \Rightarrow y^2 - 12y + 20 = 0$.

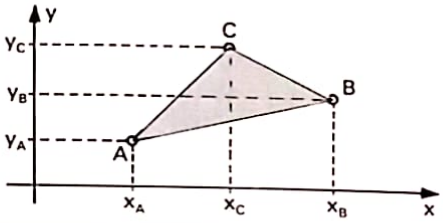
Resolvendo a equação de 2º grau, obtemos: y = 2 ou y = 10.

Portanto, o ponto P procurado pode ser P(0; 2) ou P(0; 10). O fato de encontrarmos dois valores possíveis para y significa que existem dois pontos que satisfazem as condições do enunciado.

Área de um triângulo

Consideremos o triângulo ABC ao lado.

A área S desse triângulo ABC, de vértices $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$ é calculada pela fórmula:



$$\boxed{S = \frac{1}{2} \cdot \text{mod} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}$$

onde mod significa módulo. Este módulo é necessário, pois área é sempre um número positivo. (A demonstração desta fórmula foge aos interesses deste curso.)

Exemplo

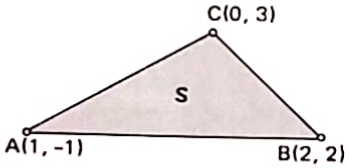
A área do triângulo ABC, de vértices A(0; 0), B(2; 6) e C(4; 3) é:

$$S = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |6 - 24| = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9.$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule a área do triângulo de vértices A(1; −1), B(2; 2) e C(0; 3).

Solução

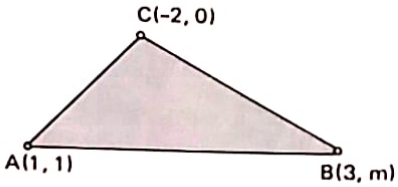


Temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \text{mod} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |2 + 6 - 3 + 2| = \frac{7}{2}$$

2. O triângulo ABC, de vértices A(1; 1), B(3; m) e C(−2; 0), tem área igual a 10. Calcule m.

Solução



Scanned by CamScanner

A área do triângulo ABC é:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \text{mod} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & m & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |m - 2 + 2m - 3| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |3m - 5|$$

Pelo enunciado, sabemos que S = 10; logo:

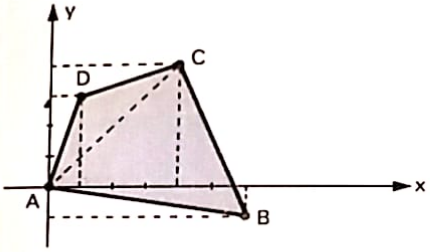
$$\frac{1}{2} \cdot |3m - 5| = 10 \Rightarrow |3m - 5| = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3m - 5 = 20 \text{ ou} \\ 3m - 5 = -20 \end{cases} \Rightarrow \boxed{m = \frac{25}{3} \text{ ou } m = -5}$$

3. Calcule a área do quadrilátero ABCD, de vértices A(0; 0), B(6; −1), C(4; 4) e D(1; 3).

Solução

Representamos o quadrilátero ABCD no plano cartesiano (figura ao lado).



Para calcular a área do quadrilátero ABCD, decompômo-lo em dois triângulos, utilizando uma de suas diagonais. Por exemplo, a diagonal AC decompõe o quadrilátero nos triângulos ABC e ADC.

Passamos, agora, a calcular as áreas desses dois triângulos:

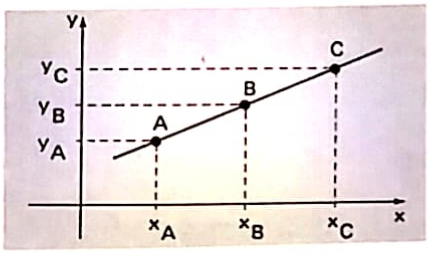
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \text{mod} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |24 + 4| = 14$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot \text{mod} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |4 - 12| = 4$$

Agora somamos essas duas áreas para obter a área do quadrilátero ABCD: $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = 14 + 4 = 18$.

Condição de alinhamento de três pontos

Sejam A, B e C três pontos de um plano cartesiano:



A condição necessária e suficiente para que os pontos $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$ estejam alinhados (ou colineares), isto é, para que pertençam a uma mesma reta, é que o determinante D,

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \text{ seja nulo.}$$

Como você deve ter observado, o determinante D da condição de alinhamento é o mesmo que aparece na expressão da área de um triângulo ABC, estudada anteriormente. A explicação é simples: os pontos A, B e C estão alinhados somente quando não existe triângulo, isto é, quando a área do "triângulo" ABC é nula, o que ocorre apenas para D = 0.

Exemplos

1. Os pontos A(0; 0), B(2; 3) e C(4; 6) **estão alinhados** pois o determinante D,

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0, \textbf{ é nulo.}$$

2. Os pontos A(1; 1), B(5; −2) e C(6; 7) **não estão alinhados** (não são colineares, não pertencem a uma mesma reta) pois o determinante D,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 6 + 35 + 12 - 7 - 5 = 39,$$

não vale zero.

EXERCÍCIOS

1. Determinar os valores de m para que os pontos A(3; 2), B(m; 0) e C(2; m) estejam alinhados.

Solução

Pela condição de alinhamento, os pontos A, B e C estão alinhados se o determinante

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ m & 0 & 1 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix} \text{ for igual a zero.}$$

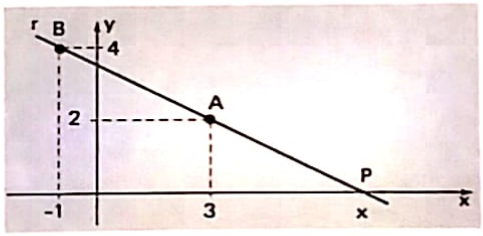
Desenvolvendo o determinante, obtemos:

$4 + m^2 - 3m - 2m = 0 \Rightarrow m^2 - 5m + 4 = 0$; resolvendo esta equação de 2º grau, obtemos: $\boxed{m = 1}$ ou $\boxed{m = 4}$.

2. Os pontos A(3; 2) e B(−1; 4) determinam uma reta r. Em que ponto a reta r intercepta o eixo de abscissas?

Solução

Fazemos um esquema do enunciado:



A intersecção de *r* com o eixo dos x é o ponto P e sua ordenada é $y_P = 0$. Chamando a abscissa do ponto P de *x*, temos o ponto P(x; 0).

Como A(3; 2), B(−1; 4) e P(x; 0) estão alinhados (pois pertencem à mesma reta), o determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ deve ser igual a zero.}$$

Desenvolvendo o determinante, obtemos:

$12 + 2x - 4x + 2 = 0 \Rightarrow 14 - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 7}$

Portanto, a reta r intercepta o eixo dos x no ponto (7; 0).

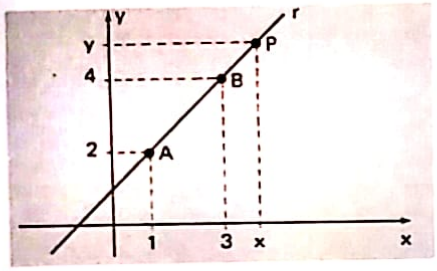
Scanned by CamScanner

EQUAÇÃO DA RETA

Reta determinada por dois pontos

Para tornar mais concreta a idéia central deste capítulo, começaremos analisando um exemplo preliminar.

Consideremos os pontos A(1; 2) e B(3; 4) do plano cartesiano. Esses dois pontos, por serem distintos, determinam uma única reta, que chamaremos de reta *r*.



Sabemos que a reta *r* é um elemento geométrico constituído de infinitos pontos. Seja P(x; y) qualquer um desses infinitos pontos (na figura anterior, P poderia estar "abaixo" de A ou entre A e B).

Podemos, então, afirmar que o ponto P é um ponto qualquer da reta *r* determinada pelos pontos A e B, se, e somente se, A, B e P forem três pontos colineares e, portanto, suas coordenadas (1; 2), (3; 4) e (x; y) satisfizerem a relação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4+2x+3y-4x-y-6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow -x + y - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x + 1}$$

A equação y = x + 1 é a **equação da reta r.** Ela nos diz que qualquer ponto P(x; y) pertence à reta *r*, se, e somente se, **a ordenada *y* for igual à abscissa *x* mais *um*.** Repare que essa relação vale para os dois pontos A e B que determinam a reta *r*:

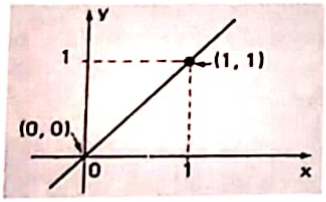
A(1; 2) ⇒ a ordenada y = 2 é igual à abscissa x = 1 mais 1;
B(3; 4) ⇒ a ordenada y = 4 é igual à abscissa x = 3 mais 1.

Desta forma, os pontos (6; 7), (11; 12), (− 4; − 3), (− 7; − 6), (− 1; 0) e (0; 1) são, certamente, alguns pontos da reta *r*, pois, em todos eles, a ordenada *y* é igual à abscissa *x* mais 1.

Igualmente podemos dizer que os pontos (5; 3) e (2; 8) não são pontos da reta *r* pois suas coordenadas não verificam a condição y = x + 1, que é a equação da reta *r*.

Vejamos mais alguns exemplos:

1.



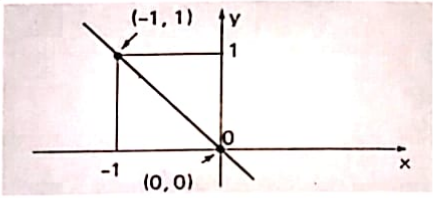
A reta determinada pelos pontos (1; 1) e (0; 0) é formada por pontos de coordenadas (x; y) tais que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow \boxed{y = x}.$$

Portanto, analisando a equação obtida concluímos que todo ponto pertencente à reta da figura (essa reta é a bissetriz dos quadrantes ímpares) tem coordenadas (x; y) iguais entre si. Por exemplo, os pontos (2; 2), (3; 3), (− 5; − 5) certamente pertencem à reta da figura, pois eles têm abscissa e ordenada iguais.

2. Os pontos (− 1; 1) e (0; 0) definem a reta da figura:



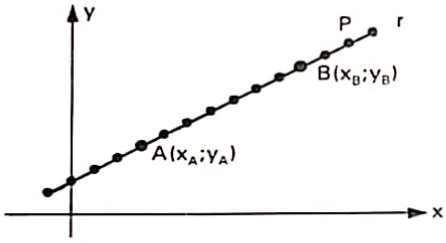
Os pontos de coordenadas (x; y) pertencentes à esta reta são tais que:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x + y = 0}.$$

A equação obtida nos diz que todo ponto pertencente à reta da figura (que é a bissetriz dos quadrantes pares) tem coordenadas (x; y) tais que a **soma da abscissa x com a ordenada y é sempre igual a zero.** Portanto, os pontos de coordenadas (2; − 2), (5; − 5), (− 4; 4) e (− 8; 8) são alguns dos pontos pertencentes à bissetriz da figura.

■ Equação geral da reta

Vamos, agora, refazer o que fizemos nos exemplos anteriores, considerando dois pontos genéricos $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ distintos, e um ponto P(x; y).



Um ponto P(x; y) pertence à reta determinada pelos pontos A e B se, e somente se, A, B e P forem três pontos colineares e, portanto, suas coordenadas satisfizerem à relação:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_A \cdot y_B + x \cdot y_A + y \cdot x_B - x \cdot y_B - y \cdot x_A - x_B \cdot y_A = 0$$

Colocando *x* e *y* em evidência nos termos assinalados, temos:

$$\Rightarrow x \cdot (y_A - y_B) + y \cdot (x_B - x_A) + x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = 0$$

Fazendo:

$$\left.\begin{array}{l} y_A - y_B = a \\ x_B - x_A = b \\ x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = c \end{array}\right\} \Rightarrow \text{temos: } \boxed{a \cdot x + b \cdot y + c = 0}$$

A equação a · x + b · y + c = 0 denomina-se **equação geral da reta** determinada por dois pontos, A e B.

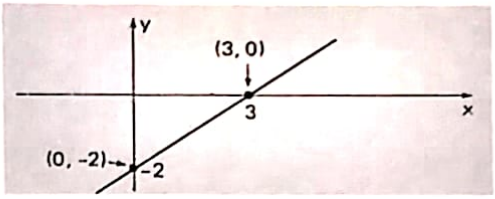
OBSERVAÇÃO Não se deve decorar o cálculo dos coeficientes *a*, *b* e *c*. O que se deve saber é que a equação geral é obtida a partir dos pontos A e B construindo-se, com suas coordenadas, o determinante:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{a \cdot x + b \cdot y + c = 0}$$

Scanned by CamScanner

Exemplos

1. A equação geral da reta da figura seguinte:



se obtém através do determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6+2x-3y=0 \Rightarrow \boxed{2x-3y-6=0}.$$

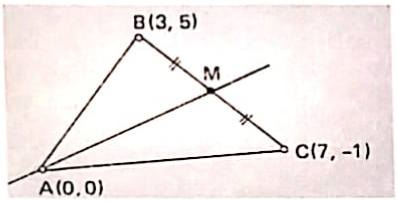
2. A equação geral da reta determinada pelos pontos A(− 1; 6) e B(4; 1) se obtém através do determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -1+6x+4y-x+y-24=0$$
$$5x+5y-25=0$$
$$\boxed{x+y-5=0}$$

EXERCÍCIOS

1. Um triângulo ABC tem vértices A(0; 0), B(3; 5) e C(7; − 1). Determine a equação da mediana desse triângulo, relativa ao lado $\overline{BC}$.

Solução



A mediana procurada é determinada pelos pontos A e M, onde M é o ponto médio de $\overline{BC}$. O ponto M tem coordenadas:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{3+7}{2} = 5 \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M(5; 2)$$

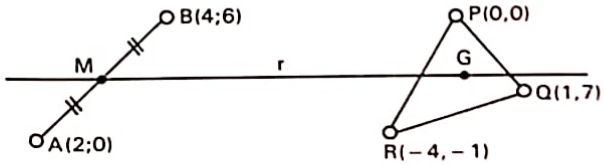
A mediana $\overline{AM}$, determinada pelos pontos A(0; 0) e M(5; 2), tem equação:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5y - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{2x - 5y = 0}.$$

2. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e pelo baricentro do triângulo PQR; dados: A(2; 0), B(4; 6); P(0; 0), Q(1; 7) e R(− 4; − 1).

Solução

Fazemos um esquema do problema:



Vamos determinar, inicialmente, o ponto médio M e, a seguir, o baricentro G:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{0+6}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow M(3; 3)$$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_P + x_Q + x_R}{3} = \dfrac{0+1-4}{3} = \dfrac{-3}{3} = -1 \\ y_G = \dfrac{y_P + y_Q + y_R}{3} = \dfrac{0+7-1}{3} = \dfrac{6}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow G(-1; 2)$$

Finalmente, a reta determinada pelos pontos M e G tem equação:

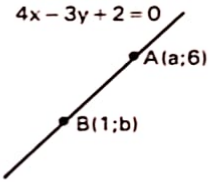
$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6 + 3x - y - 2x - 3y + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x - 4y + 9 = 0}$$

3. Os pontos A(a; 6) e B(1; b) pertencem à reta de equação 4x − 3y + 2 = 0. Calcule a distância entre os pontos A e B.

Solução

Esquematizando o enunciado, temos a figura ao lado.



Se a equação da reta dada é 4x − 3y + 2 = 0, podemos concluir que qualquer ponto pertencente à reta dada é tal que **quatro vezes a abscissa *x* menos três vezes a ordenada *y* do mesmo ponto, mais dois, é igual a zero.** Em particular, como o ponto A pertence à reta, temos:

A(a; 6) pertence à reta $\Rightarrow 4 \cdot a - 3 \cdot 6 + 2 = 0$
$\Rightarrow 4 \cdot a - 16 = 0$
$\Rightarrow 4 \cdot a = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow A(4; 6)$

Analogamente, como o ponto B pertence à reta, temos:

B(1; b) pertence à reta $\Rightarrow 4 \cdot 1 - 3 \cdot b + 2 = 0$
$\Rightarrow 6 - 3 \cdot b = 0$
$\Rightarrow 3 \cdot b = 6 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow B(1; 2)$

Agora que já conhecemos as coordenadas dos pontos A e B, podemos calcular a distância entre eles:

$$\left.\begin{matrix} A(4; 6) \\ B(1; 2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2}$$

$$\Rightarrow d_{AB} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \boxed{d_{AB} = 5}.$$

Equação geral: casos particulares

Podemos observar que as equações de retas obtidas até agora são sempre equações lineares (isto é, equações de primeiro grau nas variáveis x e y). Esse fato é, na verdade, uma característica das retas. Podemos, assim, enunciar o seguinte teorema:

> Toda reta do plano cartesiano pode ser representada por uma equação do tipo ax + by + c = 0, onde *a*, *b* e *c* são números reais, desde que *a* e *b* não sejam simultaneamente nulos. Reciprocamente, toda equação do tipo ax + by + c = 0, com *a* e *b* não simultaneamente nulos, representa uma reta do plano cartesiano.

Scanned by CamScanner

Vamos estudar agora o que acontece com o gráfico da reta cuja equação, do tipo $ax + by + c = 0$, tem *a* ou *b* ou *c* iguais a zero.

• inicialmente vamos observar que *a* e *b* não podem ser zero simultaneamente, pois, caso isso ocorresse, teríamos a equação $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$, que é satisfeita por qualquer ponto do plano cartesiano, se $c = 0$.

• se $a = 0$ e $b \neq 0$.

Neste caso, temos a equação $b \cdot y + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{c}{b}$.

Esta equação representa, no plano cartesiano, uma reta paralela ao eixo de abscissas. Isto se explica, pois a equação $y = -\frac{c}{b}$ nos diz que **todo ponto desta reta tem ordenada y igual a** $-\frac{c}{b}$. Portanto, temos infinitos pontos com a mesma ordenada situados, todos, numa reta paralela ao eixo de abscissas.

Exemplo

A equação $y - 1 = 0$ (ou $y = 1$) representa uma reta paralela ao eixo de abscissas, à distância de uma unidade desse eixo:

Todas as **retas paralelas ao eixo dos x** têm equação do tipo **y = constante**. Em particular, a equação $y = 0$ representa o próprio eixo dos *x*.

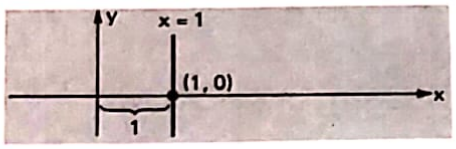
• se $b = 0$ e $a \neq 0$.

Neste caso, temos a equação $a \cdot x + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$.

Esta equação representa, no plano cartesiano, uma reta paralela ao eixo de ordenadas. Isto se explica, pois a equação $x = -\frac{c}{a}$ nos diz que **todo ponto pertencente a esta reta tem abscissa** $x = -\frac{c}{a}$. Portanto, temos infinitos pontos com a mesma abscissa situados, todos, numa reta paralela ao eixo de ordenadas.

Exemplo

A equação $x - 1 = 0$ (ou $x = 1$) representa uma reta paralela ao eixo dos y, como na figura seguinte:



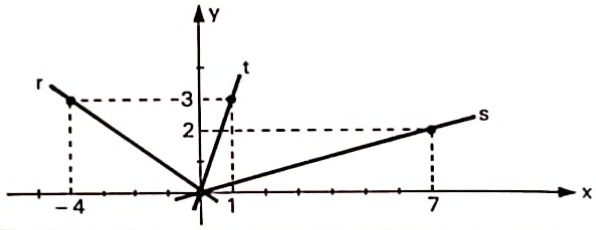
Todas as **retas paralelas ao eixo dos y** (que, a partir de agora, serão chamadas de retas verticais) têm equação do tipo **x = constante**. Em particular, a equação $x = 0$ representa o próprio eixo dos y.

• se $c = 0$; $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Quando $c = 0$, a equação geral se reduz à forma $ax + by = 0$. São deste tipo as equações: $3x + 4y = 0$; $2x - 7y = 0$; etc.

As retas cujas equações têm $c = 0$ são retas cujos gráficos sempre passam pela origem (0; 0) do sistema de coordenadas. Isto pode ser entendido facilmente, uma vez que basta substituir o par (0; 0) na equação $ax + by = 0$ e verificar que ela se transforma na identidade $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$.

Veja, a seguir, o gráfico das retas $3x + 4y = 0$ (*r*), $2x - 7y = 0$ (*s*) e $3x - y = 0$ (*t*):



EXERCÍCIOS

1. Representar graficamente a reta de equação $3x + 2y - 6 = 0$.

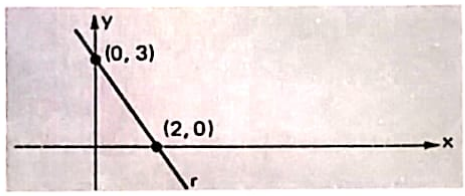
Solução

Para a construção do gráfico, escolhemos dois pontos quaisquer da reta. Fazemos, por exemplo:

$x = 0$, obtendo $2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$

$y = 0$, obtendo $3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$

A seguir, marcamos no plano cartesiano os pontos de coordenadas (0; 3) e (2; 0), obtendo a reta r da figura:



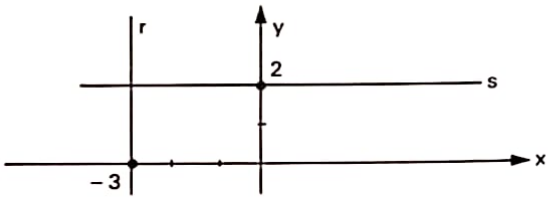
2. Representar, no plano cartesiano, as retas de equações $2x + 6 = 0$ e $2y - 4 = 0$.

Solução

Chamando de *r* a reta de equação $2x + 6 = 0$ e de *s* a reta de equação $2y - 4 = 0$, concluímos que:

• a reta *r*, de equação $2x + 6 = 0$, é paralela ao eixo das ordenadas, pois todos os seus pontos têm abscissa $x = -3$;

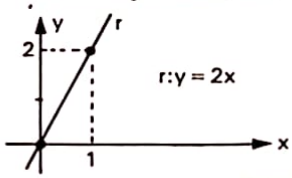
• a reta *s*, de equação $2y - 4 = 0$, é paralela ao eixo de abscissas, pois todos os seus pontos têm ordenada $y = 2$; temos, então, o seguinte gráfico:



3. Representar, graficamente, a reta de equação $2x - y = 0$.

Solução

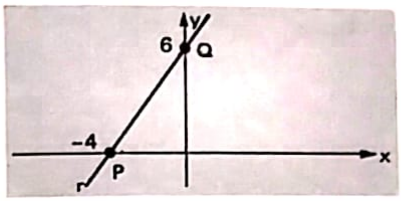
A reta de equação $2x - y = 0$ certamente passa pela origem (0; 0) do sistema já que $c = 0$. Basta, portanto, obter mais um ponto para poder traçar seu gráfico. Escolhemos, então: $x = 1$, obtendo $2 \cdot 1 + -y = 0 \Rightarrow y = 2$. Com o ponto (0; 0) e o ponto (1; 2) traçamos o gráfico ao lado.



Scanned by CamScanner

4. Obter os pontos onde a reta r, de equação $3x - 2y + 12 = 0$, corta cada um dos eixos coordenados.

Solução



O ponto P, onde r corta o eixo dos x, é obtido fazendo $y = 0$ na equação da reta r:

$y = 0 \Rightarrow 3x + 12 = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow \boxed{P(-4; 0)}$

Analogamente, o ponto Q, intersecção de r com o eixo dos y, é obtido fazendo $x = 0$ na equação de r:

$x = 0 \Rightarrow -2y + 12 = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow \boxed{Q(0; 6)}$

5. Assinale (V) ou (F):

a) o ponto A(5; 2) pertence à reta $x + y = 7$; ⇒ ( )

b) o ponto 0(0; 0) pertence à reta $4x + 5y + 1 = 0$; ⇒ ( )

c) a reta $x - 2y - 3 = 0$ corta o eixo dos x no ponto $(-3/2; 0)$ ⇒ ( )

Solução

a) (V). Para $x = 5$ e $y = 2$, obtemos $x + y = 5 + 2 = 7$, e, portanto, o ponto A(5; 2) pertence à reta $x + y = 7$.

b) (F). Para $x = 0$ e $y = 0$, obtemos $4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 1 \neq 0$.

c) (F). Obtemos o ponto onde uma reta corta o eixo dos x fazendo $y = 0$ em sua equação. Temos, então:
$y = 0 \Rightarrow x - 2 \cdot 0 - 3 = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$.
Logo, a reta $x - 2y - 3 = 0$ corta o eixo dos x no ponto de coordenadas (3; 0).

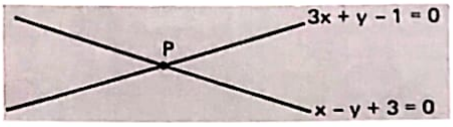
Intersecção de duas retas

Em Geometria Plana, duas retas que não são paralelas são concorrentes e têm um único ponto comum. Vejamos como, em Geometria Analítica, determinamos as coordenadas desse ponto a partir das equações das duas retas. Acompanhe os próximos exercícios resolvidos.

EXERCÍCIOS

1. Obter a intersecção das retas de equações $3x + y - 1 = 0$ e $x - y + 3 = 0$.

Solução Temos o seguinte esquema:



O ponto P, de coordenadas (x; y), intersecção das duas retas, pertence a ambas as retas. Portanto, **suas coordenadas devem satisfazer a ambas as equações**, ou seja, **devem ser a solução do sistema:**

$$\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 4x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1/2}$$

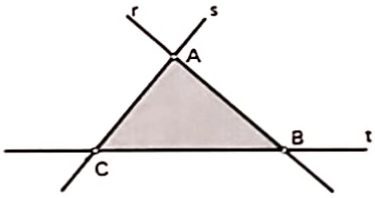
Substituindo $x = -1/2$, por exemplo na primeira equação, obtemos: $-3/2 + y - 1 = 0$. Resolvendo esta equação, obtemos: $y = 5/2$.

Portanto, a intersecção das duas retas é o ponto $P\left(\frac{-1}{2}; \frac{5}{2}\right)$

2. Os lados de um triângulo estão contidos nas retas de equações $2x - y = 0$, $x - y + 1 = 0$ e $x + y + 3 = 0$. Determine a área do triângulo.

Solução

Fazemos uma figura esquemática:



r) $2x - y = 0$
s) $x - y + 1 = 0$
t) $x + y + 3 = 0$

O vértice A do triângulo é a intersecção das retas r e s (veja a figura). Suas coordenadas devem, então, satisfazer ao sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{resolvendo, temos: } x = 1;\ y = 2$$

O par (1; 2), solução do sistema, representa as coordenadas do ponto A. Logo, temos: $\boxed{A(1; 2)}$

O vértice B é a intersecção das retas r e t.

Portanto: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ resolvendo, temos: $x = -1$; $y = -2$

Então, o par $(-1; -2)$, solução do sistema, representa o ponto B, intersecção das retas r e t. Logo, $\boxed{B(-1; -2)}$

Finalmente, C é a intersecção das retas s e t; então:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{resolvendo, temos: } x = -2;\ y = -1$$

Portanto, o ponto C, intersecção de s e t é: $\boxed{C(-2; -1)}$

Finalmente, a área S do triângulo ABC calcula-se por:

$$S = \frac{1}{2} \text{ mod} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{ mod} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo este determinante, temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \text{mod}(-2 - 4 + 1 - 4 + 1 + 2) = \frac{1}{2} \cdot \text{mod}(-6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S = 3}$$

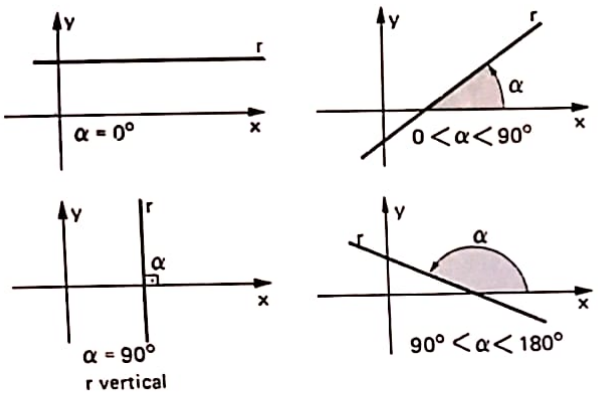
Coeficiente angular de uma reta

Vamos definir, em primeiro lugar, o que se entende por inclinação de uma reta para que, depois, possamos definir coeficiente angular.

Scanned by CamScanner

Inclinação

Inclinação de uma reta *r* é o ângulo α determinado pelo semi-eixo positivo dos *x* e a reta *r*, medido no sentido anti-horário. Veja os exemplos nas figuras seguintes:



Coeficiente angular

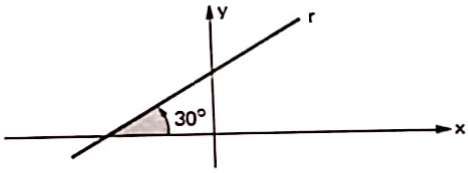
Coeficiente angular ou declividade de uma reta *r* não vertical é, por definição, a tangente do seu ângulo de inclinação α. Costuma-se indicar o coeficiente angular pela letra *m*. Temos, então:

$$\boxed{m = tg\alpha}$$

Observe que não se define coeficiente angular de retas verticais, isto é, retas paralelas ao eixo dos *y*. Isto é facilmente compreendido se lembrarmos que também não se define tangente do ângulo de 90°.

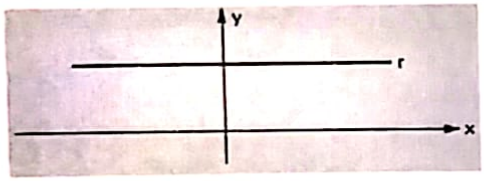
Exemplos

1.



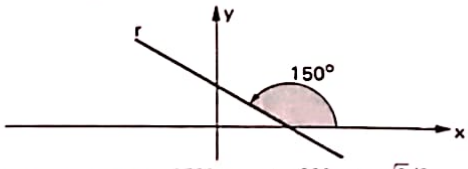
$\alpha = 30° \Rightarrow m = tg\alpha = tg\ 30° = \sqrt{3}/3;$

2.



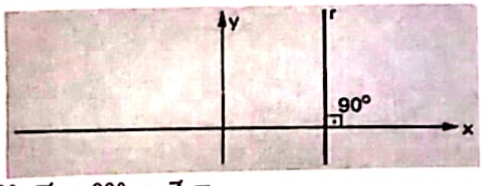
$\alpha = 0° \Rightarrow m = tg\alpha = tg\ 0° = 0;$

3.



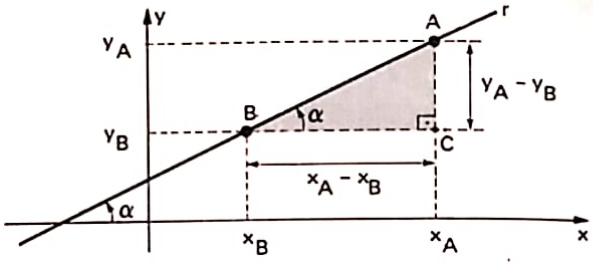
$\alpha = 150° \Rightarrow m = tg\alpha = tg\ 150° = -\ tg\ 30° = -\sqrt{3}/3:$

4.



$\alpha = 90°;\ \nexists\ tg\ 90° \Rightarrow \nexists\ m.$

Vejamos, agora, como calcular o coeficiente angular de uma reta conhecendo-se dois de seus pontos:



Na figura anterior, temos dois pontos distintos da reta *r*: A (x_A; y_A) e B (x_B; y_B). Estamos sempre supondo $x_A \neq x_B$, ou seja, que a reta *r* não é vertical.

No triângulo ABC, retângulo em C, temos:

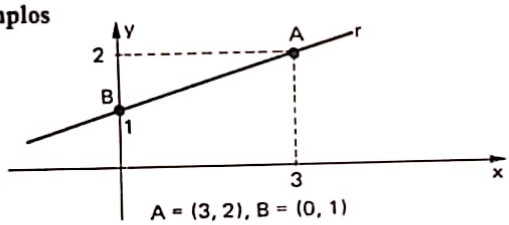
$$tg\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Então, como $tg\alpha = m$, obtemos:

$$\boxed{m = tg\alpha = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

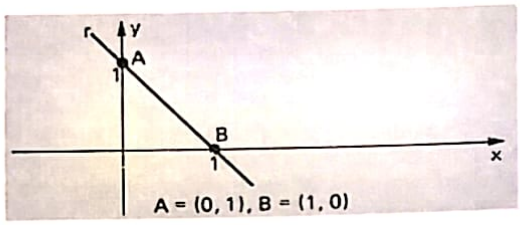
Exemplos

1.



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 - 1}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

2.



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1$$

EXERCÍCIOS

1. A reta *r* passa pelos pontos A (1; 3) e B (5; 7). Determine seu coeficiente angular e sua inclinação.

Solução

Chamando o coeficiente angular de *m*, temos:

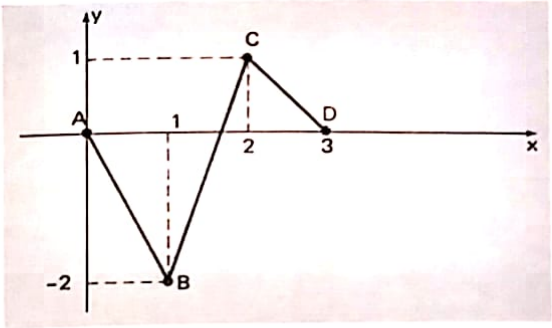
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3 - 7}{1 - 5} = \frac{-4}{-4} = 1 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

A inclinação α da reta *r* é, por definição, o ângulo cuja tangente é o coeficiente angular *m*. Portanto, temos:

$$m = tg\alpha \Rightarrow 1 = tg\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 45°}$$

Scanned by CamScanner

2. Na figura seguinte, determine os coeficientes angulares das retas que contêm os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$:



Solução

Temos: A (0; 0), B (1; −2), C (2; 1) e D (3; 0); então, como $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, temos:

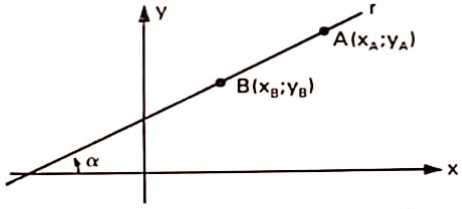
$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0-(-2)}{0-1} = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow \boxed{m_{AB} = -2}$$

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-2-1}{1-2} = \frac{-3}{-1} = 3 \Rightarrow \boxed{m_{BC} = 3}$$

$$m_{CD} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{1-0}{2-3} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \boxed{m_{CD} = -1}$$

Equação reduzida da reta

Já sabemos construir a equação geral de uma reta a partir de dois pontos distintos, A e B, desta reta:



Obtemos a equação através do determinante formado com as coordenadas dos pontos A e B da reta.

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{a \cdot x + b \cdot y + c = 0}$$

Também já sabemos calcular o coeficiente angular da reta *r* determinada pelos pontos A e B:

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}}$$

Vamos agora relacionar os coeficientes *a* e *b* da equação geral da reta com o coeficiente angular *m* da mesma reta. Para conseguir isto, precisamos lembrar como foram definidos os coeficientes *a* e *b*:

$$a = y_A - y_B \qquad \text{e} \qquad b = x_B - x_A$$

Substituindo estes resultados na expressão do coeficiente angular *m*, temos:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}; \text{ portanto, } \boxed{m = -\frac{a}{b}}$$

Exemplos

1. Na reta de equação $2x + 3y - 7 = 0$, temos:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{3}$$

2. na reta de equação $3x - y + 5 = 0$, o coeficiente angular *m* é: $m = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{-1} = 3$, pois $a = 3$ e $b = -1$;

3. na reta de equação $2y + 3 = 0$, o coeficiente angular *m* é: $m = -\frac{a}{b} = -\frac{0}{2} = 0$, pois $a = 0$ e $b = 2$.

Vamos, agora, transformar a equação geral da reta de modo que o coeficiente angular *m* da reta seja um dos componentes desta nova equação. Conseguimos isto "isolando o *y*" na equação geral:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \Rightarrow b \cdot y = -a \cdot x - c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-a \cdot x - c}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{\frac{-a}{b}}_{m} \cdot x + \underbrace{\frac{-c}{b}}_{n} \Rightarrow \boxed{y = m \cdot x + n}$$

Nesta última equação, chamada de **equação reduzida da reta**, temos: $\begin{cases} m = \text{coeficiente angular e} \\ n = \text{coeficiente linear} \end{cases}$

> **OBSERVAÇÃO** A equação reduzida só é possível para as retas não-verticais, pois somente elas têm coeficiente angular.

Exemplos

Vamos obter a equação reduzida, o coeficiente angular *m* e o coeficiente linear *n* das seguintes retas:

1. Reta *r*, de equação $2x + 3y + 5 = 0$:

$$2x + 3y + 5 = 0 \Rightarrow 3y = -2x - 5 \Rightarrow y = \frac{-2x - 5}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{-2x}{3} + \frac{-5}{3}} \Rightarrow \begin{cases} m = -2/3 \\ n = -5/3 \end{cases}$$

(eq. reduzida)

2. Reta *s* de equação $3x + y - 4 = 0$:

$$3x + y - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -3x + 4} \Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = 4 \end{cases}$$

(eq. reduzida)

3. Reta *t*, de equação $3y + 6 = 0$:

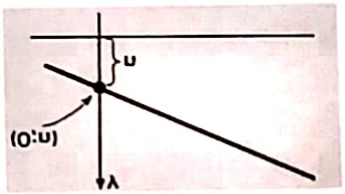
$$3y + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -2} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = -2 \end{cases}$$

(eq. reduz.)

4. Reta *u*, de equação $x - 4 = 0$; esta reta não tem equação reduzida pois ela é paralela ao eixo de ordenadas. Logo, também não tem coeficientes angular e linear.

■ Coeficiente linear

O coeficiente linear *n*, que surgiu na equação reduzida, tem um significado geométrico: ele representa a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo y.



De fato, se a equação da reta *r* é $y = m \cdot x + n$, então todos os seus pontos têm coordenadas (x; y) que satisfazem esta equação. Portanto, como o ponto em que a reta *r* corta o eixo *y* é um ponto de abscissa $x = 0$, temos:

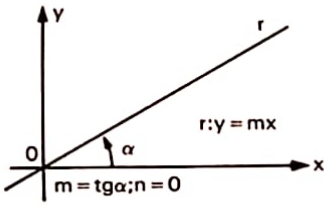
$$\begin{cases} x = 0 \text{ e} \\ y = mx + n \end{cases} \Rightarrow y = m \cdot 0 + n \Rightarrow y = n$$

Scanned by CamScanner

Esta última igualdade ($y = n$) significa que no ponto da reta em que $x = 0$ a ordenada y é igual a n.

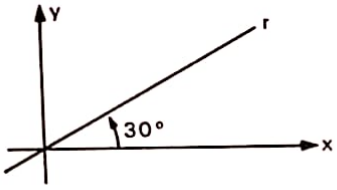
Concluindo, temos: o número n, da equação $y = m \cdot x + n$, é tal que:

- se n é positivo, a reta corta o eixo dos y acima da origem;
- se n é negativo, a reta corta o eixo dos y abaixo da origem;
- se $n = 0$, a reta passa pela origem (0; 0) do sistema; neste caso a equação $y = m \cdot x + n$ se reduz à forma: $y = m \cdot x$



Exemplos

1.

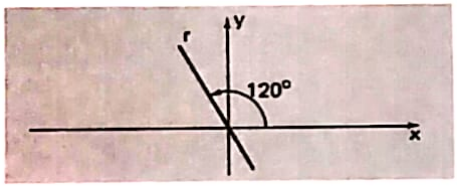


Para a reta r, temos:

$$\begin{cases} \alpha = 30° \Rightarrow m = tg\alpha = tg\ 30° = \sqrt{3}/3; \\ n = 0 \text{ (a reta r corta o eixo y na origem).} \end{cases}$$

Logo, a equação reduzida $y = mx + n$, para a reta r, passa a ser escrita como: $\boxed{y = \sqrt{3}/3 \cdot x}$.

2.



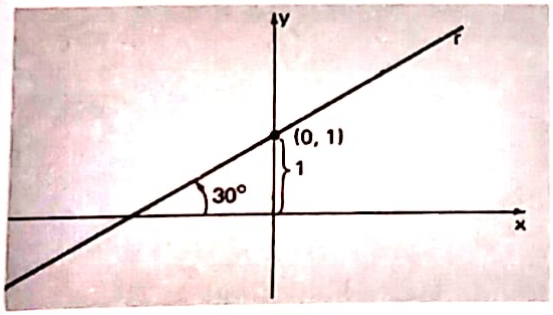
Temos:

$$\begin{cases} \alpha = 120° \Rightarrow m = tg\alpha = tg\ 120° = -tg\ 60° = -\sqrt{3}; \\ n = 0 \text{ (a reta passa pela origem).} \end{cases}$$

Logo, a equação reduzida $y = mx + n$ passa a ser:

$\boxed{y = -\sqrt{3} \cdot x}$.

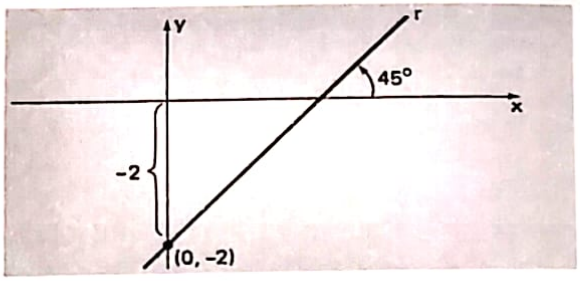
3.



Temos: $\begin{cases} m = tg\ 30° = \sqrt{3}/3 \\ n = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow y = mx + n \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{3}/3 \cdot x + 1}$.

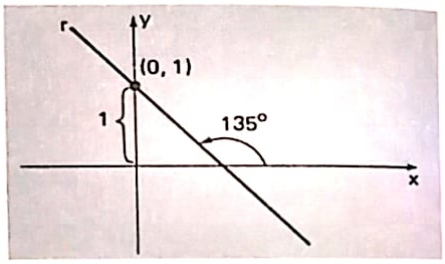
4.



Temos: $\begin{cases} m = tg\ 45° = 1 \\ n = -2 \end{cases} \Rightarrow y = mx + n \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 1 \cdot x - 2 \Rightarrow \boxed{y = x - 2}$.

5.



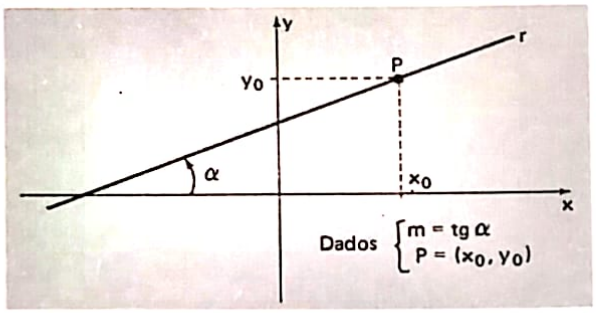
Temos:

$$\begin{cases} m = tg\ 135° = -tg\ 45° = -1 \\ n = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = mx + n \Rightarrow \boxed{y = -x + 1}$.

■ Equação da reta, dado um ponto e o coeficiente angular

Quando temos dois pontos conhecidos em uma reta, obtemos sua equação usando o determinante construído com as coordenadas dos dois pontos. Agora veremos como é possível obter uma equação quando se conhece apenas um ponto da reta e o seu coeficiente angular. Acompanhe:



Admitamos que (x; y) sejam as coordenadas de um ponto qualquer pertencente à reta. Pela definição de coeficiente angular, podemos escrever que:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow m \cdot (x - x_0) = y - y_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y - y_0 = m \cdot (x - x_0)}$$

Exemplos

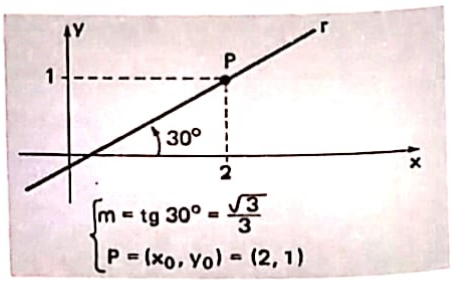
1. A equação da reta r da figura pode ser obtida escrevendo:

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \Rightarrow$

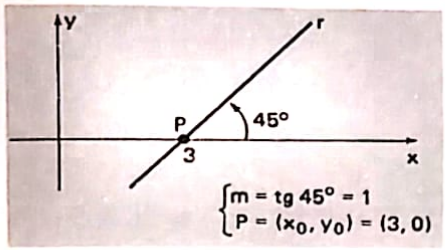
$\Rightarrow y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y - 3 = \sqrt{3} \cdot x - 2\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{3y - \sqrt{3} \cdot x - 3 + 2\sqrt{3} = 0}$



Scanned by CamScanner



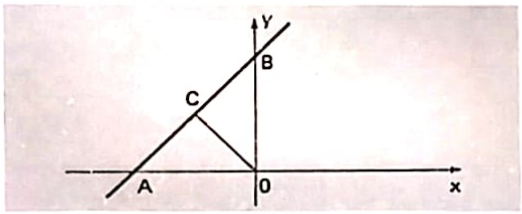
2. Obtemos a equação da reta *r*, escrevendo:

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow y - 0 = 1 \cdot (x - 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow y = x - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x - y - 3 = 0}$

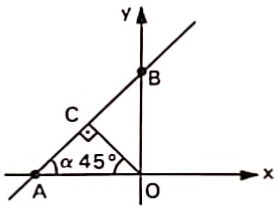
EXERCÍCIOS

1. (FUVEST-SP) Na figura abaixo, o ângulo $O\hat{C}A$ mede 90°, o ângulo $C\hat{O}A$ mede 45° e o segmento $\overline{OC}$ mede $\sqrt{2}$; determine a equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$.



Solução

Vamos calcular o coeficiente angular m da reta $\overleftrightarrow{AB}$ e o ponto A; a seguir, escrever a equação de $\overleftrightarrow{AB}$ usando a fórmula $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.



O coeficiente angular m é, por definição, tg α, onde α é o ângulo $C\hat{A}O$ da figura ao lado.

No triângulo ACO, temos: $A\hat{C}O = 90°$, $C\hat{O}A = 45°$; conclui-se, portanto, que $\alpha = 45°$ e, conseqüentemente, $m = \text{tg } 45° = 1$.

Agora vamos determinar o ponto A. Para isto, usamos novamente o triângulo ACO, no qual conhecemos o cateto $CO = \sqrt{2}$. Usando o seno de α, temos:

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } 45° = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{CO}{AO} = \frac{\sqrt{2}}{AO};$$

como $\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos:

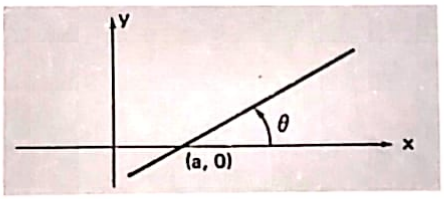
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{AO} \Rightarrow \boxed{AO = 2}.$$

Como AO = 2 e A está no lado negativo do eixo, concluímos que a abscissa de A é $x_A = -2$.

Agora aplicamos a fórmula: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$, usando: m = 1 e $(x_0; y_0) = (-2; 0)$, que são as coordenadas de A. Temos então:

$$y - 0 = 1 \cdot (x - (-2)) \Rightarrow \boxed{y = x + 2}.$$

2. (CESGRANRIO-RJ) Uma equação que representa a reta da figura é:



a) $y \text{ sen}\theta + x \cos\theta + a \text{ sen}\theta = 0$
b) $y \cos\theta + x \text{ sen}\theta + a \text{ sen}\theta = 0$
c) $y \cos\theta - x \text{ sen}\theta + a \text{ sen}\theta = 0$
d) $y \text{sen } \theta - x \cos\theta + a \text{ sen}\theta = 0$
e) $y - x \text{ cotg}\theta + a \text{ cotg}\theta = 0$

Solução

Na reta *r* da figura dada, conhecemos um ponto, que é o ponto de coordenadas (a; 0), e a inclinação θ. Podemos, então, escrever a equação da reta pela fórmula:

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$, onde: $\begin{cases} m = \text{tg}\theta \text{ e} \\ (x_0; y_0) = (a; 0); \end{cases}$

temos, então: $y - 0 = \text{tg}\theta \cdot (x - a) \Rightarrow y = \text{tg}\theta \cdot (x - a)$.

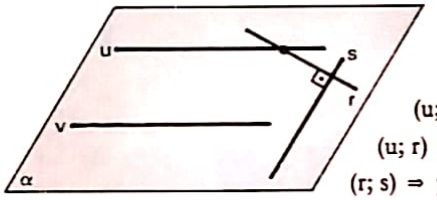
Nesta última expressão, substituímos tgθ por $\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$,

obtendo: $y = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \cdot (x - a) \Rightarrow y \cdot \cos\theta = \text{sen}\,\theta \cdot (x - a) \Rightarrow$
$\Rightarrow y \cdot \cos\theta = x \cdot \text{sen}\,\theta - a \cdot \text{sen}\,\theta \Rightarrow$
$\Rightarrow y \cdot \cos\theta - x \cdot \text{sen}\theta + a \cdot \text{sen}\theta = 0.$

Esta expressão final corresponde à alternativa **d**.

Posições relativas de duas retas

Duas retas distintas de um plano podem ser:
- **paralelas**, quando não têm ponto comum;
- **concorrentes**, quando têm um único ponto comum. Retas concorrentes serão **perpendiculares**, quando formarem entre si um ângulo reto.



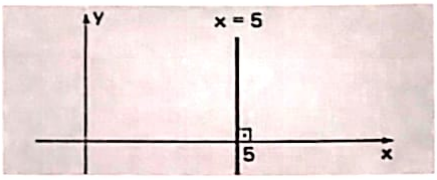
(u; v) ⇒ paralelas
(u; r) ⇒ concorrentes
(r; s) ⇒ perpendiculares

■ Retas paralelas

Neste capítulo vamos aprender a reconhecer se duas retas são paralelas ou concorrentes, analisando exclusivamente suas equações. Faremos isto separando as retas em verticais e não-verticais.

Retas verticais

São facilmente reconhecíveis pois suas equações são do tipo: **x = constante**. Veja, por exemplo, a reta de equação $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$. Nesta reta, todos os pontos têm abscissa x = 5 e, por isso, ela é paralela ao eixo de ordenadas. Veja seu gráfico:



Qualquer outra reta que tenha uma equação do tipo x = constante também é vertical e, portanto, paralela à primeira reta considerada. Por exclusão, qualquer reta não-vertical é concorrente com uma reta vertical.

Exemplos

1. As retas *r* e *s*, de equações:

$$\begin{cases} r: 2x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -7/2 \\ s: 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \end{cases}$$

são paralelas entre si pois ambas são retas verticais (têm equações do tipo x = constante).

Scanned by CamScanner

2. As retas u e v, de equações:

$$\begin{cases} u: 5x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8/5 \\ v: 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

não são paralelas pois a reta u é vertical, e a reta v, não.

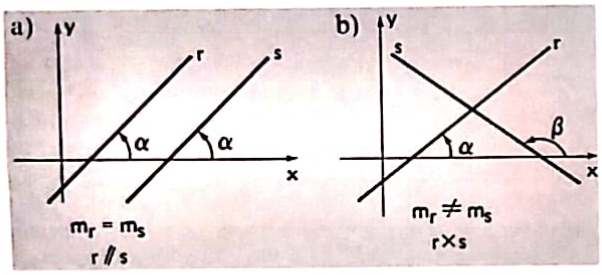
Retas não-verticais

Sendo r e s duas retas não verticais, de equações:

$$\begin{cases} r: y = m_r \cdot x + n_r \\ s: y = m_s \cdot x + n_s \end{cases}$$

podemos afirmar que:

- se os coeficientes angulares m_r e m_s são iguais, as retas r e s são paralelas entre si, pois formam com o eixo x o mesmo ângulo de inclinação α (veja o caso a, na figura).
- se os coeficientes angulares m_r e m_s são diferentes, as retas r e s são concorrentes. Elas formam com o eixo x ângulos de inclinação diferentes (veja o caso b, na figura).



Exemplos

1. as retas r e s, de equações:

$$\begin{cases} r: y = 2x - 3 \\ s: y = 2x + 5 \end{cases} \Rightarrow m_r = m_s = 2$$

são paralelas, pois os coeficientes angulares são iguais.

2. As retas u e v, de equações:

$$\begin{cases} u: y = x - 1 \\ v: y = 3x + 2 \end{cases} \Rightarrow m_u = 1;\ m_v = 3$$

são concorrentes, pois os coeficientes angulares são diferentes.

3. as retas de equações:

$$\begin{cases} p: 3x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -3x + 1 \Rightarrow m_p = -3 \\ q: 6x + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = -3x - \dfrac{5}{2} \Rightarrow m_q = -3 \end{cases}$$

são paralelas entre si.

EXERCÍCIOS

1. Determine a constante k de modo que as retas r e s, de equações $3x + 2y - 1 = 0$ e $kx - 4y + 5 = 0$, respectivamente, sejam paralelas.

Solução

Temos:

$$\begin{cases} r: 3x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow m_r = -\dfrac{a}{b} = -\dfrac{3}{2} \\ s: kx - 4y + 5 = 0 \Rightarrow m_s = -\dfrac{a}{b} = -\dfrac{k}{-4} = \dfrac{k}{4} \end{cases}$$

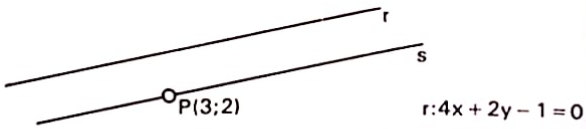
Para que r e s sejam paralelas, seus coeficientes angulares devem ser iguais e, portanto,

$$m_r = m_s \Rightarrow -\frac{3}{2} = \frac{k}{4} \Rightarrow 2k = -12 \Rightarrow \boxed{k = -6}.$$

2. Consideremos a reta r, de equação $4x + 2y - 1 = 0$, e o ponto P, de coordenadas (3; 2). Determinar a equação da reta s, paralela à reta r, passando pelo ponto P.

Solução

Temos o seguinte esquema:



Inicialmente, calculamos o coeficiente angular m_r:

$$r: 4x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{4}{2} = -2$$

Como s é paralela à r, temos: $m_s = m_r$. Portanto, $m_s = -2$. Temos, agora, a seguinte situação: a reta s tem coeficiente angular $m_s = -2$ e passa pelo ponto P(3; 2). Nestas condições, já sabemos que a equação de s pode ser escrita na forma:

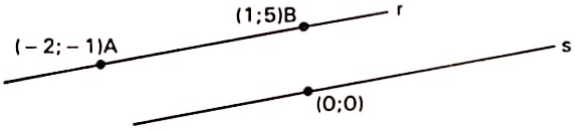
$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -2 \cdot (x - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2 = -2 \cdot x + 6 \Rightarrow \boxed{s: 2x + y - 8 = 0}$$

3. Determinar a equação da reta que passa pela origem do sistema de coordenadas e é paralela à reta determinada pelos pontos A e B. Dados: A(−2; −1) e B(1; 5).

Solução

Começamos fazendo um esquema que represente o enunciado do problema:



A reta s, paralela à reta r determinada pelos pontos A e B, tem coeficiente angular m_s igual ao coeficiente angular m_r. O valor de m_r pode ser determinado lembrando que

$$m_r = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1-5}{-2-1} = \frac{-6}{-3} = 2 \Rightarrow \boxed{m_r = 2}.$$

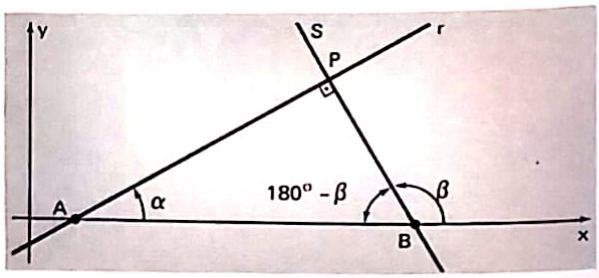
Como $m_s = m_r$ (retas paralelas têm coeficientes angulares iguais), concluímos que $m_s = 2$.

Agora, já podemos escrever a equação de s, usando a fórmula: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$, onde $(x_0; y_0) = (0; 0)$ e $m = 2$; temos, então:

$$s: y - 0 = 2 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = 2 \cdot x \Rightarrow \boxed{2x - y = 0}.$$

■ Retas perpendiculares

Suponhamos que as retas r e s, de equações $y = m_r \cdot x + n_r$ e $y = m_s \cdot x + n_s$ respectivamente, sejam perpendiculares, como mostra a figura seguinte:



Sendo α e β as respectivas inclinações de r e s, temos que: $m_r = \text{tg}\alpha$ e $m_s = \text{tg}\beta$. Observando o triângulo APB, con-

Scanned by CamScanner

cluímos que: $\alpha + 180° - \beta + 90° = 180°$ e, portanto, $\beta = 90° + \alpha$.

Sendo $\beta = 90° + \alpha$, temos também que:

$$\boxed{tg\beta = tg(90° + \alpha)}. \quad (I)$$

Calculamos, inicialmente, $tg(90° + \alpha)$:

$$tg(90° + \alpha) = \frac{sen(90° + \alpha)}{cos(90° + \alpha)} =$$

$$= \frac{sen90° \cdot cos\alpha + sen\alpha \cdot cos90°}{cos90° \cdot cos\alpha - sen90° \cdot sen\alpha}$$

Como $sen90° = 1$ e $cos90° = 0$, passamos a ter:

$$tg(90° + \alpha) = \frac{1 \cdot cos\,\alpha + sen\,\alpha \cdot 0}{0 \cdot cos\,\alpha - 1 \cdot sen\,\alpha} = \frac{cos\,\alpha}{-sen\,\alpha} = -\frac{1}{tg\alpha}$$

Voltando à expressão (I), temos: $tg\beta = -\frac{1}{tg\alpha}$ e, portanto, concluímos que:

$$\boxed{m_s = -\frac{1}{m_r}}$$

Este resultado nos diz que, para obter o coeficiente angular m_s de uma reta *s* perpendicular a uma reta *r*, de coeficiente angular m_r, devemos **inverter o valor de m_r e trocar o seu sinal**. Guarde este resultado, pois ele é fundamental. É a **condição de perpendicularismo** de duas retas **não paralelas** aos eixos coordenados.

Exemplos

1. Sendo *r* e *s* duas retas perpendiculares de coeficientes angulares m_r e m_s, respectivamente, temos:

a) se $m_r = 3$; então $m_s = -1/3$;
b) se $m_r = 2/5$; então $m_s = -5/2$;
c) se $m_r = -1/4$; então $m_s = 4$;
d) se $m_r = -1$; então $m_s = 1$.

2. As retas *r* e *s*, de equações $y = 2x + 3$ e $y = -\frac{1}{2} \cdot x + 5$, são perpendiculares pois $m_r = 2$ e $m_s = -1/2$ e, portanto, $m_s = -\frac{1}{m_r}$.

3. As retas *r* e *s*, de equações $4x - 5y + 3 = 0$ e $5x + 4y + 1 = 0$, são perpendiculares. Veja por que:

$$m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{4}{-5} = \frac{4}{5} \text{ e } m_s = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{4}$$

Logo, $m_s = -\frac{1}{m_r}$ e, portanto, *r* e *s* são perpendiculares.

EXERCÍCIOS

1. Determine k de modo que as retas $kx - 2y = 0$ e $(2k-1)x + 3y - 2 = 0$ sejam perpendiculares.

Solução

Os coeficientes angulares das retas dadas são:

$$\begin{cases} r: kx - 2y = 0 \Rightarrow m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{k}{-2} = \frac{k}{2} \\ s: (2k-1)x + 3y - 2 = 0 \Rightarrow m_s = -\frac{a}{b} = -\frac{2k-1}{3} \end{cases}$$

Para que as retas *r* e *s* sejam perpendiculares, devemos ter:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow m_s \cdot m_r = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{2k-1}{3}\right) \cdot \left(\frac{k}{2}\right) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2k^2 - k}{6} = 1 \Rightarrow 2k^2 - k - 6 = 0;$$

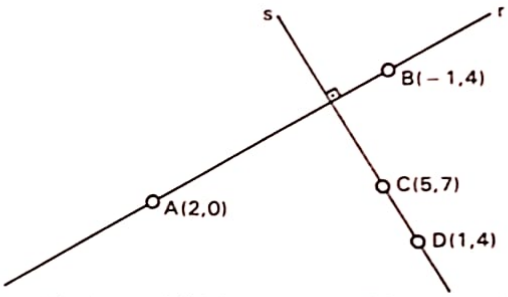
resolvendo esta última equação, obtemos:

$$\boxed{k = 2 \quad \text{ou} \quad k = -3/2}$$

2. Seja *r* a reta determinada pelos pontos A(2; 0) e B(−1; 4) e *s* a reta determinada pelos pontos C(5; 7) e D(1; 4), mostre que as retas *r* e *s* são perpendiculares.

Solução

Temos a seguinte situação esquemática:



Calculamos, inicialmente, os coeficientes angulares m_r e m_s:

$$\begin{cases} m_r = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0 - 4}{2 - (-1)} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3} \\ m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{7 - 4}{5 - 1} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

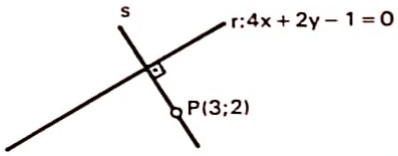
Sendo, então, $m_r = -\frac{4}{3}$ e $m_s = \frac{3}{4}$, temos:

$m_r \cdot m_s = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = -1$ e, sendo $m_r \cdot m_s = -1$, concluímos que *r* e *s* são perpendiculares, pois seus coeficientes angulares verificam a relação de perpendicularismo.

3. Consideremos a reta *r*, de equação $4x + 2y - 1 = 0$, e o ponto P(3; 2). Determinar a equação da reta *s*, perpendicular à reta *r*, passando pelo ponto P.

Solução

Temos a situação-esquema ao lado.



Inicialmente calculamos o coeficiente angular m_r:

$$r: 4x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{4}{2} = -2 \Rightarrow m_r = -2$$

Sendo *s* perpendicular a *r*, temos:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow \boxed{m_s = \frac{1}{2}}.$$

Temos, agora, a seguinte situação: sabemos que a reta *s* passa pelo ponto P(3; 2) e tem coeficiente angular 1/2; com estes dados, sabemos escrever a equação de *s*:

$$s: y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2} \cdot (x - 3) \Rightarrow 2y - 4 = x - 3 \Rightarrow$$

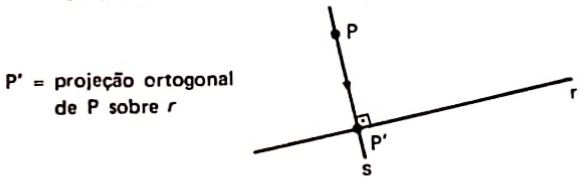
$$\Rightarrow \boxed{s: x - 2y + 1 = 0}.$$

Scanned by CamScanner

4. Consideremos a reta r, de equação $2x - 3y + 14 = 0$ e o ponto $P(3; -2)$; determinemos:
a) a projeção ortogonal de P sobre r;
b) a distância de P à reta r;
c) o ponto simétrico de P em relação à reta r.

Solução

a) Chama-se **projeção ortogonal** de um ponto P sobre uma reta r o ponto de intersecção de r com a reta que passa por P e é perpendicular a r, como na figura seguinte:



O roteiro para a resolução do problema é o seguinte:
1) obter a reta s, passando por P e perpendicular a r (situação idêntica à do problema anterior);
2) obter o ponto P', intersecção de r com s.

Vamos aos cálculos:

• $m_r = -\dfrac{a}{b} = -\dfrac{2}{-3} = \dfrac{2}{3}$; $s \perp r \Rightarrow m_s = -\dfrac{1}{m_r} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{m_s = -\dfrac{3}{2}}$

Como $P(3; -2)$ pertence à s e $m_s = -3/2$, a equação de s é:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - (-2) = -\frac{3}{2} \cdot (x - 3) \Rightarrow$$

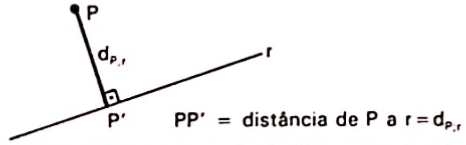
$$\Rightarrow 2y + 4 = -3x + 9 \Rightarrow \boxed{3x + 2y - 5 = 0}$$

• o ponto $P'(x; y)$, intersecção das retas r e s, deve satisfazer as equações de r e s, ou seja, deve satisfazer o sistema:

$$\begin{cases} r: 2x - 3y + 14 = 0 \\ s: 3x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $x = -1$ e $y = 4$; logo, o ponto P', projeção ortogonal de P sobre r, é: $\boxed{P'(-1; 4)}$.

b) Chama-se **distância do ponto P à reta r** ao comprimento do segmento de reta perpendicular a r passando por P, como na figura seguinte:

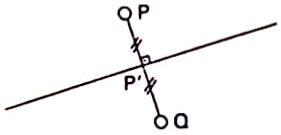


Chamando de d a distância de P à r e sendo $P(3; -2)$ e $P'(-1; 4)$, temos:

$$d = d_{P;r} = d_{PP'} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (-2 - 4)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} \Rightarrow \boxed{d = 2\sqrt{13}}$$

c) Chama-se **simétrico do ponto P em relação à reta r** ao ponto Q, de modo que a reta r seja a mediatriz do segmento $\overline{PQ}$, isto é, de modo que a reta r passe pelo ponto médio do segmento $\overline{PQ}$ e seja perpendicular ao segmento $\overline{PQ}$:



No caso particular em que o ponto P pertence à reta r, o ponto simétrico dele em relação a r é ele mesmo.

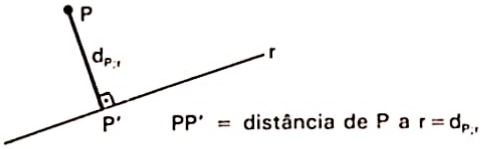
Vamos, agora, ao cálculo do ponto Q, simétrico de P em relação a r. Temos:

$P(3; -2)$, $P'(-1; 4)$, $Q(x; y)$ e P' é o ponto médio de $\overline{PQ}$; logo:

$$\begin{cases} x_{P'} = \dfrac{x_P + x_Q}{2} \Rightarrow -1 = \dfrac{3 + x}{2} \Rightarrow x = -5 \\ y_{P'} = \dfrac{y_P + y_Q}{2} \Rightarrow 4 = \dfrac{-2 + y}{2} \Rightarrow y = 10 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(-5; 10)}$$

Distância de ponto a reta

Conforme vimos no exercício anterior, distância de um ponto P a uma reta r é, por definição, o comprimento do segmento de reta perpendicular a r passando por P, como na figura seguinte:



Dada uma reta r, de equação $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, e um ponto P, de coordenadas $(x_0; y_0)$, a distância de P a r pode ser calculada:
• efetuando todos os cálculos realizados no exercício anterior, itens a e b; **ou**
• aplicando a fórmula:

$$\boxed{d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

A fórmula acima nos diz algo bem simples: para calcular a distância do ponto P à reta r, basta substituir as coordenadas de P no primeiro membro da equação geral de r, tomando o resultado em valor absoluto, e dividir por $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemplos

1. A distância do ponto $P(2; -6)$ à reta r, de equação $3x + 4y - 12 = 0$, vale:

$$d_{P;r} = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-6) - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 - 24 - 12|}{\sqrt{25}} =$$

$$= \frac{|-30|}{5} = 6$$

2. A distância do ponto $P(0; 1)$ à reta $3x - 2y = 0$ vale:

$$d_{P;r} = \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

3. A distância do ponto $P(3; -2)$ à reta r, de equação $2x - 3y + 14 = 0$, vale:

$$d_{P;r} = \frac{|2 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) + 14|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|6 + 6 + 14|}{\sqrt{4 + 9}} =$$

$$= \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}$$

Este último resultado, obtido pela fórmula da distância de ponto à reta, confirma o resultado obtido no item b do exercício 4 (pág. 42).

EXERCÍCIOS

1. Calcular a distância do ponto P à reta r, em cada caso seguinte:

Scanned by CamScanner

a) P(0; 0) e r: $3x + 2y = 1$;
b) P(1; 2) e r: $y = 3x$;
c) P(1; 3) e r: $x + y - 4 = 0$;
d) P(2; 5) e r: $x = 1$.

Solução

a) Inicialmente, obtemos a equação geral de r:

r: $3x + 2y = 1 \Rightarrow 3x + 2y - 1 = 0$; sendo P(0; 0), temos:

$$d_{P;\,r} = \frac{|3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

b) Obtemos a equação geral de r: $y = 3x \Rightarrow 3x - y = 0$; sendo P(1; 2), temos:

$$d_{P;\,r} = \frac{|3 \cdot 1 - 1 \cdot 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

c) sendo r: $x + y - 4 = 0$ e P(1; 3), temos:

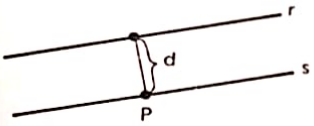
$$d_{P;\,r} = \frac{1 + 3 - 4}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0;$$ deste resultado conclui-se que o ponto P (1; 3) pertence à reta r: $y = 3x$.

d) A equação geral da reta $x = 1$ é $x - 1 = 0$; com P(2; 5), temos: $d_{P;\,r} = \dfrac{|1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1$

2. Calcular a distância entre as retas paralelas de equações r: $4x + 3y + 17 = 0$ e s: $4x + 3y + 2 = 0$.

Solução

Temos a situação esquemática ao lado.



Calculamos a distância entre as retas paralelas r e s, tomando um ponto P pertencente a uma delas (por exemplo, à reta s) e calculando a distância deste ponto P escolhido até à outra reta.

Para escolher um ponto P pertencente à reta s, adotamos um valor qualquer para a abscissa x e, a seguir, usando a equação da reta s, calculamos o valor de y correspondente; veja:

adotando $x = 1$, substituindo em s: $4x + 3y + 2 = 0$, temos: $x = 1 \Rightarrow 4 \cdot 1 + 3y + 2 = 0 \Rightarrow 3y + 6 = 0 \Rightarrow y = -2$; portanto, temos o ponto escolhido P(1; −2).

Agora, calculamos a distância do ponto P(1; −2) à reta r de equação $4x + 3y + 17 = 0$, usando a fórmula:

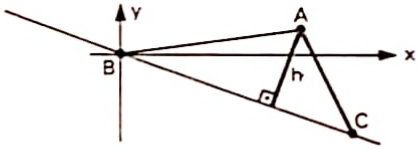
$$d_{P;\,r} = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 17|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|4 - 6 + 17|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3.$$

Portanto, se a distância do ponto P à reta r é 3, a distância entre as retas paralelas r e s também é 3 pois o ponto P pertence à reta s.

3. A altura relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC é h; sendo A(8; 1), B(0; 0) e C(12; −5), calcule a medida de h.

Solução

Fazemos uma representação gráfica do enunciado do problema:



Percebemos, pela figura, que a altura h é a distância do ponto A à reta determinada pelos pontos B e C. Para calcular esta distância, precisamos da equação geral da reta $\overleftrightarrow{BC}$; isto nós obtemos usando o determinante:

$$\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 12 & -5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{5x + 12y = 0}$$

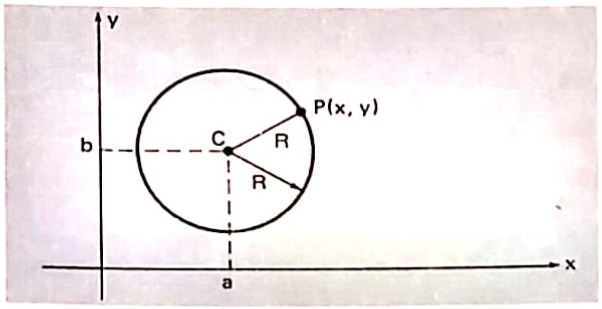
Agora podemos calcular a distância do ponto A(8; 1) à reta de equação $5x + 12y = 0$, usando a fórmula apropriada:

$$d = \frac{|5 \cdot 8 + 12 \cdot 1|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{40 + 12}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{52}{\sqrt{169}} = \frac{52}{13} = 4.$$

Sendo a distância do vértice A ao lado $\overline{BC}$ igual a 4, concluímos que a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ é, também, 4.

EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Consideremos uma circunferência de centro C(a; b) e raio R:



A circunferência é uma figura geométrica constituída de infinitos pontos, que têm a seguinte propriedade: a distância de qualquer ponto da circunferência até o centro C é sempre igual ao raio R. Se P(x; y) é qualquer um desses pontos, então a distância de P até C é igual a R e, então, usando a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

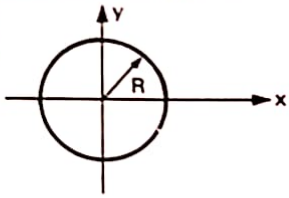
$$PC = R \Rightarrow d_{PC} = R \Rightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R.$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, temos:

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2}$$

Esta é a equação da circunferência de centro (a; b) e raio R.

Um caso muito particular de equação da circunferência é aquele em que o centro é o ponto (0; 0):



Scanned by CamScanner

Temos então:

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\\ C(0;0)\Rightarrow a=0 \text{ e } b=0\end{cases} \Rightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=R^2 \quad \boxed{x^2+y^2=R^2}$$

Exemplos

1. A equação da circunferência de centro (0; 0) e raio 5 é:

$$\begin{cases}C(0;0)\\ R=5\end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=5^2 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=25}$$

2. A equação da circunferência de centro (0, 0) e raio 1 é:

$$\begin{cases}C(0;0)\\ R=1\end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=1^2 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=1}$$

3. A equação da circunferência de centro C(1; 1) e raio 1 é:

$$\begin{cases}C(1;1)\\ R=1\end{cases} \begin{matrix}\Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=R^2\\ \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=1^2\end{matrix} \Rightarrow$$

Abrindo os parênteses, temos:

$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-2x-2y+1=0}.$$

4. A equação da circunferência de centro (– 2; 1) e raio 1/2 é:

$$\begin{cases}C(-2;1)\\ R=1/2\end{cases} \begin{matrix}\Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=R^2\\ \Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.\end{matrix}$$

Abrindo os parênteses, temos:

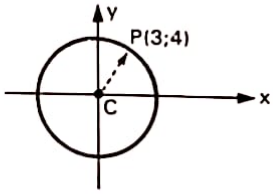
$$x^2+4x+4+y^2-2y+1=\frac{1}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x^2+16x+16+4y^2-8y+4=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{4x^2+4y^2+16x-8y+19=0}.$$

EXERCÍCIOS

1. Determinar a equação da circunferência de centro na origem dos eixos e que passa pelo ponto P(3; 4).

Solução

Inicialmente, determinamos o raio R lembrando que o raio é a distância do centro C até qualquer um dos pontos da circunferência. Como o único ponto conhecido da circunferência é o ponto P(3; 4), vamos calcular o raio usando a distância entre P e o centro C:



$$R=d_{PC} \Rightarrow R=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R=\sqrt{9+16}=\sqrt{25} \Rightarrow \boxed{R=5}.$$

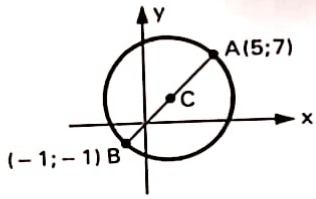
Agora já podemos escrever a equação da circunferência:

$$\begin{cases}C(0;0)\\ R=5\end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=5^2 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=25}.$$

2. Determinar a equação da circunferência na qual os pontos A(5; 7) e B(– 1; – 1) são as extremidades de um mesmo diâmetro.

Solução

Temos a seguinte situação:



Sendo $\overline{AB}$ um diâmetro, então o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é o centro da circunferência; as coordenadas do ponto médio se calculam pelas fórmulas:

$$\begin{cases}x_C=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{5+(-1)}{2}=\dfrac{4}{2}=2\\[2ex] y_C=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{7+(-1)}{2}=\dfrac{6}{2}=3\end{cases} \Rightarrow \boxed{C(2;3)}.$$

Agora calculamos o raio, usando a distância de C até o ponto A (ou até o ponto B):

$$\begin{cases}C(2;3)\\ A(5;7)\end{cases} \Rightarrow R=d_{CA}=\sqrt{(2-5)^2+(3-7)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R=\sqrt{9+16}=\sqrt{25} \Rightarrow \boxed{R=5}.$$

Escrevemos a equação da circunferência de centro C(2; 3) e raio R = 5: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=5^2$

Eliminando os parênteses e agrupando os termos semelhantes, obtemos: $x^2-4x+4+y^2-6y+9=25 \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-4x-6y-12=0}.$

Reconhecimento de uma equação de circunferência

Já sabemos escrever a equação de uma circunferência de centro (a; b) e raio R:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$$

Eliminando os parênteses e agrupando os termos semelhantes, temos: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=R^2$

$$\boxed{x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0} \quad \text{(I)}$$

Suponhamos, agora, a situação inversa: temos uma equação e queremos saber se ela representa ou não uma circunferência e, em caso afirmativo, determinar o centro e o raio.

Uma equação representará uma circunferência se ela for equivalente a uma equação do tipo da (I), e, nesse caso, *a* e *b* serão as coordenadas do centro C, e R será o raio se R for positivo. Acompanhe, com atenção, os seguintes exemplos:

1. $x^2+y^2-4x+12y+15=0.$

Comparemos a equação dada com a equação (I):

$$\begin{cases}x^2+y^2\boxed{-4}\cdot x\boxed{+12}\cdot y\boxed{+15}=0\\ x^2+y^2\boxed{-2a}\cdot x\boxed{-2b}\cdot y+\boxed{a^2+b^2-R^2}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\left.\begin{matrix}-2a=-4\Rightarrow a=2\\ -2b=12\Rightarrow b=-6\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{C(2;-6)}\\ a^2+b^2-R^2=15\Rightarrow 4+36-R^2=15\Rightarrow\\ \Rightarrow R^2=25\Rightarrow \boxed{R=5}.\end{cases}$$

Portanto, a equação dada representa a circunferência de centro C(a; b) = (2; – 6) e raio R = 5.

Scanned by CamScanner

2. $x^2 + 3y^2 + 6x + 4y - 20 = 0$.

Comparando com (I), concluímos que a equação dada não representa uma circunferência pois o coeficiente de y^2 é 3, enquanto que o de x^2 é 1, o que não ocorre em (I).

3. $4x^2 + 4y^2 - 8x + 6y - 1 = 0$.

Inicialmente, dividimos a equação dada por 4, obtendo: $x^2 + y^2 - 2x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{4} = 0$; agora, comparando com (I), temos:

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} -2a = -2 \Rightarrow a = 1 \\ -2b = \frac{3}{2} \Rightarrow b = -\frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow C\left(1; -\frac{3}{4}\right) \\ a^2 + b^2 - R^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} - R^2 = \\ = -\frac{1}{4} \Rightarrow R^2 = 1 + \frac{9}{16} + \frac{1}{4} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{29}{16} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\sqrt{29}}{4}}$$

Portanto, a equação dada representa a circunferência de centro $C\left(1; -\frac{3}{4}\right)$ e raio $R = \frac{\sqrt{29}}{4}$.

4. $x^2 + y^2 + 3xy - 2x + 4y - 3 = 0$.

Comparando com (I), concluímos que a equação dada não representa uma circunferência devido ao termo misto $3xy$ que não existem em (I).

5. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 20 = 0$.

Comparando com (I), temos:

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a = -2 \Rightarrow a = 1 \\ -2b = -6 \Rightarrow b = 3 \\ a^2 + b^2 - R^2 = 20 \Rightarrow 1 + 9 - R^2 = 20 \Rightarrow \\ \Rightarrow R^2 = -10 \Rightarrow \boxed{R \notin \mathbb{R}}. \end{cases}$$

Portanto, a equação dada não representa uma circunferência, já que seu "raio" não seria um número real.

Finalizando, podemos afirmar que uma equação do 2º grau em x e y representa uma circunferência quando:

- os coeficientes dos termos em x^2 e em y^2 são iguais e não nulos (iguais, inclusive em sinal). (Caso estes coeficientes não sejam iguais a 1 — como no exemplo **3** —, a primeira providência a ser tomada é dividir a equação inteira pelo coeficiente de x^2).
- não existir na equação o termo em xy. (Quando isto ocorrer, o coeficiente deste termo deverá ser, necessariamente nulo).
- com as providências anteriores, caímos numa equação do tipo da (I):

$$x^2 + y^2 - 2a \cdot x - 2b \cdot y + \underbrace{a^2 + b^2 - R^2}_{p} = 0$$

na qual o termo independente p é tal que:

$$p = a^2 + b^2 - R^2 \Leftrightarrow R^2 = a^2 + b^2 - p$$

onde, necessariamente, $a^2 + b^2 - p > 0$, pois o raio de uma circunferência é sempre um número positivo.

Repare que o centro C (a; b) pode ser facilmente obtido da equação (I) através da seguinte "regra":

$$(I) \Rightarrow x^2 + y^2 \underbrace{(-2a)}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot x \underbrace{(-2b)}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot y + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

$$\Rightarrow C(a; b)$$

EXERCÍCIOS

1. Determinar a equação da reta que passa pela origem do sistema de coordenadas e pelo centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 1 = 0$.

Solução

Inicialmente, calculamos o centro C(a; b) da circunferência dada, usando a "regra" dada anteriormente:

$$x^2 + y^2 \underbrace{(-4)}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot x \underbrace{(+8)}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot y - 1 = 0$$

$$a = 2;\ b = -4 \Rightarrow \boxed{C(2; -4)}.$$

Agora, podemos escrever a equação da reta pedida, lembrando que ela passa pelo ponto (0; 0) (conforme o enunciado) e pelo ponto C(2; −4); usamos o determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y + 4x = 0 \Rightarrow \boxed{y + 2x = 0}.$$

2. Calcular a área do círculo limitado pela circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$.

Solução

Lembrando que a área S de um círculo é calculada pela fórmula $S = \pi R^2$, onde R é o raio da circunferência que limita o círculo, percebemos que primeiramente precisamos do raio para, depois, calcularmos a área do círculo.

- cálculo do raio R

Usamos a "regra" dada anteriormente para calcular o centro: $x^2 + y^2 \underbrace{(+4)}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot x \underbrace{(-2)}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot y - 20 = 0$

$$a = -2;\ b = 1 \Rightarrow \boxed{C(-2; 1)}.$$

Como o termo independente −20 é formado por $a^2 + b^2 - R^2$, temos: $a^2 + b^2 - R^2 = -20 \Rightarrow 4 + 1 - R^2 = -20 \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow \boxed{R = 5}$.

- cálculo da área S

$S = \pi R^2$; $R = 5 \Rightarrow S = \pi \cdot 5^2 \Rightarrow \boxed{S = 25\pi}$.

3. Determine o maior valor inteiro de *m* para o qual a equação $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + m = 0$ representa uma circunferência.

Solução

A primeira providência a ser tomada é dividir a equação toda por 2 (coeficiente do x^2); temos:

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + m = 0$$

$$(\div 2) \Rightarrow x^2 + y^2 \underbrace{(-2)}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot x \underbrace{(+4)}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot y + \frac{m}{2} = 0$$

$$a = 1;\ b = -2 \Rightarrow \boxed{C(1; -2)}.$$

Lembrando que o termo independente é $a^2 + b^2 - R^2$ e que R^2 é sempre um número positivo, temos:

$$\frac{m}{2} = a^2 + b^2 - R^2 \Rightarrow \frac{m}{2} = 1^2 + (-2)^2 - R^2 \Rightarrow$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \frac{m}{2} = 5 - R^2 \Rightarrow \boxed{R^2 = 5 - \frac{m}{2}}$$

Como R^2 é sempre positivo, temos: $5 - \frac{m}{2} > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{10 - m}{2} > 0 \Rightarrow 10 - m > 0 \Rightarrow -m > -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m < 10}.$$

Como o enunciado pede o maior valor inteiro possível para m, concluímos que $\boxed{m = 9}$.

4. Nas equações seguintes que representarem circunferências, determine o centro e o raio:

a) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$;
b) $(x + 2)^2 + y^2 = 64$;
c) $x^2 + (y - 5)^2 = 5$;
d) $x^2 + y^2 - 4x = 0$;
e) $x^2 + y^2 + 4y + 20 = 0$;
f) $x^2 + y^2 + y = 0$;
g) $9x^2 + 9y^2 - 24x + 24y + 16 = 0$.

Solução

a) Comparamos a equação dada com a equação da circunferência na forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$; temos:
$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25 \Leftrightarrow (x - 5)^2 + [y - (-2)]^2 = 5^2$

Conclui-se, portanto, que: $a = 5$; $b = -2$ e $R = 5$; logo, é uma circunferência de centro $C(5; -2)$ e raio $R = 5$.

b) Analogamente ao anterior, temos:
$(x + 2)^2 + y^2 = 64 \Leftrightarrow [x - (-2)]^2 + (y - 0)^2 = 8^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = -2$; $b = 0$; $R = 8$. Logo, é uma circunferência de centro $C(-2; 0)$ e raio $R = 8$.

c) $x^2 + (y - 5)^2 = 5 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 5)^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 0$; $b = 5$; $R = \sqrt{5}$; logo, é uma circunferência de centro $C(0; 5)$ e raio $R = \sqrt{5}$.

d) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; neste caso, é preferível usar a "regra" dada anteriormente para se calcular o centro (se existir, se for mesmo uma circunferência):

$$x^2 + y^2 - 4 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \underbrace{(-4)}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot x \underbrace{(+0)}_{} \cdot y + 0 = 0$$

$$a = 2;\ b = 0 \Leftrightarrow \boxed{C(2; 0)}.$$

O raio R calcula-se usando o termo independente, que neste caso é zero:

$$a^2 + b^2 - R^2 = 0 \Rightarrow 4^2 + 0^2 - R^2 = 0 \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 2}.$$

Logo a equação dada representa uma circunferência de centro $C(2; 0)$ e raio $R = 2$.

e) $x^2 + y^2 + 4y + 20 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \underbrace{(+0)}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot x \underbrace{(+4)}_{} \cdot y + 20 = 0$$

$$a = 0;\ b = -2 \Rightarrow C(0; -2)$$

Calculamos o raio R usando o termo independente, que neste caso é 20: $a^2 + b^2 - R^2 = 20 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 + (-2)^2 - R^2 = 20 \Rightarrow 4 - R^2 = 20 \Rightarrow R^2 = -16$$

Como R^2 é sempre um número positivo, concluímos que a equação dada não representa uma circunferência.

f) $x^2 + y^2 + y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \underbrace{(+0)}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot x \underbrace{(+1)}_{} \cdot y + 0 = 0$

$$a = 0;\ b = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C\left(0; -\frac{1}{2}\right)}$$

$$a^2 + b^2 - R^2 = 0 \Rightarrow 0 + \frac{1}{4} - R^2 = 0 \Rightarrow R^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{2}}$$

Portanto, temos uma circunferência de centro $C\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ e raio $R = 1/2$.

g) $9x^2 + 9y^2 - 24x + 24y + 16 = 0$; começamos dividindo a equação toda por 9:

$$x^2 + y^2 \underbrace{\left(-\frac{24}{9}\right)}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot x \underbrace{\left(+\frac{24}{9}\right)}_{} \cdot y + \frac{16}{9} = 0$$

$$a = \frac{12}{9};\ b = -\frac{12}{9} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{4}{3}; \frac{-4}{3}\right)}$$

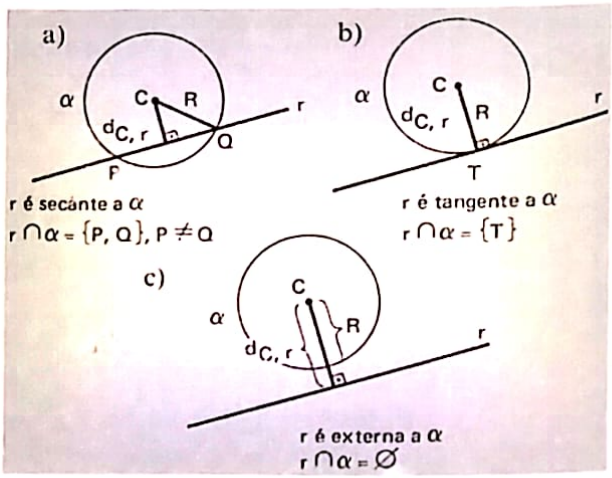
$$a^2 + b^2 - R^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{16}{9} + \frac{16}{9} - R^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow \boxed{R = \frac{4}{3}}$$

Portanto, a equação dada representa a circunferência de centro $C\left(\frac{4}{3}; \frac{-4}{3}\right)$ e raio $R = \frac{4}{3}$.

Posições relativas de reta e circunferência

Se α é uma circunferência e *r* uma reta do plano cartesiano, podem ocorrer três situações, conforme as figuras seguintes:



Scanned by CamScanner

Concluímos então:

- **r secante a α**: neste caso, a reta e a circunferência têm dois pontos comuns e a distância do centro C da circunferência à reta *r* é menor que o raio R;
- **r tangente a α**: neste caso, a reta e a circunferência têm um único ponto comum, chamado de ponto de tangência e a distância do centro C à reta *r* é igual ao raio R;
- **r externa à α**: não existe ponto comum entre a reta *r* e a circunferência α e a distância do centro C à reta *r* é maior que o raio R.

Resumindo, podemos caracterizar a posição relativa de uma reta *r* com uma circunferência α através da distância do centro C à reta *r*:

$d_{C;\,r} < R \Leftrightarrow$ *r* é secante a α (fig. a)
$d_{C;\,r} = R \Leftrightarrow$ *r* é tangente a α (fig. b)
$d_{C;\,r} > R \Leftrightarrow$ *r* é externa a α (fig. c)

Exemplos

1. A circunferência α, de equação $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$, e a reta *r*, de equação $12x + 5y = 0$, são secantes. Veja por que:
$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9 \Rightarrow C(1; 2)$ e $R = 3$; calculando a distância $d_{C;\,r}$ do centro C(1; 2) à reta r: $12x + 5y = 0$, temos:

$$d_{C;\,r} = \frac{|12 \cdot 1 + 5 \cdot 2|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{22}{\sqrt{169}} = \frac{22}{13} < 3$$

Como $d_{C;r}$ é menor do que o raio R(R = 3), conclui-se que a reta *r* é secante a α.

> OBSERVAÇÃO Se quiséssemos calcular os pontos de intersecção da reta *r* com a circunferência α precisaríamos resolver o sistema de equações formado pela equação da reta *r* com a equação da circunferência α. Veremos isto num exercício resolvido.

2. A circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$, cujo centro é a origem (0; 0) e tem raio 1, e a reta de equação $x + y + -\sqrt{2} = 0$ são tangentes. Temos:

$$d_{C;\,r} = \frac{|0 + 0 - \sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1; \text{ logo, } d_{C;\,r} = R = 1.$$

3. A circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$, de centro na origem (0; 0) e raio R = 2, e a reta *r* de equação $x + y + +3\sqrt{2} = 0$ são exteriores (não se interceptam). Veja:

$$d_{C;\,r} = \frac{|0 + 0 + 3\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 > 2 = R;$$ como a distância $d_{C;r}$ é maior do que o raio R, conclui-se que a reta *r* não intercepta a circunferência dada.

EXERCÍCIOS

1. Determinar os pontos de intersecção da reta r, de equação $2x - y + 3 = 0$ com a circunferência de equação $x^2 + + y^2 - 4y + 3 = 0$.

Solução

Para encontrar os pontos de intersecção (se existirem) da reta com a circunferência, resolvemos o sistema formado com as equações:

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 2x + 3} \\ x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

Substituindo o valor $y = 2x + 3$ na equação da circunferência, obtemos: $x^2 + (2x + 3)^2 - 4(2x + 3) + 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 4x^2 + 12x + 9 - 8x - 12 + 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x^2 + 4x = 0$

Resolvendo esta equação do 2º grau, obtemos dois valores possíveis para x e, por conseguinte, dois valores possíveis para y, o que indica que existem dois pontos de intersecção entre a reta e a circunferência. Logo, elas são secantes.

Vamos, agora, terminar de resolver o sistema:

$$5x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (5x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ 5x + 4 = 0 \\ \Rightarrow x = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

Substituindo estes resultados em $y = 2x + 3$, obtemos:

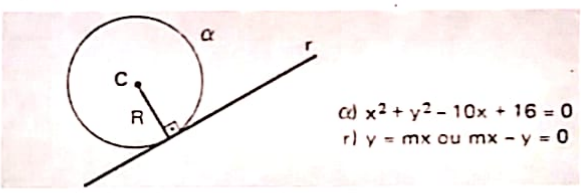
$x = 0$ e $y = 2x + 3 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 + 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{P_1\,(0; 3)}$

$x = -\frac{4}{5}$ e $y = 2x + 3 \Rightarrow y = 2 \cdot \left(\frac{-4}{5}\right) + 3 =$
$= \frac{-8 + 15}{5} = \frac{7}{5};$

Logo, o outro ponto de intersecção é $P_2\left(-\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right)$.

2. Calcular o coeficiente angular m para que a reta de equação $y = m \cdot x$ seja tangente à circunferência $x^2 + y^2 + -10x + 16 = 0$.

Solução



- começamos calculando o centro C e o raio R da circunferência α: $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \underbrace{-10}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot x \underbrace{+0}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot y + 16 = 0$$

$a = 5;\ b = 0 \Rightarrow \boxed{C(5; 0)}$

Como $a^2 + b^2 - R^2 = 16$ (termo independente), temos:

$\Rightarrow 25 + 0 - R^2 = 16 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow \boxed{R = 3}$

- agora impomos a condição de tangência:

r é tangente a α $\Leftrightarrow d_{C;r} = R$; sendo C(5; 0) e r: $y = = m \cdot x \Rightarrow m \cdot x - y = 0 \Rightarrow d_{C;r} = \frac{|m \cdot 5 - 0|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 3 \Rightarrow$

$\frac{|5 \cdot m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3 \Rightarrow |5 \cdot m| = 3 \cdot \sqrt{m^2 + 1} \Rightarrow 25m^2 =$

$= 9(m^2 + 1) \Rightarrow 25m^2 = 9m^2 + 9 \Rightarrow 16m^2 = 9 \Rightarrow m^2 =$

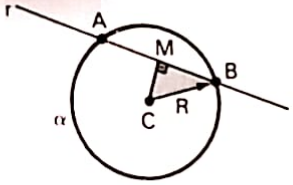
$= \frac{9}{16} \Rightarrow \boxed{m = \pm \frac{3}{4}}$

3. A reta *r*, de equação $3x + 4y + 5 = 0$, é secante à circunferência α, de equação $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$. Calcule o comprimento da corda determinada pela reta *r* em α.

Scanned by CamScanner

Solução

Temos a situação esquemática ao lado:



Poderíamos, simplesmente, determinar os pontos A e B, resolvendo o sistema formado pelas equações de r e de α e, a seguir, calcular o comprimento do segmento $\overline{AB}$ através da fórmula da distância entre dois pontos. Este caminho, teoricamente simples, é, quase sempre, algebricamente muito trabalhoso. Para evitá-lo, usaremos outro método.

• calculamos o centro C e o raio R da circunferência:

$$x^2 + y^2 \underbrace{-2}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot x \underbrace{-6}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot y - 15 = 0$$

$$a = 1;\ b = 3 \Rightarrow \boxed{C(1;\ 3)}$$

$$a^2 + b^2 - R^2 = -15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1^2 + 3^2 - R^2 = -15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 + 9 - R^2 = -15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow \boxed{R = 5}$$

• calculamos a medida do segmento $\overline{CM}$, distância do centro C à reta r:

$$\begin{cases} C(1;\ 3) \\ r:\ 3x + 4y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow d_{C;r} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{C;r} = \frac{20}{\sqrt{25}} = 4 \Rightarrow CM = d_{C;r} = 4 \Rightarrow \boxed{CM = 4}.$$

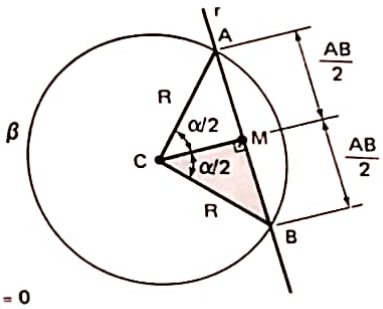
• aplicamos o teorema de Pitágoras ao triângulo CMB:

$$\begin{cases} R^2 = (CM)^2 + (MB)^2 \\ R = 5;\ CM = 4 \end{cases} \Rightarrow 5^2 = 4^2 + (MB)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{MB = 3}.$$

Como M é o ponto médio de $\overline{AB}$, concluímos que $\boxed{AB = 6}$.

4. (FUVEST) A reta de equação $3x - 4y = 6$ intercepta a circunferência $4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y = 5$ nos pontos A e B. Determine o valor de $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, onde α é a medida do ângulo $A\hat{C}B$ e C é o centro da circunferência.



r) $3x - 4y - 6 = 0$
β) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y - 5 = 0$

Solução

• determinamos o centro C e o raio R da circunferência:

$4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y - 5 = 0$ (dividimos tudo por 4) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \underbrace{-2}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot x \underbrace{+4}_{\text{metade, com sinal trocado}} \cdot y - \frac{5}{4} = 0$$

$$a = 1;\ b = -2 \Rightarrow$$

$$\boxed{C(1;\ -2)}$$

$$a^2 + b^2 - R^2 = -\frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 4 - R^2 = -\frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = 5 + \frac{5}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 5/2}$$

• determinamos a medida de $\overline{CM}$:

CM é a distância do ponto C(1; −2) à reta r de equação $3x - 4y - 6 = 0$; então:

$$CM = d_{C;r} = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) - 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} =$$

$$= \frac{|3 + 8 - 6|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{CM = 1}$$

• determinamos MB:

No triângulo retângulo CMB, usando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\begin{cases} (BC)^2 = (CM)^2 + (MB)^2 \\ BC = R = 5/2 \\ CM = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 1^2 + (MB)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (MB)^2 = \frac{25}{4} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (MB)^2 = \frac{21}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{MB = \frac{\sqrt{21}}{2}}$$

• calculamos $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

No triângulo CMB, temos:

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{MB}{CM} = \frac{\sqrt{21}/2}{1} = \sqrt{21}/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{21}}{2}}.$$

Scanned by CamScanner

ATGC (DNA)
UACG (RNA)

RESUMOS E EXERCÍCIOS

Correspondem a Matemática — páginas 1 a 48

ÁLGEBRA ELEMENTAR
Conjuntos

Noções

Simbologia

$\wedge$ (e)	$\in$ (pertence)
$\vee$ (ou)	$\notin$ (não pertence)
$\mid$ (tal que)	$\supset$ (contém)
$\exists$ (existe)	$\not\supset$ (não contém)
$\nexists$ (não existe)	$\subset$ (contido)
$\forall$ (qualquer que seja)	$\not\subset$ (não contido)
	$\varnothing$ (vazio)

Conceitos primitivos e suas relações

- Conjunto, elemento: conceitos primitivos.
- Pertinência: relação entre elemento e conjunto. Um elemento $\in$ ou $\notin$ a um conjunto.
- Inclusão: relação entre dois conjuntos. Um conjunto $\subset$ ou $\not\subset$ em outro conjunto.
  $A \subset B$: todo elemento de A é elemento de B.

Operações

- Intersecção

$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}}$$

- União

$$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}}$$

- Diferença

$$\boxed{A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}}$$

- Complementar

se $B \subset A$ então $\boxed{C_A^B = A - B}$

Conjuntos numéricos

Conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

Conjunto dos números reais

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

onde I é o conjunto dos números irracionais

$$\mathbb{R}^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0\}$$

$$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0\}$$

$$\mathbb{R}_- = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \leqslant 0\}$$

★ EXERCÍCIOS ★

1. Dados os conjuntos $A = \{0; 1\}$, $B = \{0; 2; 3\}$ e $C = \{0; 1; 2; 3\}$, classifique em verdadeiro (V) ou falso (F) cada afirmação abaixo:

a) ( ) $A \subset B$ b) ( ) $\{1\} \subset A$ c) ( ) $A \subset C$
d) ( ) $B \supset C$ e) ( ) $B \subset C$ f) ( ) $\{0; 2\} \in B$

2. Se $A \subset B \subset C$ e $x \notin B$, então, necessariamente:

a) $x \notin C$ b) $x \in A$ c) $x \in C$
d) $x \notin A$ e) $x \in A$ ou $x \in C$

3. (MACKENZIE — SP) Se A e B são dois conjuntos tais que $A \subset B$ e $A \neq \varnothing$, então:

a) sempre existe $x \in A$ tal que $x \notin B$
b) sempre existe $x \in B$ tal que $x \notin A$
c) se $x \in B$ então $x \in A$
d) se $x \notin B$ então $x \notin A$ e) $A \cap B = \varnothing$

4. (PUC — SP) Supondo A, B e C três conjuntos não vazios, assinale a alternativa correta:

a) $A \subset C, B \cap C = \varnothing \Rightarrow A \cap B \neq \varnothing$
b) $A \subset B, C \cap A \neq \varnothing \Rightarrow C \subset B$
c) $A \subset B, C \subset B \Rightarrow A \cap C \neq \varnothing$
d) $A \subset B, B \cap C \neq \varnothing \Rightarrow A \cap C \neq \varnothing$
e) $A \subset B, C \cap A \neq \varnothing \Rightarrow (A \cap C) \subset B$

5. (F.G.V. — SP) Sejam A, B e C conjuntos finitos. O número de elementos de $A \cap B$ é 30, o número de elementos de $A \cap C$ é 20 e o número de elementos de $A \cap B \cap C$ é 15. Então, o número de elementos de $A \cap (B \cup C)$ é:

a) 35 b) 15 c) 50 d) 45 e) 20

6. (PUC — SP) Se A, B e $A \cap B$ são conjuntos com 90, 50 e 30 elementos, respectivamente, então o número de elementos do conjunto $A \cup B$ é:

a) 10 b) 70 c) 85 d) 110 e) 170

7. (U.F. — AL) Se A e B são dois conjuntos não vazios tais que: $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, $A - B = \{1; 3; 6; 7\}$ e $B - A = \{4; 8\}$ então $A \cap B$ é o conjunto:

a) $\varnothing$ d) $\{6; 7; 8\}$
b) $\{1; 4\}$ e) $\{1; 3; 4; 6; 7; 8\}$
c) $\{2; 5\}$

8. (UNESP — SP) Se $A = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 8\}$ e $C = \{1, 4, 6, 8\}$, então:

Scanned by CamScanner

a) $(A - B) \cap C = \{2\}$
b) $(B - A) \cap C = \{1\}$
c) $(A - B) \cap C = \{1\}$
d) $(B - A) \cap C = \{2\}$
e) n.d.a.

9. (MACKENZIE — SP) Sendo $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ e $B = \{2, 3, 7\}$, então o complementar de B em A é:
a) $\varnothing$ b) $\{8\}$ c) $\{8, 9, 10\}$
d) $\{9, 10, 11, ...\}$ e) $\{1, 5, 8\}$

10. (FUVEST) Calcule:
a) $\frac{1}{10} - \frac{1}{6}$ b) $\frac{0{,}2 \times 0{,}3}{3{,}2 - 2{,}0}$

11. (U.F. — SE) Dados os conjuntos
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid -1 < x \leqslant 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leqslant x < 2\}$, o conjunto $A \cap B$ é igual a:
a) $\{-1; 0; 1\}$
b) $\{-1; 0; 1; 2\}$
c) $\{0; 1\}$
d) $\{0; 1; 2\}$
e) $\{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

12. (FUVEST) O valor da expressão:
$\frac{a + b}{1 - ab}$, para $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{3}$, é:
a) 5 b) 1 c) 0 d) 3 e) 6

13. (U.F. — BA) Num determinado concurso, a razão entre o número de vagas e o número de candidatos é de 1 para 4. Havendo 1 560 inscrições, o número de candidatos não aproveitados é:
a) 390 b) 520 c) 1 040
d) 1 170 e) 1 248

14. (PUCC) Sejam $\mathbb{Q}$ e I os conjuntos dos números racionais e dos irracionais, respectivamente. Então, sempre é verdadeira a afirmação:
a) $x \in I; y \in I \Rightarrow x + y \in I$
b) $x \in I$ y $\in I \Rightarrow x \cdot y \in I$
c) $x \in \mathbb{Q}; y \in I \Rightarrow x - y \in I$
d) $x \in \mathbb{Q}; y \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$;
e) n.d.a.

15. (CESGRANRIO) Ordenando os números racionais $p = \frac{13}{24}$, $q = \frac{2}{3}$ e $r = \frac{5}{8}$, obtemos:
a) $p < r < q$
b) $q < p < r$
c) $r < p < q$
d) $q < r < p$
e) $r < q < p$

16. (F.C. CHAGAS — SP) Um subconjunto X de números naturais contém 12 múltiplos de 4, 7 múltiplos de 6, 5 múltiplos de 12 e 8 números ímpares. O número de elementos de X é:
a) 32 b) 27 c) 24 d) 22 e) 20

17. (U.F. — MG) Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, $K = \{3x \mid x \in \mathbb{N}\}$, $L = \{5x \mid x \in \mathbb{N}\}$ e $M = \{15x \mid x \in \mathbb{N}\}$. Qual a afirmativa certa?
a) $K \cup L = M$
b) $K \subset L$
c) $\mathbb{N} - L = M$
d) $K - L = M$
e) $K \cap L = M$

18. (CESGRANRIO) A intersecção do conjunto de todos os inteiros múltiplos de 6 com o conjunto de todos os inteiros múltiplos de 15 é o conjunto de todos os inteiros múltiplos de:
a) 3 b) 18 c) 30 d) 45 e) 90

19. Assinale a alternativa correta:
a) se p é primo, então p é ímpar
b) se p é primo, então p + 2 é ímpar
c) se p é primo, então p + 1 é par
d) se p é primo, então p^2 é ímpar
e) n.d.a.

20. (CESGRANRIO) O máximo divisor comum de 20 e 32 é:
a) 8 b) 5 c) 1 d) 2 e) 4

21. (FUVEST) Sejam **a** e **b** o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de 360 e 300, respectivamente. Então o produto ab vale:
a) $2^4\ 3^4\ 5^3$ b) $2^5\ 3^2\ 5^2$ c) $2^5\ 3^3\ 5^3$
d) $2^6\ 3^3\ 5^2$ e) $2^6\ 3^4\ 5^2$

22. (CESESP — PE) Sabendo que a soma de dois números inteiros e positivos é igual a 1 012 e que o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum destes dois números são, respectivamente, 4 e 7 840, tem-se que estes dois números são:
a) 200 e 812 b) 72 e 940 c) 32 e 980
d) 196 e 816 e) 8 e 1 004

23. Considere os conjuntos $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é primo e } n > 2\}$. É correto afirmar que:
a) $A = B$ b) $A \cup B = B$ c) $A \cap B = \varnothing$
d) $A \subset B$ e) $B \subset A$

24. (F.M. SANTA CASA — SP) Dentre os números $\sqrt{2}+3$, $\pi + 1$, $2\sqrt{5}$, $\frac{\pi}{2}$ e $\sqrt{3} + 3$, o maior é:
a) $\sqrt{2} + 3$ b) $\pi + 1$ c) $\sqrt{3} + 3$
d) $\frac{\pi}{2}$ e) $2\sqrt{5}$

25. (PUCC) Suponha que um cometa A atinja o ponto mais próximo da Terra, em sua órbita, a cada 20 anos, um cometa B a cada 30 anos e um cometa C a cada 70 anos. Se em 1985 os três estiverem simultaneamente o mais perto possível da Terra, então a próxima ocorrência desse fato se dará no ano de:
a) 2 105 b) 2 405 c) 2 600
d) 3 205 e) 3 600

26. (FAC. MED. JUNDIAÍ) Dados os intervalos $A =]-2; 1]$ e $B = [0; 2]$, então $A \cap B$ e $A \cup B$ são, respectivamente:
a) $]0; 1[$ e $]-2; 2[$
b) $]0; 1]$ e $]-2; 2]$
c) $[0; 1]$ e $]-2; 2]$
d) $[0; 1[$ e $[-2; 2[$
e) $[0; 1[$ e $[-2; 2]$

27. (F.G.V. — SP) Dados os conjuntos
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$, qual a sentença correta?
a) $A \subset B$
b) $A \cap B = \varnothing$
c) $A \cup B = \{x \mid 3 < x < 6\}$
d) $A \cap B = \{x \mid x > 3\}$
e) $A \cup B = \mathbb{R}$

28. (F.C. CHAGAS — SP) Dados os conjuntos $P = [2; 7]$ e $Q = [-3; 5[$, podemos afirmar que:
a) $P \cup Q = [-1; 12[$
b) $3 \in Q - P$
c) $5 \notin P \cup Q$
d) $[3; 4] \subset P \cap Q$
e) $P - Q =]-3; 2]$

29. (PUC — SP) Sendo o número real x tal que:
$x \notin]-1; 2]$, $x < 0$ ou $x \geqslant 3$, pode-se concluir que:
a) $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 3$
b) $x < -1$ ou $x \geqslant 3$
c) $-1 < x < 0$ ou $2 < x \leqslant 3$
d) $x < -1$ ou $x \geqslant 2$
e) $x \leqslant -1$ ou $x > 3$

30. Se $A =]-\infty; 2]$, $B = [2; +\infty[$ e $C =]1; 2]$, então o número de elementos de $(A \cap B) - C$ é:
a) infinito b) um c) zero
d) dois e) indeterminado

Scanned by CamScanner

Potenciação e radiciação

Potenciação

Potência de expoente inteiro

$a^n = \underbrace{a.a.a.a. \dots .a}_{n \text{ fatores}}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

$a^1 = a$ $\qquad$ $a^0 = 1$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\qquad$ $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ $\qquad$ $a, b \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$

a: base $\qquad$ n: expoente $\qquad$ a^n: potência

Propriedades

$a^m.a^n = a^{m+n}$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $\quad a \neq 0$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

Radiciação

A definição distingue três casos:

- $n \in \mathbb{N}^*$, n ímpar, $a \in \mathbb{R}$

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

- $n \in \mathbb{N}^*$, n par, $a \in \mathbb{R}^+$

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, $b \geqslant 0$

- $n \in \mathbb{N}^*$, n par, $a \in \mathbb{R}^-$

$\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$

Propriedades

$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$; $b \neq 0$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

$\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$; $p \in \mathbb{N}^*$

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

★ EXERCÍCIOS ★

31. Calcule as seguintes potências:

a) 4^3 $\quad$ b) $(-2)^5$ $\quad$ c) 5^0

d) $(\frac{1}{3})^{-2}$ $\quad$ e) 5^{-1} $\quad$ f) -3^2

g) $(2^3)^2$ $\quad$ h) 2^{3^2}

32. Efetuar as operações com as potências:

a) $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^{-7}$

b) $(-3)^2 \cdot (-3)^4 \cdot (-3)^{-6}$

c) $(-5)^{10} : (-5)^8$

d) $5 \cdot 2^3 - (-1)^5 - (-2)^2 + (-1)^5$

33. Calcular as seguintes raízes:

a) $\sqrt{25}$ $\quad$ c) $\sqrt[5]{32}$

b) $\sqrt[3]{125}$ $\quad$ d) $\sqrt[5]{-1024}$

34. Simplifique os radicais:

a) $\sqrt{72}$ $\quad$ b) $\sqrt{27}$ $\quad$ c) $3\sqrt{20}$ $\quad$ d) $\sqrt[3]{640}$

e) $\sqrt[3]{250}$ $\quad$ f) $\sqrt[4]{128}$ $\quad$ g) $\sqrt{5^2 \cdot 12^2}$

35. Efetue as operações indicadas:

a) $(2\sqrt{7}) \cdot (3\sqrt{5})$ $\quad$ b) $(3\sqrt[3]{2}) \cdot (5\sqrt[3]{6}) \cdot (8\sqrt[3]{4})$

c) $(10\sqrt{6}) : (5\sqrt{2})$ $\quad$ d) $(6\sqrt[4]{30}) : (3\sqrt[4]{5})$

e) $\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{12}$ $\quad$ f) $5\sqrt{8} - 3\sqrt{18}$

g) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{50} + 7\sqrt{288}$ $\quad$ h) $\sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{54} + 7\sqrt[3]{250}$

36. Racionalizar os denominadores das frações:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad$ b) $\dfrac{12}{\sqrt{2}}$ $\quad$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\quad$ e) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ $\quad$ f) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{2}}$

37. O valor de $(0,2)^3 + (0,16)^2$ é:

a) 0,0264 $\quad$ b) 0,0336 $\quad$ c) 0,1056

d) 0,2568 $\quad$ e) 0,6256

38. (FUVEST) O valor da expressão $a^3 - 3a^2x^2y^2$, para $a = 10$, $x = 2$ e $y = 1$, é:

a) 100 $\quad$ b) 50 $\quad$ c) 250

d) -150 $\quad$ e) -200

39. (F.C. CHAGAS — SP) A expressão $a^b \cdot a^{bc}$ é equivalente a:

a) a^{b^2c} $\quad$ b) $2a^{bc}$ $\quad$ c) $(a^{2b})^c$

d) $a^{b(1+c)}$ $\quad$ e) a^{2b+c}

40. (F.C. CHAGAS — SP) Se $x = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{20}{8}$ e $y = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2$, a razão entre x e y é:

a) maior que 1 $\quad$ b) igual a $\dfrac{2}{3}$

c) um número inteiro

d) um número negativo

e) um número entre 0 e $\dfrac{1}{2}$

41. (U.F. — SE) Simplificando a expressão $[2^9 : (2^2 \cdot 2)^3]^3$, obtém-se:

a) 2^{36} $\quad$ b) 2^{-30} $\quad$ c) 2^{-6}

d) 1 $\quad$ e) $\dfrac{1}{3}$

Scanned by CamScanner

42. (CESGRANRIO) A representação decimal de $0{,}01^3$ é:
a) 0,03 b) 0,001 c) 0,0001 d) 0,000001 e) 0,0000001

43. (F.C. CHAGAS — SP) O valor de $ab^2 - a^3$ para $a = -\frac{x}{2}$ e $b = 2x$ é:
a) $\frac{17}{8}x^3$ b) $-\frac{17}{8}x^3$ c) $-\frac{15}{8}x^3$ d) $-\frac{11}{6}x^3$ e) $-\frac{13}{6}x^3$

44. (U.N.B) O valor de $(5^{-5})^5$ é:
a) 5^{-25} b) $-\frac{1}{125}$ c) $(-25)^5$ d) -5^{25} e) n.d.a.

45. (FUVEST) $\dfrac{0{,}3 - \frac{1}{4}}{\sqrt[5]{-1}} + 0{,}036 : 0{,}04$
a) 8,95 b) 0,95 c) 0,85 d) 0,04 e) 8,85

46. (F.C. CHAGAS — SP) O número $\sqrt{2352}$ corresponde a:
a) $4\sqrt{7}$ b) $4\sqrt{21}$ c) $28\sqrt{3}$ d) $28\sqrt{21}$ e) $56\sqrt{3}$

47. (UNESP) Se $x = \dfrac{2^{-1} + 3^{-1}}{\sqrt{1 + 5 \cdot 4^{-1}}}$ e $y = \dfrac{(2^{-1} + 3^{-1})^{-1}}{\sqrt[3]{1 - 7 \cdot 2^{-3}}}$ então:
a) $x<y<0$ b) $3x>y>0$ c) $xy = \frac{4}{3}$ d) $x + y = \frac{21}{5}$ e) $x^{-1} - y^{-1} = \frac{87}{60}$

48. (FAC. MED. JUNDIAÍ) Se $A = (6^2 \cdot 9^5)^{-4}$, então A é igual a:
a) $\frac{1}{4}$ b) $3^{-24} \cdot 2^{-6}$ c) $\frac{1}{3^{48} \cdot 2^8}$ d) $\frac{1}{54^{40}}$ e) 54^{-28}

49. (MACKENZIE — SP) Seja $A = 2 + \frac{7}{x}$, $x > 0$. Então $\frac{1}{A}$ é:
a) $\frac{1}{2} + \frac{x}{7}$
b) $x(2x + 7)$
c) $x^{-1} \cdot (2x + 7)$
d) $x(2x + 7)^{-1}$
e) $2x + 7$

50. (FAC. MED. JUNDIAÍ) $(2^{-1} + 2^{-\frac{1}{2}})^{-2}$ tem valor igual a:
a) $4(3 - 2\sqrt{2})$
b) $\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})$
c) 5
d) 3
e) $\frac{4}{3}$

51. (PUC — SP) O valor da expressão $(2^x)^x : x$, para $x = \sqrt{2}$, é:
a) 2 b) $2\sqrt{2}$ c) $4\sqrt{2}$ d) $\sqrt[4]{2}$ e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

52. (F.M. SANTA CASA — SP) A diferença $8^{0.666\ldots} - 9^{0.5}$ é igual a:
a) 2 b) 1 c) $\sqrt{2} - 3$ d) -2 e) $-2\sqrt{2}$

53. Das sentenças:
I) $\{-2, \frac{3}{4}, 0\} \subset \mathbb{Q}$ II) $\{\sqrt[3]{-8}, \sqrt[5]{1}\} \not\subset \mathbb{Q}$
III) $\{\frac{8}{2}, -3\} \subset \mathbb{Z}$, é correto afirmar-se que somente
a) I é verdadeira
b) II é verdadeira
c) III é verdadeira
d) II é falsa
e) III é falsa

54. $\dfrac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$ é igual a:
a) $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt[3]{4}$
b) $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$
c) $\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$
d) $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt[3]{4}$
e) $\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt[3]{4}$

55. (FUVEST) Se $4^{16} \times 5^{25} = \alpha \times 10^n$, com $1 \leqslant \alpha < 10$, então **n** é igual a:
a) 24 b) 25 c) 26 d) 27 e) 28

56. (F.C. CHAGAS — SP) A expressão $x^{-1/2} - y^{-2}$ para $x = \frac{1}{4}$ e $y = 2$ representa o número:
a) $-\frac{1}{4}$ b) 0 c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{7}{4}$ e) $\frac{9}{4}$

57. (U.F. — RS) Identifique, entre os conjuntos abaixo, o subconjunto do conjunto dos números irracionais.
a) $\{\pi; \sqrt[3]{\frac{1}{3}}; \sqrt[3]{3}; 2^{1/2}\}$
b) $\{\sqrt{-2}; \pi\sqrt{2}; \sqrt{3}\}$;
c) $\{\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}; \sqrt{3}; \sqrt{\frac{1}{5}}; \sqrt{7}\}$
d) $\{\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4}; \sqrt{5}\}$
e) $\{-1^{1/4}; 3^{1/2}; \pi; 2^{1/3}\}$

58. (UNESP) Se $p = [(2^{-4} \cdot 3^5 \cdot 2^7)^2]^{3/4}$, então:
a) $p = 2^{13/4} \cdot 3^{19/4}$
b) $p = 2^{23/4} \cdot 3^{31/4}$
c) $p = 2^{9/2} \cdot 3^{15/2}$
d) $p = 2^{33/2} \cdot 3^{15/2}$
e) n.d.a.

59. (U.F. — MG) O valor da expressão algébrica $x^{-2} - \dfrac{1}{x - 1} + x^{3/2} + \sqrt{x}$ para $x = 4$ é:
a) $\frac{23}{3}$
b) $\frac{35}{3}$
c) $\sqrt[3]{16} + \frac{91}{48}$
d) $\frac{475}{48}$
e) nenhuma anterior

Scanned by CamScanner

Produtos notáveis e fatoração

Produtos notáveis

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Fatoração

$ax + ay = a \cdot (x + y)$

$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

★ EXERCÍCIOS ★

60. Efetuar:
a) $8x^2 - (1 - 3x^2) + (5x^2 + 9)$
b) $-3x - \{-x + 5 - [8x - (2 + x)]\}$
c) $x^2 \cdot (ax^3 + bx - 1)$

61. Usando produtos notáveis, calcule:
a) $(2a + 3b)^2$
b) $(x^2 - 1).(x^2 + 1)$
c) $[(x - y) - a] \cdot [(x - y) + a]$

62. Fatorar as expressões:
a) $3x^2 + 2x$
b) $5x^3 + 4x^2 + 3x$
c) $2a^2b + 4ab^2$
d) $2ab^3 - 6a^2b^2$

63. Fatorar as expressões:
a) $a(x + 1) - b(x + 1)$
b) $ax + a$
c) $a^2x + ax^2$
d) $ax + a - bx - b$

64. Fatorar as expressões:
a) $a^2x + b^2y + a^2y + b^2x$
b) $2a^3(b - 1)^3 + 4a^4(b - 1)^2$
c) $2ax + 3ay - 4bx - 6by$
d) $2x^2 - x + 4xy - 2y$

65. Fatore:
a) $9x^2 - 1$
b) $4y^2 - 9$
c) $x^2 - 2$
d) $x^2 - \frac{1}{x^2}$

66. Fatore:
a) $(x + y)^2 - a^2$
b) $x^2 - (x + y)^2$
c) $a^2 - 4b^2$
d) $a^2 - 4b^2 + a + 2b$

67. Fatore:
a) $x^2 + 6x + 9$
b) $x^2 + (-6x) + 9$
c) $x^4 + 2x^2 + 1$
d) $9x^2 - 6x + 1$

68. Fatore:
a) $x^2 + 6x + 9 - y^2$
b) $x^2 - 6x + 9 - y^2$
c) $x^2 - a^2 - 2ab - b^2$
d) $100 - x^2 + 4xy - 4y^2$

69. Fatore:
a) $x^3 + 1$
b) $27 - x^3$
c) $8 + x^3y^3$
d) $x^3 - 27y^3$

70. Fatore:
a) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ b) $x^6 + 1$ c) $x^6 - 1$

71. Racionalize os denominadores:
a) $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ c) $\frac{5}{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}$
d) $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$ e) $\frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}{3\sqrt{3} - 2\sqrt{5}}$

72. A expressão $(2x^2 + 1)^2 + (x^2 - 2)^2$ é equivalente a:
a) $5(x^4 + 1)$
b) $5(x^4 - 1)$
c) $3x^4 + 8x^2 + 3$
d) $x^4 - 1$
e) $5x^4 - 5x^2 + 1$

73. Se $(x + 2y)^3 = a$, então $a - (x - y)^3$ é:
a) $9x^3 + 9xy^2$
b) $9x^2y + 9xy^2 + 9y^3$
c) $3x^2y + 9xy^2 + 7y^3$
d) $9x^2y + 9y^3$
e) $9y^3$

74. (FUVEST) A diferença entre o cubo da soma de dois números inteiros e a soma de seus cubos pode ser:
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

75. (FUVEST) Qual é o valor da expressão $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$?
a) $\sqrt{3}$ b) 4 c) 3 d) 2 e) $\sqrt{2}$

76. (F.M. SANTA CASA — SP) A soma $1 \cdot (2x + 1)^3 - 3 \cdot (2x + 1)^2 + 3 \cdot (2x + 1) - 1$ equivale a:
a) $8x^3$ b) $2x^3$ c) $8x^3 + 1$
d) $8x^3 - 12x^2 - 2$ e) $8x^3 + 12x^2 + 6x - 6$

77. (F.G.V. — SP) A expressão $E = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ tem como valor:
a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$
d) $\sqrt{6}$ e) 5

78. (PUC — SP) O conjunto
$A = \{x \mid x = \frac{(n + 1)^2 - (n - 1)^2}{2}, n \in \mathbb{N}^*\}$
equivale:
a) ao conjunto dos quadrados dos naturais;
b) ao conjunto dos números pares positivos;
c) ao conjunto dos quadrados dos números ímpares;
d) ao conjunto vazio;
e) ao conjunto dos naturais não nulos.

Scanned by CamScanner

79. (U.F. — BA) A expressão:

$\dfrac{-x^2 + x + 2}{x - \frac{1}{2}}$ para $x = -1$ é igual a:

a) 0
b) -3
c) $-\dfrac{2}{3}$
d) $-\dfrac{4}{3}$
e) $\dfrac{4}{3}$

80. (F.G.V. — SP) Simplificando a expressão:

$$\frac{2x \cdot (x - 5)^3 - 3x^2(x - 5)^2}{(x - 5)^6}$$

obtém-se:

a) $\dfrac{2x - 3x^2}{(x - 5)^4}$
b) $\dfrac{x}{(x - 5)^3}$
c) $\dfrac{x \cdot (-x + 10)}{(x - 5)^4}$
d) $-\dfrac{x(x + 10)}{(x - 5)^4}$
e) $\dfrac{-x}{(x - 5)^3}$

81. (F.G.V. — SP) Simplificando a expressão:

$$\frac{2(x - 2)(x - 3)^3 - 3(x - 2)^2 (x - 3)^2}{(x - 3)^6}$$

obtém-se:

a) $\dfrac{x \cdot (x - 2)}{(x - 3)^3}$
b) $\dfrac{x \cdot (2 - x)}{(x - 3)^3}$
c) $\dfrac{x(x - 2)}{(x - 3)^4}$
d) $\dfrac{x(2 - x)}{(x - 3)^4}$
e) $\dfrac{5x(x - 2)}{(x - 3)^4}$

82. A expressão $\dfrac{1}{n + 1} - \dfrac{1}{n + 2}$ é equivalente a:

a) $\dfrac{1}{n^2 + 3n + 2}$
b) 0
c) $\dfrac{3}{n^2 + 3n + 2}$
d) $\dfrac{1}{2}$
e) $\dfrac{2n + 3}{n^2 + 3n + 2}$

83. Se $\dfrac{1 + x}{3 + x} + \dfrac{1}{9 - x^2} = y$, então $y + \dfrac{x}{3 - x}$ é igual a

a) $-\dfrac{5x - 4}{x^2 - 9}$
b) $\dfrac{-5x + 4}{x^2 - 9}$
c) $\dfrac{x - 4}{x^2 - 9}$
d) $\dfrac{x + 4}{x^2 - 9}$
e) $-\dfrac{5x + 4}{x^2 - 9}$

84. Efetuando-se $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x - 1}$, obtemos:

a) $\dfrac{x}{x + 1}$
b) $\dfrac{1}{2}$
c) $\dfrac{x + 1}{x}$
d) $\dfrac{x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$
e) $\dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$

85. (F.G.V. — SP) O quociente entre o m.m.c. e o m.d.c. das expressões

$A = x^3 - xy^2 - x^2y + y^3$
$B = x^2 - y^2$
$C = x^3 - y^3$ é:

a) $(x^3 - y^3)(x - y)$
b) $(x^2 - y^2)(x + y)$
c) $(x - y)^2 (x + y)$
d) $(x - y)^3$
e) $(x^3 - y^3)(x + y)$

EQUAÇÕES

Equações de 1º grau

São todas as equações redutíveis à forma:

$$\boxed{a \cdot x + b = 0 \Leftrightarrow a \cdot x = -b}$$

Em $\mathbb{R}$ temos as seguintes possibilidades:

- $a \neq 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \Rightarrow S = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$
- $a = 0$ e $b = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 0 \cdot x = 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$
- $a = 0$ e $b \neq 0 \Rightarrow \nexists x \mid 0 \cdot x = -b \Rightarrow S = \varnothing$

Equações de 2º grau

São todas as equações redutíveis à forma:

$\boxed{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$ com $a \neq 0$

Raízes em $\mathbb{R}$

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$$

$\boxed{x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$ $\boxed{x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$

Estudo das raízes em $\mathbb{R}$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ duas raízes reais distintas
$\Delta = 0 \Rightarrow$ duas raízes reais e iguais
$\Delta < 0 \Rightarrow$ não existem raízes em $\mathbb{R}$

Relações entre coeficientes e raízes

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Equações biquadradas

São as equações da forma

$\boxed{a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0}$ com $a \neq 0$

Método de resolução

Fazemos $\boxed{x^2 = y} \Rightarrow \boxed{x^4 = y^2}$, recaindo na equação de 2º grau $a \cdot y^2 + b \cdot y + c = 0$

Scanned by CamScanner

★ EXERCÍCIOS ★

86. Resolva as seguintes equações:
a) $9x - 8 = 11x - 10$
b) $1 - 2x - (3x - 10) = 7(3 - x)$
c) $\frac{3x}{2} + 5 = \frac{5x}{2} - 1$
d) $2x + \frac{7}{11} = 5x - 2$
e) $\frac{2(x - 2)}{3} + 4 = 0$
f) $3(2x + \frac{4}{5}) = \frac{x - 2}{3}$
g) $\frac{x - 1}{12} + \frac{7x - 3}{48} = \frac{5x - 2}{24}$
h) $\frac{x}{4} + 8 = \frac{x}{3} + 7$

87. Obtenha o conjunto-solução de cada equação abaixo:
a) $x^2 - 5x = 0$ b) $3x^2 - x = 0$ c) $x^2 = 9$
d) $4x^2 - 1 = 0$ e) $-x^2 + 1 = 0$

88. Obtenha o conjunto-solução de cada equação abaixo
a) $x^2 + 3 = 0$
b) $x^2 - 8x + 1 = 0$
c) $3x^2 - 2x - 3 = 0$
d) $x^2 + 5x + 6 = 0$
e) $x^2 = \sqrt{2} \cdot x$

89. Resolver as equações seguintes em $\mathbb{R}$:
a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
b) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
c) $2y^4 + 6y^2 = 0$
d) $16x^4 - 1 = 0$
e) $x^4 - 3x^2 = 0$

90. (U.F. — BA) Na proporção $\frac{2 - \frac{1}{2} \cdot 3}{5} = \frac{x}{4 : 3 + 1}$, o valor de x é:
a) $-\frac{1}{10}$ b) $\frac{9}{5}$ c) $\frac{7}{30}$ d) $\frac{9}{10}$ e) $\frac{1}{10}$

91. (UNESP) Se $m \in \mathbb{R}$ é tal que $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{m} = 1$, então:
a) $m = \frac{1 - \sqrt{2}}{3}$
b) $m = \frac{1}{3}$
c) $m = \frac{6 + 2\sqrt{2}}{7}$
d) $m = 3$
e) n.d.a.

92. O valor de x, solução da equação $\frac{x - 1}{3} + \frac{1}{x} = \frac{x}{3}$ é:
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 3 d) $-\frac{1}{3}$ e) 0

93. (FUVEST) O dobro de um número mais a sua terça parte, mais a sua quarta parte somam 31. Determine o número.

94. (U.F. — SE) O número que somado aos seus $\frac{2}{3}$ resulta 30 é:
a) ímpar
b) múltiplo de 9
c) divisor de 30
d) primo
e) quadrado perfeito

95. "O dobro de um número mais um terço de sua metade resulta no triplo do número" pode ser equacionado por:
a) $2x + \frac{x}{6} = 3x$
b) $2x + \frac{3x}{2} = 3x$
c) $2x + \frac{x}{3} = 3x$
d) $2x + \frac{2x}{3} = 3x$
e) $2x + \frac{x}{6} = 3$

96. (PUC — SP) O quociente entre dois números naturais consecutivos é igual a 1,09090909... ($= 1,\overline{09}$). A soma desses números é igual a:
a) 19 b) 21 c) 23 d) 25 e) 230

97. (F.G.V. — SP) A soma de 3 números inteiros e consecutivos é 60. Assinale a afirmação verdadeira:
a) O quociente do maior pelo menor é 2.
b) O produto dos 3 números é 8 000.
c) Não existem números nessa condição.
d) Falta informação para encontrar os 3 números.
e) O produto dos 3 números é 7980.

98. (PUCC) A um aluno propuseram o seguinte problema: um número é tal que:
a) multiplicado por $\frac{3}{4}$ diminui de 5 unidades;
b) dividido por $\frac{4}{5}$, aumenta de 5 unidades;
c) adicionando-se-lhe 10 unidades obtém-se outro número que é $\frac{3}{2}$ do número dado.

O aluno respondeu que o problema é impossível porque, embora as partes a e b fossem possíveis, o mesmo não se verifica em relação ao item c.
Responda você:
a) O aluno acertou na resposta que deu.
b) O aluno errou porque o problema só se verifica em relação às partes b e c.
c) O aluno errou porque o problema é possível.
d) O aluno errou porque o problema só é possível em relação às partes a e c.
e) n.d.a.

99. (U.F. — MG) De um recipiente cheio de água tiram-se $\frac{2}{3}$ de seu conteúdo. Recolocando-se 30 ℓ de água, o conteúdo passa a ocupar a metade do volume inicial. A capacidade do recipiente é:
a) 45 ℓ b) 75ℓ c) 120 ℓ d) 150 ℓ e) 180 ℓ

100. Resolva a equação: $\frac{x^2 + 2}{2} - \frac{x - 1}{3} = \frac{3}{2}$.

101. Resolva as equações:
a) $(x^2 - 3x + 2)^2 - 3(x^2 - 3x + 2) = 0$; sugestão: chame $x^2 - 3x + 2$ de y
b) $2(x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - 1 = 0$
c) $3(x^3 - 1)^2 - 2(x^3 - 1) - 1 = 0$

102. Resolva a equação: $6x^{-2} - 17x^{-1} + 12 = 0$.

103. (FUVEST) A equação $\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{x + 1} = -1$
a) tem apenas uma raiz real
b) tem duas raízes reais cuja soma é 1
c) não tem nenhuma raiz real
d) tem três raízes reais cuja soma é -1
e) admite 4 como raiz

Scanned by CamScanner

104. (U.F. — BA) A razão entre a soma e o produto das raízes da equação $2x^2 - 14x + 9 = 0$ é:

a) $\frac{14}{9}$

b) $\frac{2}{9}$

c) -14

d) $\frac{63}{2}$

e) $\frac{-63}{2}$

105. (CESGRANRIO) As raízes da equação $x^2 + bx + 47 = 0$ são inteiras. Podemos afirmar que:

a) a diferença entre as duas raízes tem módulo 46
b) a soma das duas raízes tem módulo 2
c) b é positivo
d) o módulo da soma das duas raízes é igual a 94
e) b é negativo

106. (FUVEST) A equação $\frac{x}{1-x} + \frac{x-2}{x} - 1 = 0$ tem duas raízes. A soma e o produto dessas raízes são iguais a:

a) -2
b) 0
c) 3
d) -4
e) 1

107. (F.G.V. — SP) O conjunto dos valores de m para que, na equação $mx^2 - (m + 3)x + 2m + 1 = 0$ a diferença das raízes seja igual a 2 é:

a) $\left\{1; \frac{-9}{11}\right\}$

b) $\{0; 1\}$

c) $\left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$

d) $\left\{\frac{-9}{11}; \frac{1}{2}\right\}$

e) $\left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right\}$

108. (MACKENZIE — SP) Um valor de k para o qual uma das raízes da equação $x^2 - 3kx + 5k = 0$ é o dobro da outra, é:

a) $\frac{5}{2}$

b) 2

c) -5

d) -2

e) $\frac{-5}{2}$

109. (U.F. — MG) A soma e o produto das raízes da equação $px^2 + 2(q - 1)x + 6 = 0$ são, respectivamente, -3 e 3. O valor de q é:

a) -4
b) -2
c) 0
d) 2
e) n.d.a.

110. Calcule o produto das raízes reais da equação $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$.

111. Sendo a o menor valor real de x que satisfaz a equação $16x^4 = 81$, podemos afirmar que:

a) $a = -3$

b) $a = -\frac{3}{2}$

c) $a = -\frac{2}{3}$

d) não existe valor real a

e) $a = -4$

112. Sendo $S \subset \mathbb{R}$ o conjunto-solução da equação $2x^4 - 5x^2 + 3 = 0$, podemos afirmar que S possui:

a) apenas um elemento
b) dois elementos
c) três elementos
d) quatro elementos
e) nenhum elemento

Sistema de equações de 1º grau

Solução do sistema

O par (x; y) é solução do sistema de equações $\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = p \\ c \cdot x + d \cdot y = q \end{cases}$ se ele satisfaz ambas as equações do sistema.

Métodos de resolução

- Substituição: isola-se uma das incógnitas numa das equações e substitui-se na outra.
- Adição: transformam-se os coeficientes de uma mesma incógnita em números simétricos; a seguir, soma-se, membro a membro, as equações obtidas.

Scanned by CamScanner

★ EXERCÍCIOS ★

113. Resolver as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{-1 + 2x} = x$ b) $1 + \sqrt{3x - 5} = x$

c) $\sqrt[3]{3x^2 + 3x} = x + 1$ d) $\sqrt{x + 7} = 5 - \sqrt{x + 2}$

e) $\sqrt{21 - 4\sqrt{3x - 6}} = 3$

114. (FUVEST) Subtraindo-se 3 de um certo número, obtém-se o dobro da sua raiz quadrada. Qual é esse número?

115. (FAAP — SP) Resolver a equação $\sqrt{x} + \sqrt{x + 12} = 6$.

116. (F.C. CHAGAS — SP) Se x é um número real tal que $x + \sqrt{x - 1} = 1$, então o valor de x^x é:

a) 0 d) $-\frac{1}{2}$ ou 1

b) 1 e) -1 ou -2

c) 1 ou 2

117. (F.G.V. — SP) O produto das soluções da equação $3\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} = 1$ é:

a) 1 b) 25 c) 16 d) 4 e) 9

118. (PUC — SP) Quantos números inteiros, estritamente positivos, satisfazem a equação $\sqrt{5 - 2x} = \frac{5 - 2x}{\sqrt{5 - 2x}}$?

a) Nenhum b) 1 c) 2 d) 3 e) infinitos

119. (F.M. SANTA CASA — SP) Seja o número real k a solução da equação $\sqrt{x - 2} + x - 2 = 0$. O número k é:

a) par b) irracional c) maior que 10 d) divisor de 9 e) múltiplo de 6

120. Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x + y = 19 \\ x - y = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 2y = 79 \\ 3x - 4y = -15 \end{cases}$

121. (F.C. CHAGAS — SP) Se o par (a, b) é solução do sistema $\begin{cases} 3a + 4b - 10 = 0 \\ -b = 6a + 1 \end{cases}$, então:

a) $a + b = \frac{1}{3}$ b) $\frac{b}{a} = -\frac{9}{2}$ c) $a \cdot b = 2$

d) $a^b = -\frac{8}{9}$ e) $a - b = -11$

122. (PUC — SP) Se $\begin{cases} \frac{3}{11}x + \frac{8}{7}y = 2 \\ \frac{8}{11}x - \frac{1}{7}y = -1 \end{cases}$

então x + y é igual a:

a) $-\frac{5}{77}$ b) $\frac{1}{77}$ c) 1

d) $-\frac{1}{77}$ e) 2

123. (F.G.V. — SP) Numa divisão, o quociente é 8 e o resto, 24. Sabe-se que a soma do dividendo, do divisor, do quociente e do resto é 344. Então, a diferença dividendo menos divisor é:

a) 127 b) -127 c) 100;

d) 248 e) -248

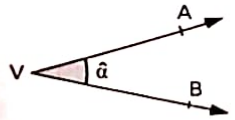
124. (F.G.V. — SP) Somando-se 13 ao numerador de uma fração, esta se torna igual a 1; somando-se 14 ao denominador da fração dada, esta se torna igual a $\frac{1}{2}$. Então, a diferença entre o denominador e o numerador da fração dada é:

a) 12 b) 5 c) 7 d) 1 e) 13

GEOMETRIA PLANA
Elementos básicos

Ângulo

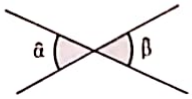
Notação



$\hat{a}$ = âng. $A\hat{V}B$
V : vértice
VA, VB: lados

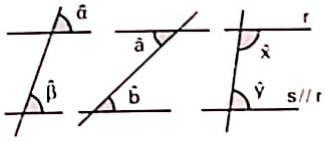
Tipos de ângulos

- Ângulo reto: medida = 90°
- Ângulo agudo: medida entre 0° e 90°
- Ângulo obtuso: medida entre 90° e 180°
- Ângulo raso: medida = 180°
- Ângulos complementares: têm soma 90°
- Ângulos suplementares: têm soma 180°
- Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.):



$\Rightarrow \hat{a} = \hat{\beta}$

Paralelismo de retas



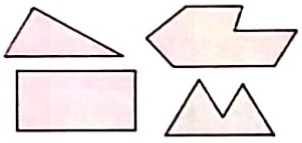
Propriedades

- Ângulos correspondentes: $\hat{a}$ e $\hat{\beta}$ $\Rightarrow$ $\hat{a} = \hat{\beta}$
- Ângulos alternos internos: $\hat{a}$ e $\hat{b}$ $\Rightarrow$ $\hat{a} = \hat{b}$
- Ângulos colaterais: $\hat{x}$ e $\hat{y}$ $\Rightarrow$ $\hat{x} + \hat{y} = 180°$

Polígonos

Conceito

Polígonos são regiões do plano limitadas por uma linha poligonal fechada não entrelaçada; seu contorno é formado apenas por segmentos.



Propriedades de um polígono de n lados

- Soma dos ângulos internos:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

- Soma dos ângulos externos: (só para os convexos) $S_e = 360°$
- Número de diagonais: $D = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$

Polígonos regulares

- Todos os lados de mesma medida c
- Todos os ângulos internos iguais.

Exemplos: triângulo eqüilátero; quadrado.

Scanned by CamScanner

★ EXERCÍCIOS ★

125. $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são dois ângulos consecutivos de medidas 40° e 78°. Calcule o ângulo formado pelas bissetrizes desses ângulos.

126. Se o suplemento de um ângulo é igual ao dobro do próprio ângulo, qual é a medida do ângulo?

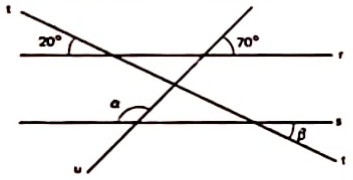
127. Três ângulos consecutivos formam um ângulo raso. Sabendo que suas medidas são expressas em graus, por $x + 30°$, $2x + 10°$ e $3x - 10°$, calcule x.

128. A medida de um ângulo é igual à de seu suplemento; logo, esse ângulo é:
a) nulo b) reto c) raso d) agudo e) obtuso

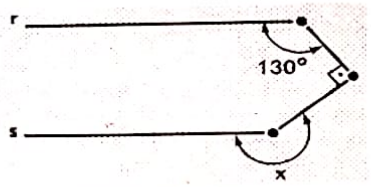
129. As bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares formam um ângulo de:
a) 135° b) 90° c) 120° d) 70° e) 60°

130. Duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, formando quatro ângulos obtusos cuja soma é 440°. Determine a medida de um dos ângulos agudos dessa figura.

131. (F.C. CHAGAS — SP) Na figura seguinte tem-se r // s; t e u são transversais; o valor de $\alpha + \beta$ é:
a) 140°
b) 130°
c) 120°
d) 100°
e) 90°

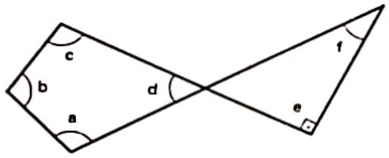


132. Na figura seguinte, as retas r e s são paralelas. A medida x é:
a) 230°
b) 220°
c) 225°
d) 240°
e) 250°

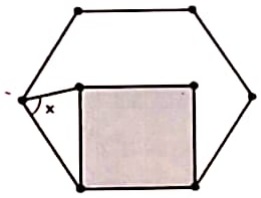


133. Para o decágono regular, calcule:
a) a soma dos ângulos internos
b) a medida de cada ângulo interno
c) o ângulo formado pelas mediatrizes de dois lados consecutivos

134. (FUVEST) Na figura abaixo, os ângulos a, b, c e d medem, respectivamente, $\frac{x}{2}$, 2x, $\frac{3x}{2}$ e x. O ângulo e é reto. Qual a medida do ângulo f?
a) 16°
b) 18°
c) 20°
d) 22°
e) 24°



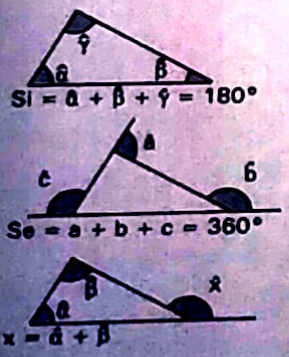
135. Na figura seguinte, temos um hexágono regular e um quadrado; a medida do ângulo x é:
a) 90°
b) 75°
c) 72°
d) 60°
e) 45°



Triângulos
São os polígonos de 3 lados.

Propriedades angulares

Soma dos ângulos internos $S_i = 180°$
Soma dos ângulos externos $S_e = 360°$
Teorema do ângulo externo
Cada ângulo externo é igual à soma dos dois internos não adjacentes.



Elementos lineares

Pontos notáveis

Ortocentro	Intersecção das alturas
Incentro	Intersecção das bissetrizes
Circuncentro	Intersecção das mediatrizes
Baricentro	Intersecção das medianas.

Classificação

Eqüilátero	3 lados iguais: 3 ângulos de 60°
Isósceles	2 lados iguais; ângulos da base têm medidas iguais
Escaleno	Lados todos desiguais
Retângulo	1 ângulo reto; 2 agudos
Acutângulo	3 ângulos agudos
Obtusângulo	1 ângulo obtuso; 2 agudos

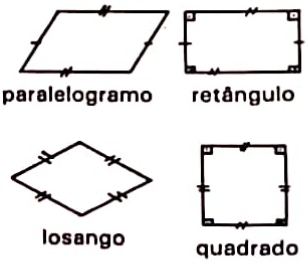
Quadriláteros
São os polígonos de 4 lados.

Propriedades angulares

Soma dos ângulos internos $S_i = 360°$
Soma dos ângulos externos $S_e = 360°$
(só para os convexos)

Paralelogramos

Dois pares de lados opostos paralelos

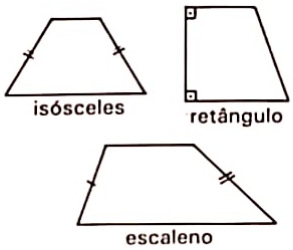


Scanned by CamScanner

Retângulo 4 ângulos retos
Losango 4 lados iguais
Quadrado 4 ângulos retos e 4 lados iguais

Trapézios

Um par de lados opostos paralelos, chamados de bases; os outros dois lados não são paralelos; são oblíquos.



Trapézio isósceles Lados não paralelos são iguais; os ângulos adjacentes das bases são iguais.
Trapézio retângulo Tem dois ângulos retos.
Trapézio escaleno Os lados não paralelos são desiguais.

Quadrilátero inscritível

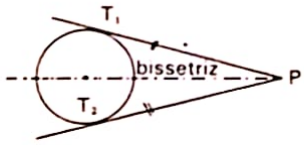
Se e somente se os ângulos opostos somam 180°.

Quadrilátero circunscritível

Se e somente se a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois lados.

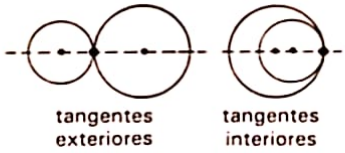
Tangências
Reta e circunferência tangentes

- São tangentes quando têm um único ponto comum.
- O raio traçado no ponto de tangência é perpendicular à reta tangente.
- De um ponto externo a uma circunferência é possível traçar duas tangentes de comprimentos iguais: $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$.
- O centro da circunferência tangente aos lados de um ângulo se encontra na bissetriz desse ângulo.



Circunferências tangentes

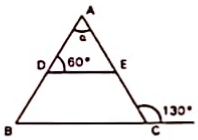
- São tangentes quando têm um único ponto comum.
- O ponto de tangência e os dois centros sempre estão sobre a mesma reta.



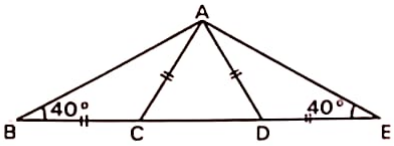
★ EXERCÍCIOS ★

136. (ILHÉUS — ITABUNA — BA) Em um triângulo isósceles, o perímetro mede 80 cm. Sabendo-se que a base vale 20 cm, cada lado deve valer:
a) 10 cm b) 20 cm c) 30 cm d) 40 cm e) 60 cm

137. (MACKENZIE — SP) Na figura, $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$. O valor de α é:
a) 90°
b) 80°
c) 70°
d) 60°
e) 50°



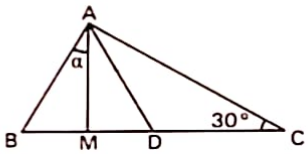
138. (PUC — SP) Na figura: $\overline{BC} = \overline{CA} = \overline{AD} = \overline{DE}$; o ângulo CAD mede:
a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 60°



139. (PUC — SP) Em um triângulo isósceles a média aritmética das medidas de dois de seus ângulos é 50°. A medida de um dos ângulos do triângulo pode ser:
a) 100° b) 90° c) 60° d) 30° e) 20°

OBSERVAÇÃO: a média aritmética entre dois números é a semi-soma desses mesmos números.

140. (MACKENZIE — SP) Na figura, $\overline{BD} = \overline{AD} = \overline{DC}$ e $\overline{BM} = \overline{MD}$. Então α mede:
a) 45°
b) 60°
c) 30°
d) 15°
e) 20°



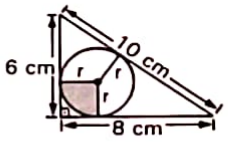
141. Num paralelogramo, as medidas de dois ângulos opostos são dadas pelas expressões $x + 20°$ e $2x - 10°$. Calcule os ângulos do paralelogramo.

142. Num trapézio retângulo, as bases medem 8 cm e 18 cm. Se um dos ângulos internos do trapézio mede 45°, então a altura do trapézio é:
a) 12 cm b) 18 cm c) 8 cm d) 10 cm e) 9 cm

143. Num trapézio isósceles, o ângulo obtuso é o dobro do agudo; as bissetrizes dos ângulos obtusos interceptam-se num ponto pertencente à base maior. Se a base menor mede 8 cm, podemos afirmar que a base média do trapézio mede:
a) 9 cm b) 10 cm c) 12 cm d) 14 cm e) 11 cm

144. Num quadrilátero ABCD, circunscrito a uma circunferência, os lados são AB = 12 cm, BC = 15 cm e CD = 13 cm. Calcule o lado AD.

145. No triângulo retângulo da figura ao lado, calcule o raio r da circunferência inscrita:



Scanned by CamScanner

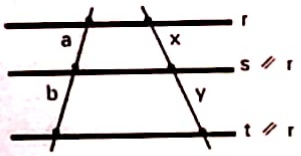
146. (F.C. CHAGAS — SP) Três circunferências, de centros A, B e C, são tangentes externamente duas a duas. Se AB = 9 cm, BC = 13 cm e AC = 16 cm, o raio da maior circunferência mede:

a) 3 cm
b) 6 cm
c) 8 cm
d) 10 cm
e) 12 cm

147. (FUVEST) Os pontos A, B e C pertencem a uma circunferência de centro O. Sabe-se que $\overline{OA}$ é perpendicular a $\overline{OB}$ e forma com $\overline{BC}$ um ângulo de 70°. Então, a tangente à circunferência no ponto C forma com a reta $\overleftrightarrow{OA}$ um ângulo de:

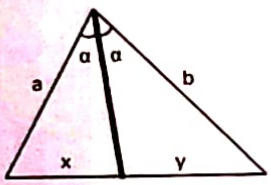
a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 50°

Teorema de Tales



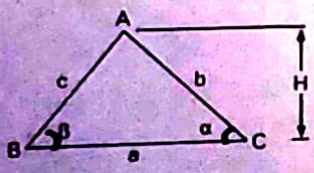
$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

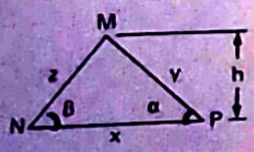
Teorema da bissetriz interna



$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

Semelhança de triângulos





$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} = \hat{N} = \beta \\ \hat{C} = \hat{P} = \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MNP \Rightarrow$$

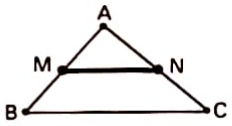
$$\Rightarrow \boxed{\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{per(\Delta ABC)}{per(\Delta MNP)} = k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\text{altura } H}{\text{altura } h} = k}$$

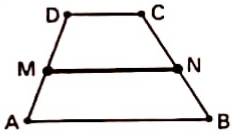
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\text{área } (\Delta ABC)}{\text{área } (\Delta MNP)} = k^2}$$

Aplicações



- M e N: pontos médios

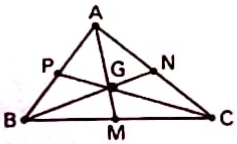
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\overline{MN} \parallel \overline{BC} \\ MN = \dfrac{BC}{2}\end{array}\right.$$



- ABCD: trapézio M e N: pontos médios

$$\boxed{MN = \frac{AB + CD}{2} \text{ (base média)}}$$

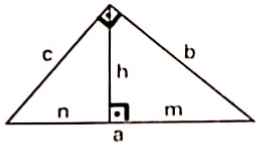
Propriedade do baricentro do triângulo



G: baricentro

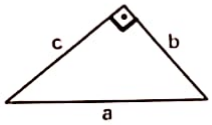
$$\left\{\begin{array}{l}AG = 2 \cdot GM \\ BG = 2 \cdot GN \\ CG = 2 \cdot GP\end{array}\right.$$

Relações métricas em triângulos retângulos



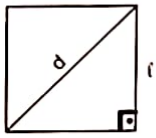
$a \cdot h = b \cdot c$
$h^2 = m \cdot n$
$b^2 = a \cdot m$
$c^2 = a \cdot n$

Teorema de Pitágoras



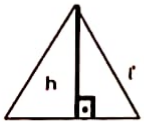
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Diagonal do quadrado



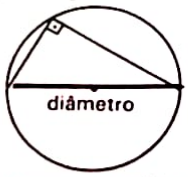
$$\boxed{d = \ell\sqrt{2}}$$

Altura do triângulo eqüilátero



$$\boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

Triângulo retângulo inscrito

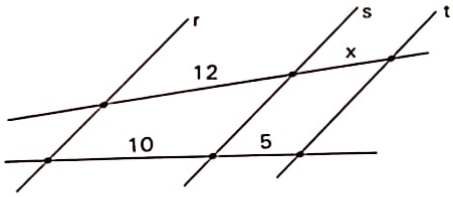


A hipotenusa sempre coincide com um diâmetro da circunferência.

Scanned by CamScanner

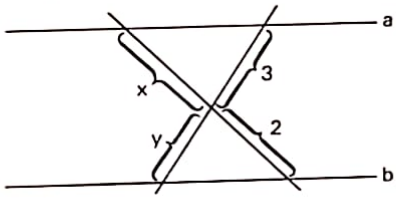
★ EXERCÍCIOS ★

148. Sendo r // s // t, calcule a medida x:

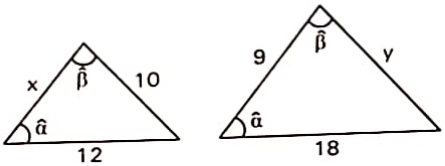


149. Na figura seguinte, em que as retas a e b são paralelas, podemos concluir que:

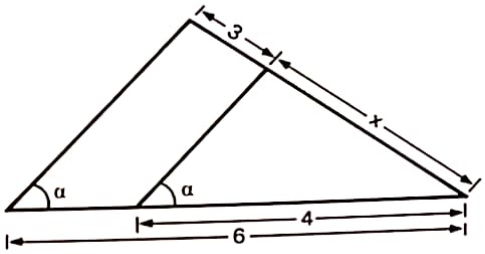
a) $x = 3$ e $y = 2$
b) $x + y = 5$
c) $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$
d) $x \cdot y = 6$
e) $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$



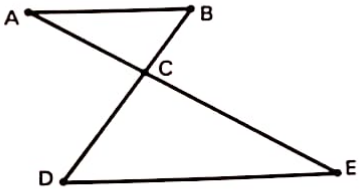
150. Calcule os lados incógnitos dos triângulos da figura:



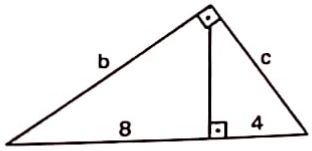
151. Calcule x na figura:



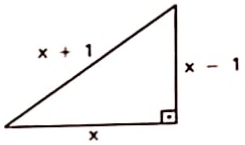
152. Sendo $\overline{AB}$ // $\overline{DE}$, AB = 5 cm, AC = 6 cm, BC = 7 cm e DE = 10 cm, calcule CD e CE.



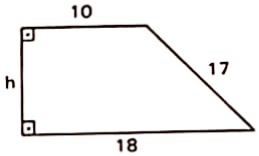
153. Calcule os catetos b e c da figura:



154. Calcule x:

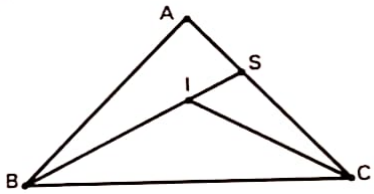


155. Calcule a altura h do trapézio retângulo da figura:

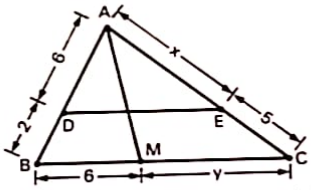


156. Na figura, AB = 6, AC = 7 e BC = 8. Sendo $\overline{BS}$ bissetriz do ângulo $\hat{B}$ e $\overline{CI}$ bissetriz do ângulo $\hat{C}$, a razão $\frac{BI}{IS}$ vale:

a) 2
b) 3
c) 1 : 3
d) 1 : 8
e) 1 : 2



157. (MACKENZIE — SP) Na figura, $\overline{DE}$ é paralela a $\overline{BC}$ e $\overline{AM}$ é bissetriz interna do triângulo ABC. Então x + y é igual a:

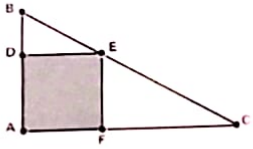


a) 35 b) 30 c) 25 d) 20 e) 15

158. Dois triângulos são semelhantes e seus perímetros medem 60 cm e 48 cm. Sabendo que os lados de um deles medem 25 cm, 20 cm e 15 cm, calcule as medidas dos lados do outro triângulo.

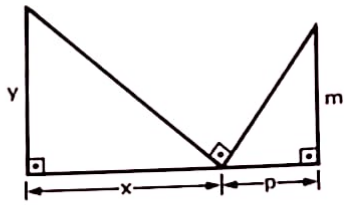
159. (FUVEST) Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, ADEF é um quadrado, AB = 1 e AC = 3. Quanto mede o lado do quadrado?

a) 0,70
b) 0,75
c) 0,80
d) 0,85
e) 0,90



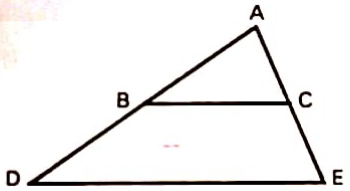
160. (FUVEST) Na figura os ângulos assinalados são retos. Temos necessariamente:

a) $\frac{x}{y} = \frac{p}{m}$
b) $\frac{x}{y} = \frac{m}{p}$
c) $xy = pm$
d) $x^2 + y^2 = p^2 + m^2$
e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{m} + \frac{1}{p}$

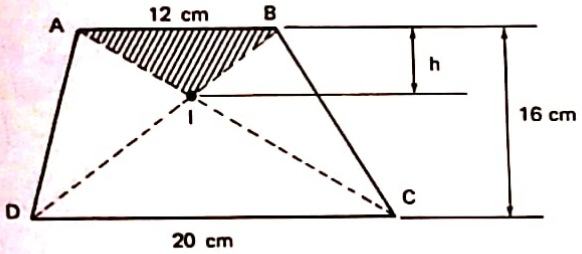


Scanned by CamScanner

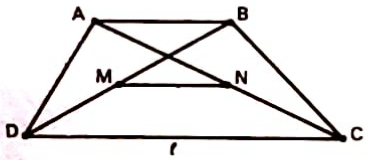
161. (FUVEST) Na figura, $\overline{BC}$ é paralela a $\overline{DE}$, AB = 4 e BD = 5. Determine a razão entre as áreas do triângulo ABC e do trapézio BCDE.



162. No trapézio ABCD da figura seguinte, calcule a altura do triângulo ABI.



163. (FAAP — SP) No trapézio seguinte, o segmento $\overline{MN}$ que une os pontos médios M e N das diagonais e a base $\overline{AB}$ têm ambos 7 cm de comprimento. Calcular o comprimento ℓ da base $\overline{DC}$.



164. (F.G.V. — SP) Em um mapa, a escala utilizada é tal que $1\frac{7}{8}$ cm representam 30 km. A distância real entre dois pontos do mapa distanciados de $6\frac{1}{4}$ cm é:

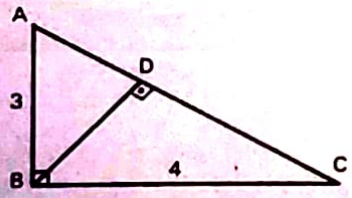
a) 70 km b) 80 km c) 90 km d) 100 km e) 110 km

165. (PUC — SP) Um projetor está a uma distância de 2 metros de uma parede. A que distância da parede deve ser colocado o projetor, para que a área de um quadro projetado aumente 50%?

a) $\sqrt{6}$ m b) $2\sqrt{3}$ m c) 3m d) 4,5 m e) $3\sqrt{2}$ m

166. (MACKENZIE — SP) Na figura, o triângulo ABC é retângulo em B e $\overline{BD}$ é perpendicular a $\overline{AC}$. A área do triângulo BCD é:

a) 5,5
b) 4,3
c) 3,84
d) 3,5
e) 2

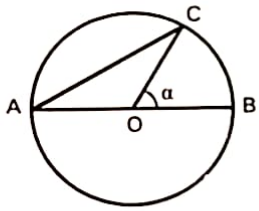


167. (F.M. Santa Casa — SP) Seja $\overline{BC}$ a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles. Se a mediana $\overline{BM}$ mede $\sqrt{5}$ cm, o perímetro desse triângulo, em cm, é:

a) $4\sqrt{2}$ b) $6\sqrt{2}$ c) $6 + \sqrt{2}$ d) $2 + 2\sqrt{2}$ e) $4 + 2\sqrt{2}$

168. (PUC-SP) No círculo abaixo, O é o centro, AB = 2 e AC = $\sqrt{3}$. Então α vale:

a) 75° b) 60° c) 30° d) 45° e) 15°



169. (F.C. CHAGAS — SP) Um quadrado e um triângulo eqüilátero têm perímetros iguais. Se a diagonal do quadrado mede $9\sqrt{2}$ m, então a altura do triângulo, em m, é:

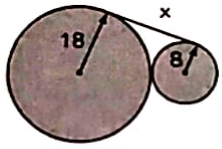
a) $\sqrt{3/2}$
b) $\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{3}$
d) $4\sqrt{3}$
e) $6\sqrt{3}$

170. (FEI — SP) É dado um triângulo ABC, retângulo em B, cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem 4 cm e 3 cm, respectivamente. Seja **r** a reta perpendicular à hipotenusa $\overline{AC}$ no ponto C e D a intersecção de **r** com a reta $\overline{AB}$. Determine a medida do segmento $\overline{CD}$.

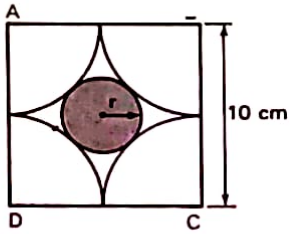
171. (FUVEST) Qual a hipotenusa do triângulo retângulo isósceles cujo perímetro é igual a 2?

172. (FUVEST) Uma escada de 25 dm de comprimento se apóia num muro do qual seu pé dista 7 dm. Se o pé da escada se afastar mais 8 dm do muro, qual o deslocamento verificado pela extremidade superior da escada?

173. Na figura seguinte, calcule o comprimento x da tangente comum externa às circunferências.



174. Calcule o raio r da circunferência da figura, sabendo que ela é tangente aos quatro arcos de circunferência que têm centros nos vértices do quadrado ABCD e raios iguais à metade do lado do quadrado.

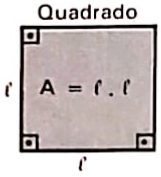


Scanned by CamScanner

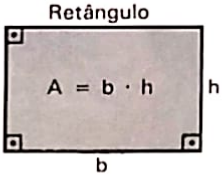
Áreas das figuras planas

Áreas dos polígonos

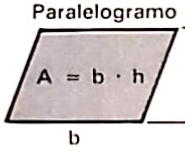
Quadrado



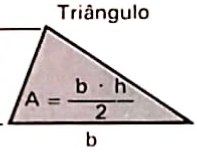
Retângulo



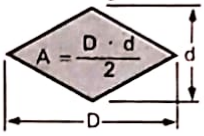
Paralelogramo



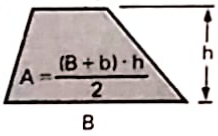
Triângulo

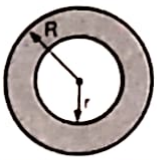


Losango



Trapézio





$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$

Área do círculo e suas partes

$A = \pi \cdot R^2$

$A = \dfrac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360}$

OBSERVAÇÃO: O comprimento de uma circunferência de raio R é

$C = 2 \cdot \pi \cdot R$

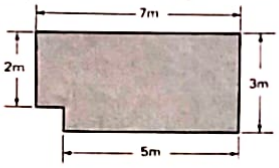
★ EXERCÍCIOS ★

175. (FUVEST) Um dos catetos de um triângulo retângulo mede 2 e a hipotenusa mede 6. A área do triângulo é:
a) $2\sqrt{2}$ b) 6 c) $4\sqrt{2}$ d) 3 e) $\sqrt{6}$

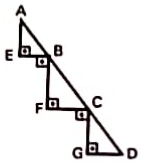
176. (FUVEST) Num triângulo retângulo T os catetos medem 10 m e 20 m. A altura relativa à hipotenusa divide T em dois triângulos, cujas áreas, em m², são:
a) 10 e 90 b) 20 e 80 c) 25 e 75 d) 36 e 64 e) 50 e 50

177. (UNESP) A área de um trapézio isósceles de lados de medidas 2, 5, 10 e 5 é igual a:
a) 24 b) 22 c) 20 d) 20 e) 18

178. (CESGRANRIO) A área da sala representada na figura é:
a) 15 m²
b) 17 m²
c) 19 m²
d) 20 m²
e) 21 m²



179. (F.M. SANTA CASA — SP) Na figura, se AD = 50, AE = 4, EB = 3 e CD = 10, então a área do triângulo BFC é:
a) 294
b) 120
c) 84
d) 24
e) 12



180. (FUVEST) Um comício político lotou uma praça semicircular de 130 m de raio. Admitindo uma ocupação média de 4 pessoas por m², qual é a melhor estimativa do número de pessoas presentes?
a) dez mil
b) cem mil
c) meio milhão
d) um milhão
e) muito mais do que um milhão

181. (F.G.V. — SP) Quando o comprimento de uma circunferência passa de 1 m para 2 m, o raio aumenta de:
a) 1 m b) π m c) $2/\pi$ m d) $1/\pi$ m e) $1/2\pi$ m

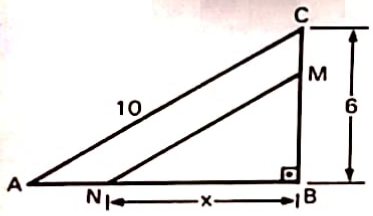
182. (FEI — SP) Os pontos A, B e C determinam um triângulo eqüilátero cuja área é $\sqrt{3}$ m². D, E e F são pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. A medida do segmento $\overline{FE}$ é:
a) 1 m b) 2 m c) $\sqrt{3}$ m d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ m e) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ m

183. (FUVEST) Num triângulo ABC tem-se AB = 6 cm, AC = BC = 5 cm.
a) Ache a área do triângulo ABC
b) Sendo M o ponto médio de AB, calcule a distância de M à reta $\overline{BC}$.

184. (FUVEST) Um arco de circunferência mede 300° e seu comprimento é 2 km. Qual o número inteiro mais próximo da medida do raio, em metros?
a) 157 b) 284 c) 382 d) 628 e) 764

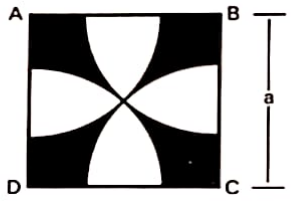
185. (FAAP) No triângulo retângulo seguinte, temos BN = = x cm, BC = 6 cm, AC = 10 cm e a reta $\overline{MN}$ é paralela à reta $\overline{AC}$. Determinar:
a) a área do triângulo ABC
b) o valor de x para o qual a área do triângulo NBM é igual à área do trapézio NMCA

Scanned by CamScanner



186. (FUVEST) Um triângulo tem 12 cm de perímetro e 6 cm² de área. Quanto mede o raio da circunferência inscrita nesse triângulo?

187. (FAAP) Na figura seguinte, ABCD é um quadrado de centro O e a parte hachurada é limitada por quartos de circunferências centradas nos vértices e passando por O. Calcule a área da figura hachurada.



★ Respostas ★

1. a) F, b) V, c) V, d) F, e) V, f) F; **2.** d; **3.** d; **4.** e; **5.** a; **6.** d; **7.** c; **8.** b; **9.** e; **10.** a) $-1/15$, b) $1/20$; **11.** c; **12.** b; **13.** d; **14.** c; **15.** a; **16.** d; **17.** e; **18.** c; **19.** e; **20.** e; **21.** c; **22.** c; **23.** e; **24.** c; **25.** b; **26.** c; **27.** b; **28.** d; **29.** a; **30.** c; **31.** a) 64, b) -32, c) 1, d) 9, e) $1/5$, f) -9, g) 64, h) 512; **32.** a) 4, b) 1, c) 25, d) 36; **33.** a) 5, b) 5, c) 2, d) -4; **34.** a) $6\sqrt{2}$, b) $3\sqrt{3}$, c) $6\sqrt{5}$, d) $4\sqrt[3]{10}$, e) $5\sqrt[3]{2}$, f) $2\sqrt[4]{8}$, g) 60; **35.** a) $6\sqrt{35}$, b) $240\sqrt[3]{6}$, c) $2\sqrt{3}$, d) $2\sqrt[5]{6}$, e) $5\sqrt{3}$, f) $\sqrt{2}$, g) $74\sqrt{2}$, h) $28\sqrt[3]{2}$; **36.** a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, b) $6\sqrt{2}$, c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$, e) $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$, f) $\sqrt[8]{16}$; **37.** b; **38.** e; **39.** d; **40.** a; **41.** d; **42.** d; **43.** c; **44.** a; **45.** c; **46.** c; **47.** c; **48.** c; **49.** d; **50.** a; **51.** b; **52.** b; **53.** d; **54.** d; **55.** d; **56.** d; **57.** a; **58.** e; **59.** e; **60.** a) $16x^2 + 8$ b) $5x - 7$ c) $ax^3 + bx^3 - x^2$; **61.** a) $4a^2 + 12ab + 9b^2$, b) $x^4 - 1$, c) $x^2 - 2xy + y^2 + -a^2$; **62.** a) $x \cdot (3x + 2)$, b) $x \cdot (5x^2 + 4x + 3)$, c) $2ab \cdot (a + 2b)$ d) $2ab^2 \cdot (b - 3a)$; **63.** a) $(x + 1) \cdot (a - b)$; b) $a \cdot (x + 1)$; c) $ax \cdot (a + x)$, d) $(x + 1) \cdot (a - b)$; **64.** a) $(x + y) \cdot (a^2 + b^2)$, b) $2a^3 \cdot (b - 1)^2 \cdot (2a + b - 1)$, c) $(2x + 3y) \cdot (a - 2b)$, d) $(2X - 1) \cdot (x + 2y)$; **65.** $(3x - 1) \cdot (3x + 1)$, b) $(2y - 3) \cdot (2y + 3)$, c) $(x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2})$, d) $(x - 1/x) \cdot (x + 1/x)$; **66.** a) $(x + y + a) \cdot (x + y - a)$, b) $(2x + y) \cdot (-y)$, c) $(a + 2b) \cdot (a - 2b)$, d) $(a + 2b) \cdot (a - 2b + 1)$; **67.** a) $(x + 3)^2$, b) $(x - 3)^2$ c) $(x^2 + 1)^2$, d) $(3x - 1)^2$; **68.** a) $(x + 3 - y) \cdot (x + 3 + y)$, b) $(x - 3 - y) \cdot (x - 3 + y)$, c) $(x - a - b) \cdot (x + a + b)$, d) $(10 + x - 2y) \cdot (10 - x + 2y)$; **69.** a) $(x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$, b) $(3 - x) \cdot (9 + 3x + x^2)$, c) $(2 + xy) \cdot (4 - 2xy + x^2y^2)$, d) $(x - 3y) \cdot (x^2 + 3xy + 9y^2)$; **70.** a) $(x + 1/x) \cdot (x^2 - 1 + 1/x^2)$, b) $(x^2 + 1) \cdot (x^4 - x^2 + 1)$, c) $(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$; **71.** a) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$, b) $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$ d) $-3 - 2\sqrt{2}$ e) $\frac{47 + 12\sqrt{15}}{7}$; **72.** a; **73.** b; **74.** c; **75.** b; **76.** a; **77.** d; **78.** b; **79.** a; **80.** d; **81.** d; **82.** a; **83.** e; **84.** a; **85.** e; **86.** a) 1, b) 5, c) 6, d) 29/33, e) -4, f) $-46/85$, g) 3, h) 12; **87.** a) $\{0; 5\}$, b) $\{0; 1/3\}$, c) $\{-3; 3\}$, d) $\{-1/2; 1/2\}$, e) $\{-1; 1\}$; **88.** a) $\varnothing$, b) $\{4 - \sqrt{15}; 4 + \sqrt{15}\}$, c) $\left\{\frac{1 - \sqrt{10}}{3}; \frac{1 + \sqrt{10}}{3}\right\}$, d) $\{-3; -2\}$, e) $\{0; \sqrt{2}\}$; **89.** a) $\{-3; -1; 1; 3\}$, b) $\{-1; -1/2; 1/2; 1\}$, c) $\{0\}$, d) $\{-1/2; 1/2\}$, e) $\{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$; **90.** c; **91.** c; **92.** c; **93.** 12; **94.** b; **95.** a; **96.** c; **97.** c; **98.** c; **99.** e; **100.** $\{-1/3; 1\}$; **101.** a) $\left\{1; 2; \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$, b) $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$, c) $\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{2/3}$; **102.** $\{2/3; 3/4\}$; **103.** a; **104.** a; **105.** a; **106.** a; **107.** a; **108.** a; **109.** e; **110.** -25; **111.** b; **112.** d; **113.** a) $\{1\}$, b) $\{3; 2\}$, c) $\{-1\}$, d) $\{2\}$, e) $\{5\}$; **114.** 9; **115.** 4; **116.** b; **117.** d; **118.** c; **119.** a; **120.** a) $(15; 4)$, b) $(11; 12)$; **121.** b; **122.** c; **123.** d; **124.** e; **125.** 59°; **126.** 60°; **127.** 25°; **128.** b; **129.** b; **130.** 70°; **131.** b; **132.** b; **133.** 1440°; 144°; 36°; **134.** b; **135.** b; **136.** c; **137.** c; **138.** b; **139.** e; **140.** c; **141.** 50°; 130°; **142.** d; **143.** c; **144.** 10 cm; **145.** 2 cm; **146.** d; **147.** d; **148.** 6; **149.** d; **150.** $x = 6$; $y = 15$; **151.** 6; **152.** 14 cm; 12 cm; **153.** $4\sqrt{6}$; $4\sqrt{3}$; **154.** 4; **155.** 15; **156.** a; **157.** b; **158.** 20 cm; 16 cm; 12 cm; **159.** b; **160.** b; **161.** 16/65; **162.** 6 cm; **163.** 21 cm; **164.** d; **165.** a; **166.** c; **167.** e; **168.** b; **169.** e; **170.** 3,75 cm; **171.** $2(\sqrt{2} - 1)$; **172.** 4 dm; **173.** 24; **174.** $5(\sqrt{2} - 1)$; **175.** c; **176.** b; **177.** e; **178.** c; **179.** a; **180.** b; **181.** e; **182.** a; **183.** 12 cm²; 2,4 cm; **184.** c; **185.** 24 cm²; $4\sqrt{2}$ cm; **186.** 1 cm; **187.** $(4 - \pi) \cdot a^2/2$.

Scanned by CamScanner

RESUMOS E EXERCÍCIOS

Correspondem a Matemática — páginas 49 a 96

FUNÇÕES

Relações binárias

Par ordenado: entende-se por (x, y), lê-se "par ordenado xy", um conceito primitivo caracterizado pela igualdade:

$$(x; y) = (a; b) \Leftrightarrow x = a \text{ e } y = b$$

Produto cartesiano:

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

OBSERVAÇÃO $A \times A = A^2$.

Relação: Chama-se relação de A em B a todo subconjunto de $A \times B$, indica-se: $R : A \to B$.

Estudo da função

Uma relação $R : A \to B$ será uma função de A em B, se e somente se:

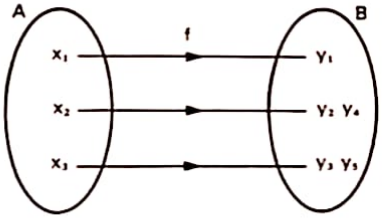
- $D(R) = A$
- Cada elemento $x \in A$ se relaciona (forma par) com um único elemento de B.

Notação: $f : A \to B$ ou $y = f(x)$

Exemplo: A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $y = 3x$ (ou $f(x) = 3x$), é a função que associa cada número real x com o seu triplo.

Domínio: $f : A \to B : D(f) = A$

Imagem: $f : A \to B : Im(f)$ é o conjunto dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$, tal que $(x, y) \in f$. Note que $Im(f) \subset B$. Acompanhe no exemplo:



$f : A \to B$

$D(f) = A = \{x_1; x_2; x_3\}$

$Im(f) = \{y_1; y_2; y_3\}$

Contra-domínio: $CD(f) = B$

★ EXERCÍCIOS ★

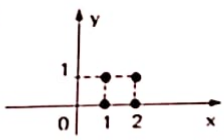
1. Sendo $A = \{0, 1\}$ e $B = \{2, 3\}$, o produto cartesiano $A \times B$ é:

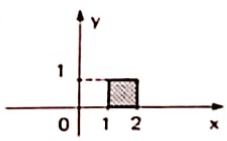
a) $\{(0, 2), (0, 3)\}$;
b) $\{(0, 2), (1, 3)\}$;
c) igual ao produto $B \times A$;
d) $\{(0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3)\}$;
e) constituído de 8 pares ordenados distintos.

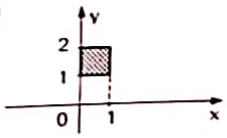
2. (CESGRANRIO) Sejam $F = \{1, 2, 3, 4\}$ e $G = \{3, 4, 7\}$. Então:

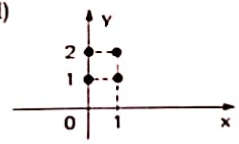
a) $F \times G$ tem 12 elementos;
b) $G \times F$ tem 9 elementos;
c) $F \cup G$ tem 7 elementos;
d) $F \cap G$ tem 3 elementos;
e) $(F \cup G) \cap F = \varnothing$.

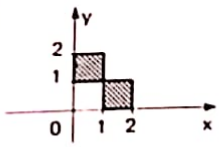
3. Sendo $A = [1, 2]$ e $B = [0, 1]$, a representação de $A \times B$ no plano cartesiano é:

a)


b)


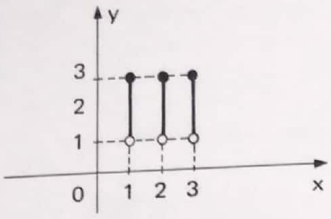
c)


d)


e)


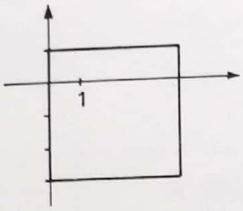
Scanned by CamScanner

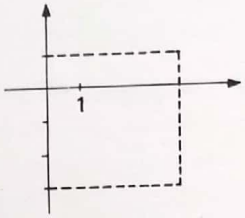
4. O gráfico abaixo representa o conjunto:

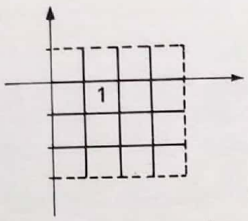


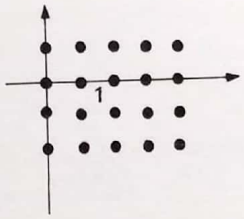
a) $]1, 3] \times \{1, 2, 3\}$;
b) $[1, 3] \times]1, 3]$;
c) $\{2, 3\} \times]1, 3]$;
d) $\{1, 2, 3\} \times \{2, 3\}$;
e) $\{1, 2, 3\} \times]1, 3]$.

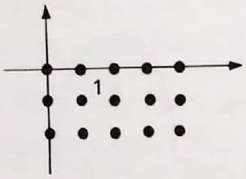
5. (UNIV. FED. DA BAHIA) Sendo $R = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$ e $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 1\}$, o gráfico cartesiano de $R \times S$ é:

a)


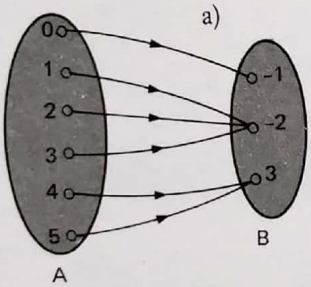
b)


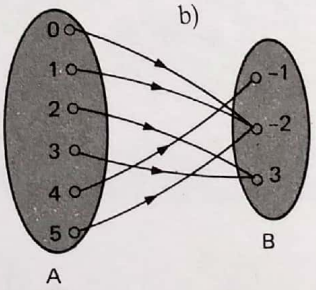
c)


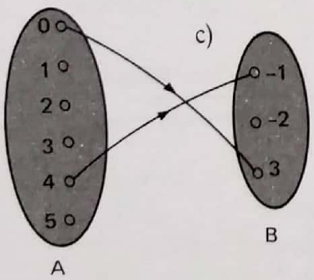
d)


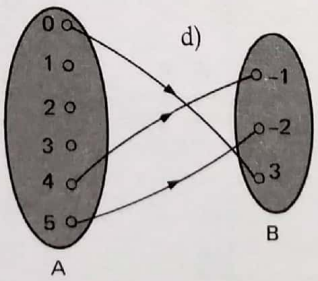
e)


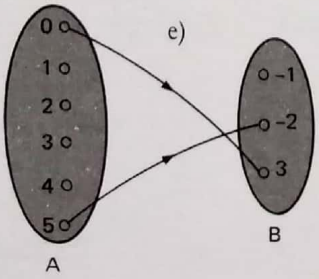
6. Sendo $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, -2, 3\}$, a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 3\}$ fica representada por um dos diagramas abaixo. Assinale-o:

a)


b)


c)


d)


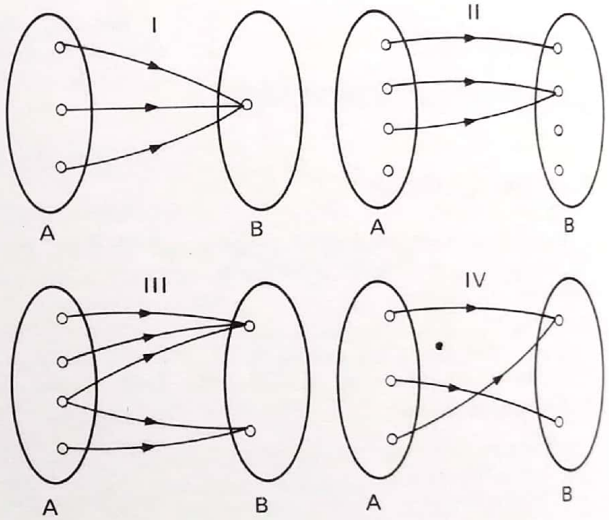
e)


7. Sendo $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$ e $B = \{-2, 0, 2\}$, a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y^2 = 5\}$ é tal que:
a) $R = \{(1, -2), (1, 2)\}$;
b) $R = \{(1, -2), (-1, -2), (1, 2), (-1, 2)\}$;
c) $R = \{(-1, -2), (-1, 2)\}$;
d) $R = \{(0, -2), (0, 0), (0, 2), (1, -2)\}$;

8. (CESGRANRIO) Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros. Sejam ainda os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \leqslant 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Então, se $D = \{(x, y) \in A \times B \mid y \geqslant x + 4\}$, tem-se que:
a) $D = A \times B$;
b) D tem dois elementos;
c) D tem um elemento;
d) D tem três elementos;
e) as quatro afirmativas anteriores são falsas.

9. (PUC-SP) Dizemos que uma relação entre dois conjuntos A e B é uma função ou aplicação de A em B quando todo elemento de
a) B é imagem de algum elemento de A;
b) B é imagem de um único elemento de A;
c) A possui somente uma imagem em B;
d) A possui no mínimo uma imagem em B;
e) A possui somente uma imagem em B e vice-versa.

10. Dados os diagramas:



podemos afirmar que:
a) I, II e IV representam funções de A em B;
b) I, III e IV representam funções de A em B;
c) I e IV representam funções de A em B;
d) IV não representa função de A em B;
e) todos representam funções de A em B.

11. (UNIV. FED-RG) Sendo $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4\}$, então, podemos definir, no máximo:
a) uma função de A em B;
b) duas funções de A em B;
c) três funções de A em B;
d) quatro funções de A em B;
e) cinco funções de A em B.

12. (FUVEST-SP) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associa a x o número $\dfrac{1}{1 + x^2}$. Quanto vale $f(\sqrt[4]{7})$?
a) $1 - \sqrt{7}$;
b) $\dfrac{\sqrt{7} - 1}{6}$;
c) $\dfrac{\sqrt{7} - 1}{8}$;
d) $1 - \dfrac{\sqrt{7}}{7}$;
e) $0{,}\overline{0714285}$.

13. (FUVEST-SP) As funções f e g são dadas por $f(x) = \dfrac{3}{5}x - 1$ e $g(x) = \dfrac{4}{3}x + a$. Sabe-se que $f(0) - g(0) = \dfrac{1}{3}$. O valor de $f(3) - 3g\left(\dfrac{1}{5}\right)$ é
a) 0;
b) 1;
c) 2;
d) 3;
e) 4.

Scanned by CamScanner

14. Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$, é correto afirmar que:

a) $f(0) = 0$;
b) $f(1) = f(-1)$;
c) $f(1) + f(0) = f(2)$;
d) $f(0) \cdot f(2) = 4$;
e) $f(1) + f(2) + f(3) = 10$.

15. (MACK-SP) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$. Então $f(x) \cdot f(y)$ é igual a:

a) $f(x \cdot y)$;
b) $f(x - y)$;
c) $f(x + y)$;
d) $f\left(\frac{x}{y}\right)$;
e) $f(\sqrt{x \cdot y})$.

16. Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 2}$, então:

a) existem dois valores distintos de x para os quais $f(x) = 0$;
b) existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$;
c) O número 2 não pertence à imagem de f;
d) O número $\frac{1}{4}$ pertence à imagem de f;
e) $f(-1) = -2$.

17. Se $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é tal que:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}, \text{ temos que:}$$

a) $f(0) = 0$ e $f(3) = 1$;
b) a imagem de f é o conjunto dos naturais ímpares;
c) os números 2, 3 e 5 não pertencem à imagem de f;
d) existem números naturais distintos p e q tais que $f(p) = f(q)$;
e) existem números naturais distintos p e q tais que $f(p) = f(q) = 0$.

18. (UNIV.FED.DA BAHIA) Sendo $P = \{1, 2, 3\}$, o conjunto imagem de $R = \{(x, y) \in P \times P \mid y = x + 1\}$ é:

a) $\{1, 2, 3\}$; b) $\{2, 3, 4\}$; c) $\{2, 3\}$; d) $\{1, 2\}$; e) $\{1, 3\}$.

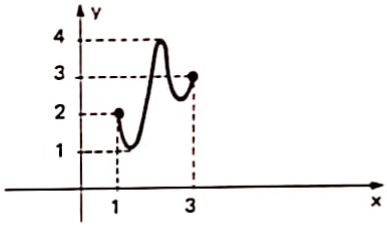
19. (CESGRANRIO) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. O conjunto dos pontos de intersecção do gráfico de f com uma reta vertical:

a) possui exatamente dois elementos;
b) é vazio;
c) é não enumerável;
d) possui, pelo menos, dois elementos;
e) possui um só elemento.

20. (GV-SP) Duas curvas A e B se interceptam nos pontos (0, 3) e (0, −3). Assinale, dentre as afirmações abaixo, a correta:

a) A e B podem ser representações gráficas de funções;
b) somente A ou B poderá ser a representação gráfica de uma função;
c) nem A nem B poderá ser a representação gráfica de uma função;
d) A ou B é a representação gráfica da função dada por $y^2 = 9 - x^2$;
e) A ou B é a representação gráfica da função dada por $x = 0$.

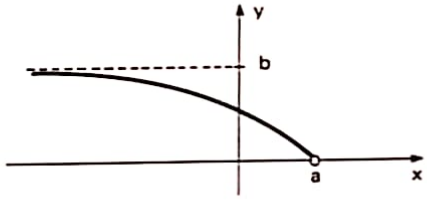
21. O diagrama seguinte representa uma função f do intervalo [1, 3] em $\mathbb{R}$.



Quanto à imagem de f é correto afirmar que:

a) $Im(f) = [1, 4]$;
b) $Im(f) = [2, 3]$;
c) $Im(f) =]1, 4[$;
d) $Im(f) =]2, 3[$;
e) $Im(f) = [1, 3]$.

22. (PUC-SP) Para a função cujo gráfico é:



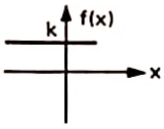
podemos dizer que:

a) O domínio é $\mathbb{R}$;
b) O conjunto imagem é $\mathbb{R}_+$;
c) O domínio é o conjunto $\mathbb{R} - \{a\}$;
d) O conjunto imagem é $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;
e) O conjunto imagem é $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < b\}$.

Principais funções

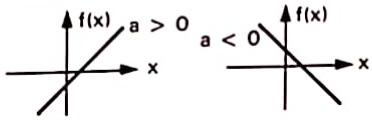
Função constante:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = k (k \in \mathbb{R})$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \{k\}$
- Gráfico:



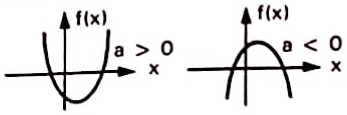
Função do 1º grau:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a \cdot x + b \ (a \neq 0)$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \mathbb{R}$
- Gráfico:



Função do 2º grau:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- Gráfico:



- coordenadas do vértice:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

- valor máximo e valor mínimo:

se $a > 0$, valor mínimo $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$

se $a < 0$, valor máximo $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$

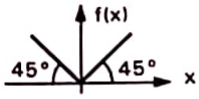
- imagem:

se $a > 0$, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant y_v\}$

se $a < 0$, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant y_v\}$

Função modular:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \mathbb{R}_+$
- Gráfico:

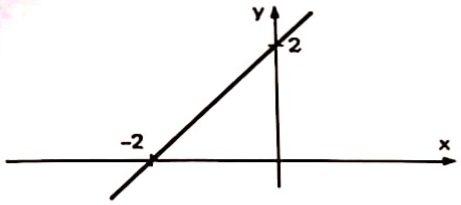


Scanned by CamScanner

★ EXERCÍCIOS ★

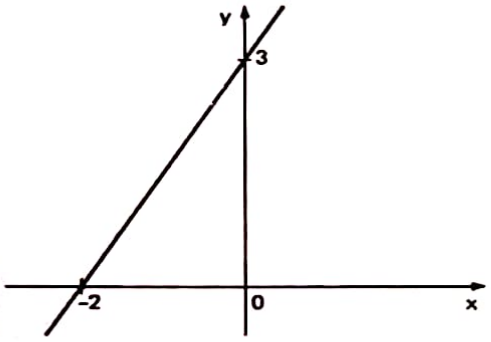
23. (CESESP-PE) Considere a função polinomial do primeiro grau $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$). Qual dentre as seguintes alternativas é a verdadeira?
a) se $b > 0$, então a função é crescente;
b) se $b < 0$, então a função é decrescente;
c) se $a > -1$, então a função é crescente;
d) se $a < 1$, então a função é decrescente;
e) se $a > 0$, então a função é crescente.

24. O gráfico da função $f(x) = ax + b$ é o seguinte:



Pode-se concluir que as constantes a e b valem, respectivamente:
a) -2 e 2;
b) 2 e -2;
c) 1 e 2;
d) 2 e -1;
e) 1 e -2.

25. (FUND. CARLOS CHAGAS-SP) A figura seguinte representa a função $y = mx + t$.



O valor da função no ponto $x = -\frac{1}{3}$ é:
a) 2,8; b) 2,6; c) 2,5; d) 1,8; e) 1,7.

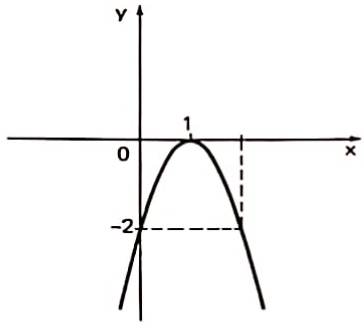
26. (FUND. CARLOS CHAGAS-SP) Para que os pontos $(1, 3)$ e $(3, -1)$ pertençam ao gráfico da função dada por $f(x) = ax + b$, o valor de $b - a$ deve ser:
a) 7; b) 5; c) 3; d) -3; e) -7.

27. (UNIV. FED. DA BAHIA) Esboçar o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ para } -1 \leqslant x \leqslant 2{,}5 \\ 2{,}5, \text{ para } x > 2{,}5 \end{cases}$$

28. Se f e g são funções reais definidas por $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$ e $g(x) = \frac{x}{3} - 1$, então, ocorre $g(a) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ se, e somente se:
a) $a = -\frac{15}{2}$;
b) $a = \frac{5}{2}$;
c) $a = \frac{15}{3}$;
d) $a = \frac{15}{2}$;
e) $a = \frac{1}{2}$.

29. (FUND.CARLOS CHAGAS-SP) O gráfico seguinte representa a função:

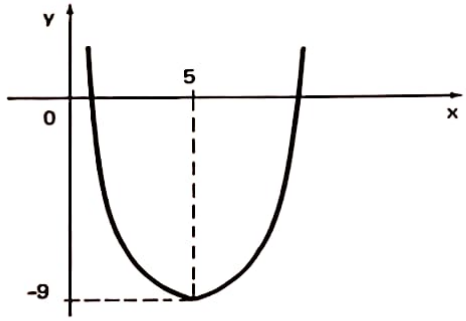


a) $y = +2x^2 + 4x + 2$;
b) $y = +2x^2 - 4x + 2$;
c) $y = -2x^2 + 4x - 2$;
d) $y = -2x^2 - 4x + 1$;
e) $y = -2x^2 + 4x - 1$.

30. (CESGRANRIO) Uma conta perfurada de um colar é enfiada em uma arame fino com o formato da parábola $y = x^2 - 6$. Do ponto P de coordenadas $(4, 10)$ deixa-se a conta deslizar no arame até chegar ao ponto Q de ordenada -6. A distância horizontal percorrida pela conta (diferença entre as abscissas de P e Q) é:
a) 12; b) 4; c) 6; d) 3; e) 5.

31. (FUNDAÇÃO CARLOS CHAGAS-RS) Se os pontos $(0, 6)$, $(2, 4)$ e $(3, 0)$ pertencem ao gráfico de $y = ax^2 + bx + c$, então $a + b + c =$
a) -6;
b) 6;
c) 0;
d) -5;
e) 5.

32. (CESGRANRIO) O gráfico do trinômio do 2º grau $ax^2 - 10x + c$ é o da figura:



Podemos concluir que:
a) $a = 1$ e $c = 16$;
b) $a = 1$ e $c = 10$;
c) $a = 5$ e $c = -9$;
d) $a = -1$ e $c = 10$;
e) $a = -1$ e $c = 16$.

33. (UNIV. FED. DA BAHIA) Em um reservatório de água, o nível y varia com o tempo t, contado em horas a partir da meia-noite, conforme a função $y = -1{,}3t^2 + 7{,}8t - 4{,}2$. O instante em que o reservatório está mais cheio é:
a) 1 h 18 min;
b) 1 h 30 min;
c) 3 h;
d) 6 h;
e) 7 h 48 min.

Scanned by CamScanner

34. (FUNDAÇÃO CARLOS CHAGAS-SP) Representar o gráfico da função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{para } x \leqslant 0 \\ x^2, & \text{para } 0 < x \leqslant 1 \\ \sqrt{x}, & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

35. (CESGRANRIO) O valor máximo de $21n - 2n^2$, $n \in \mathbb{Z}$, é

a) $\frac{241}{4}$;
b) $\frac{543}{8}$;
c) 22;
d) 55;
e) 61.

36. (CEUB-BRASÍLIA) A função quadrática $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, de modo que $f(1) = 3$ e tenha um mínimo no ponto $(3, -1)$, é:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$;
b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$;
c) $f(x) = x^2 + 4x - 5$;
d) $f(x) = 3x^2 + 5x - 6$.

37. (UNESP) Seja $m \in \mathbb{R}$. Se o maior valor numérico de $y = mx^2 - 2x + m - 1$, para $x \in \mathbb{R}$, é 3, então:

a) $m = 1 - \sqrt{2}$;
b) $m = -1 - \sqrt{8}$;
c) $m = -2 + \sqrt{2}$;
d) $m = -1 \pm \sqrt{2}$;
e) n.d.a.

38. (UNIV. FED. DA BAHIA) O conjunto imagem da função $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$ é:

a) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 20\}$;
b) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -10\}$;
c) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -5\}$;
d) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -2\}$;
e) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1\}$.

39. (PUC-SP) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $y = -2x^2 + 10x - 12$, admite como conjunto imagem o conjunto:

a) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 1/2\}$;
b) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1/2\}$;
c) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 5/2\}$;
d) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 5/2\}$;
e) $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$.

40. Dar a imagem da função $f: [-1; 3] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 + 1$.

41. (CESGRANRIO) Os gráficos de $f(x) = x$ e $g(x) = |x^2 - 1|$ têm dois pontos em comum. Determinar a soma das abcissas dos pontos em comum.

42. (UF-MG) Se $f(x) = 1 - |x - 1|$ para $x \in [0; 2]$, esboçar o gráfico de $f(x)$.

43. (ITA-SP) Considere a equação $|x| = x - 6$. Com respeito à solução real desta equação podemos afirmar que:

a) A solução pertence ao intervalo $[1; 2]$;
b) A solução pertence ao intervalo $[-2; -1]$;
c) A solução pertence ao intervalo $]-1; 1[$;
d) A solução pertence ao complementar da união dos intervalos anteriores;
e) A equação não tem solução.

44. (PUC-RS) Esboçar o gráfico da função $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x| - 1$.

45. (FGV) Dado $f(x) = 2x^2 + 7x - 15$, assinale a afirmativa falsa:

a) $f(0) = -15$;
b) $f\left(\frac{3}{2}\right) = f(-5) = 0$;
c) A função atinge um máximo quando $x = 7/8$;
d) $f(-1) = -20$;
e) se $f(x) = 0$, então $x = 3/2$ ou $x = -5$.

46. (PUC) O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 + ax + 3$ passa pelo ponto $P(1; 2)$. Logo:

a) $a = -1$;
b) $a = 3$;
c) $a = 2$;
d) $a = 1$;
e) $a = -2$.

47. (CESGRANRIO) Os gráficos de $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 - 1$ têm dois pontos em comum. A soma das abcissas dos pontos em comum é:

a) $\sqrt{5}$;
b) 1;
c) -1;
d) $-\sqrt{5}$;
e) 0.

48. (FATEC) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x^2, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

então $f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1 - \sqrt{2}) + 3f\left(\frac{3}{10}\right)$ é igual a:

a) $6 - 2\sqrt{2}$;
b) $7 - 2\sqrt{2}$;
c) $\frac{11}{4} + \sqrt{2}$;
d) $5 - 2\sqrt{2}$;
e) $2\sqrt{2}$.

49. (MACK) O vértice da parábola $y = x^2 + kx + m$ é o ponto $V(-1; -4)$. O valor de $k + m$ é:

a) -2;
b) -1;
c) 0;
d) 1;
e) 2.

50. (U.F-BA) Sendo $f(x) = 100x + 3$, o valor de $\frac{f(10^{-8}) - f(10^3)}{10^{-8} - 10^3}$ é:

a) 10^4;
b) 10^2;
c) 10;
d) 10^{-5};
e) 10^{-11}.

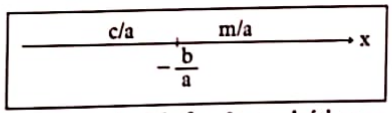
51. (FAAP) Que tipo de curva representa a função: $y = tx^2 + x + 1$ se:

a) $t = 0$
b) $t \neq 0$

Sinal das funções do 1º e 2º graus

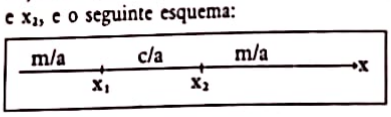
Estudo do sinal da f. do 1º grau: na função $y = a \cdot x + b$ (com $a \neq 0$); fazendo $y = 0$ obtemos $x = -\frac{b}{a}$ que é o zero (ou raiz) da função.

Para fazer o estudo do sinal usamos o seguinte esquema:

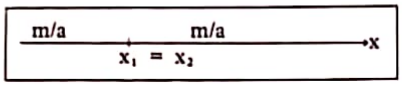


Estudo do sinal da função quadrática: na função $y = ax^2 + b \cdot x + c$ (com $a \neq 0$) temos 3 casos a considerar:

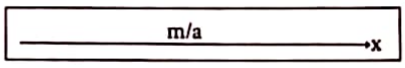
1º) $\Delta > 0$; temos duas raízes reais distintas x_1 e x_2, e o seguinte esquema:



2º) $\Delta = 0$; temos duas raízes reais iguais e o esquema de sinal será:



3º) $\Delta < 0$; não temos raízes reais e aplicamos o seguinte esquema:



Scanned by CamScanner

★ EXERCÍCIOS ★

52. (CESESP-PE) Assinale a alternativa correspondente aos valores de x, para os quais a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ | $f(x) = -\frac{2x}{3} + \frac{1}{4}$ é sempre negativa.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$;
b) $x \geqslant \frac{3}{8}$;
c) $x > \frac{3}{8}$;
d) $x \neq 0$;
e) $\nexists x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2x}{3} + \frac{1}{4} < 0$.

53. A função $f(x) = ax + b$, com $a > 0$, é:

a) positiva, se $x < -\frac{b}{a}$;
b) negativa, se $x > -\frac{b}{a}$;
c) decrescente;
d) positivo, se $x > -\frac{b}{a}$;
e) nula para $x = -a$.

54. A função $y = x^2 - 1$

a) toma valores positivos, se $-1 < x < 1$;
b) toma valores negativos, se $-1 < x < 1$;
c) toma valores negativos, se $x < -1$ ou $x > 1$;
d) toma valores não negativos, qualquer que seja o valor atribuído a x;
e) toma valores não positivos, qualquer que seja o valor atribuído a x.

55. (PUC-SP) O trinômio $-x^2 + 3x - 4$:

a) é positivo para todo número real x;
b) é negativo para todo número real x;
c) muda de sinal quando x percorre o conjunto de todos os números reais;
d) é positivo para $1 < x < 4$;
e) é positivo para $x < 1$ ou $x > 4$.

56. (CESESP-PE) Seja f a função quadrática definida por $f(x) = -3x^2 + 6x - 3$. Qual dentre as seguintes alternativas é a verdadeira?

a) Qualquer que seja o valor atribuído a x, a função toma sempre um valor menor ou igual a zero;
b) A função toma valores positivos para os valores de x tais que $-2 < x < 1$;
c) A função toma valores positivos para os valores de x tais que $x < -2$ ou $x > 1$;
d) Para qualquer valor atribuído a x, a função toma sempre um valor maior ou igual a zero;
e) A função toma valores negativos apenas para os valores de x tais que $-1 < x < 1$.

57. A condição necessária e suficiente para que a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$, seja positiva para qualquer valor real de x é:

a) $\Delta = b^2 - 4ac = 0$;
b) $\Delta = b^2 - 4ac > 0$;
c) $\Delta = b^2 - 4ac < 0$;
d) $c < 0$;
e) $b = 0$ e $c < 0$.

58. A condição necessária e suficiente para que a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$, seja negativa para qualquer valor real de x é:

a) $\Delta = b^2 - 4ac = 0$;
b) $\Delta = b^2 - 4ac > 0$;
c) $\Delta = b^2 - 4ac < 0$;
d) $c < 0$;
e) $b = 0$ e $c < 0$.

59. (FUNDAÇÃO CARLOS CHAGAS-SP) Qual dos conjuntos abaixo é unitário?

a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 1\}$;
b) $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < 2x < 4\}$;
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$;
d) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$;
e) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 > 0\}$.

60. (CESGRANRIO) O conjunto solução da inequação $x^2 - 3x < 10$ é:

a) $]-\infty, -2[$;
b) $]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$;
c) $]-2, 5[$;
d) $]0, 3[$;
e) $]3, 10[$.

61. (PUC-SP) Para qual dos seguintes conjuntos de valores de m o polinômio $P(x) = mx^2 + 2(-m-2)x + m^2 + 4$ é negativo quando $x = 1$?

a) $1 < m < 2$;
b) $-1 < m < 2$;
c) $-5 < m < -4$;
d) $-3 < m < 2$;
e) $0 < m < 1$.

62. (PUC-SP) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leqslant 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, então $A \cap \overline{B}$, onde $\overline{B}$ é o complementar de B em relação a $\mathbb{R}$, é igual a:

a) $\{2\}$;
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leqslant 3\}$;
c) vazio;
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$;
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

63. (FGV-SP) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 2x^2 \geqslant 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 \leqslant 0\}$, então $(A \cup B) \cap C$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$;
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$;
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$;
d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ ou } \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$;
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

64. O sistema de inequações $\begin{cases} 2x - 3 \geqslant x - 1 \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \end{cases}$ é satisfeito por todo número real x tal que:

a) $x \leqslant 1$;
b) $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 0$;
c) $x \geqslant 2$;
d) $x \leqslant -1$;
e) $x \geqslant -2$.

65. (UNESP) A sentença $2x + 3 < 3x + 2 < 3x + 1$:

a) é verdadeira, $\forall x \in \mathbb{R}$;
b) é falsa, $\forall x \in \mathbb{R}$;
c) é verdadeira para $x \in]-\infty, 0]$;
d) é verdadeira para $x \in [0, +\infty[$;
e) é falsa somente para $x \in [-1, 1]$.

66. Se $(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0$, então:

a) $x < 1$ ou $x > 3$;
b) $x < 1$ ou $2 < x < 3$;
c) $x > 1$;
d) $1 < x < 2$ ou $x > 3$;
e) $x < 3$.

67. (FUND. GETÚLIO VARGAS-SP) Sendo A o conjunto solução da inequação $(x^2 - 5x)(x^2 - 8x + 12) < 0$, assinale a alternativa correta:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\} \subset A$;
b) $0 \in A$;
c) $5{,}5 \in A$;
d) $-1 \in A$;
e) $\frac{9}{2} \in A$.

Scanned by CamScanner

68. (UNIV. DE BRASÍLIA) A inequação $-x^3+2x^2>-3x$, onde x é uma variável real, é satisfeita:
a) para os x reais tais que $-1 < x < 3$ e apenas estes;
b) para os x reais tais que $x < -1$ ou $x > 3$ e apenas estes;
c) para os x reais tais que $0 < x < 3$ e apenas estes;
d) n.d.a.

69. (UNESP) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)^2x > x\}$. Então:
a) $A = \mathbb{R} - \{1\}$;
b) $A =]2, +\infty[$;
c) $A = \mathbb{R} - \{0\}$;
d) $A = [1, +\infty[$;
e) n.d.a.

70. (PUC-SP) Os valores de x que verificam $\frac{x^2-5x+6}{x-2} < 0$ são expressos por:
a) $x < 3$;
b) $2 < x < 3$;
c) $x < 2$ ou $x > 3$;
d) $x \neq 2$;
e) $x < 3$ e $x \neq 2$.

71. (FUNDAÇÃO CARLOS CHAGAS-SP) Os valores de x que satisfazem à inequação $\frac{-2x^2+3x+2}{x-2} \leqslant 0$ são tais que:
a) $x \leqslant -\frac{1}{2}$;
b) $x > 2$;
c) $-\frac{1}{2} \leqslant x < 2$;
d) $x \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $x > 2$;
e) $x \geqslant -\frac{1}{2}$ e $x \neq 2$.

72. (UNIV. FED. DE SERGIPE) Os valores de x que satisfazem a inequação $\frac{x-1}{x+1} < 1$ são tais que:
a) $x < -1$;
b) $x < 0$;
c) $x > -1$;
d) $x > 0$;
e) $x > 1$.

73. (FUVEST) Resolva
$2x - 3 + 5\left(\frac{1}{x}+1\right) \leqslant 1$.

74. (U.F-Minas Gerais) O conjunto de todos os valores de x que satisfazem à desigualdade $\frac{1}{x+1} > \frac{1}{x}$ é:
a) vazio;
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$;
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$;
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$;
e) o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

75. (UNESP) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} > 1\}$. Então:
a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 3\}$;
b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 0\}$;
c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 0\}$;
d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$;
e) n.d.a.

76. (MACKENZIE-SP) Se f e g são funções reais dadas por $f(x) = x - 1$ e $g(x) = x^2 + 1$, então $(g \circ f)(2)$ é:
a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

77. (FUND. CARLOS CHAGAS-SP) Dadas as funções reais $f(x) = 1 - 2x$ e $g(x) = 2x + k$, o valor de k de modo que $f[g(x)] = g[f(x)]$ é:
a) -3; b) -1; c) $-\frac{1}{3}$; d) $\frac{1}{3}$; e) 1.

78. (FUVEST-SP) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é da forma $f(x) = ax + b$ e verifica $f(f(x)) = x + 1$ para todo x real, então a e b valem, respectivamente:
a) 1 e $\frac{1}{2}$;
b) -1 e $\frac{1}{2}$;
c) 1 e 2;
d) 1 e -2;
e) 1 e 1.

79. (FUND. GETÚLIO VARGAS-SP) Sejam f e g funções reais tais que $f(x) = x^2 + 1$ e $g(y) = \frac{1}{y}$. Então $f(g(2))$ é igual a:
a) 0;
b) $\frac{5}{4}$;
c) $\frac{2}{5}$;
d) $\frac{5}{2}$;
e) $\frac{1}{5}$.

80. (FGV) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 2x^2 \geqslant 0\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$ e
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 \leqslant 0\}$, então
$(A \cup B) \cap C$ é:
a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ ou } \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$;
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$;
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$;
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$;
e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$.

81. (UFB) Determinar o conjunto de valores de x que tornam $f(x) = 2x^2 - 3x$ negativa.

82. (MACK) Resolver a inequação: $t + \frac{1}{t} \leqslant -2$.

83. (MACK) O conjunto solução da inequação $\frac{2x-4}{x-2} \geqslant 0$ é:
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$;
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$;
c) $\mathbb{R}$;
d) $\varnothing$;
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$.

84. (MED. JUNDIAÍ) As funções f e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, são tais que $f(x) = ax + 2$ e $g(x) = 3x + p$. Sabendo-se que $f(3) = -1$ e $g(-2) = -1$, então, $f(x) \geqslant g(x)$ se, e somente se,
a) $-\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 0$;
b) $-\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 2$;
c) $-1 \leqslant x \leqslant 5$;
d) $x \leqslant -\frac{3}{4}$;
e) $x \geqslant 2$.

85. (FAAP) Representar na reta o conjunto dos x reais tais que: $(x-2)\cdot(5-x) > x^2 - 4$.

86. (MAPOFEI) É dada a função:
$y = (2x^2-9x-5)\cdot(x^2-2x+2)$. Determinar:
a) Os pontos de intersecção do gráfico da função com os eixos das abcissas;
b) O conjunto de valores de x para os quais $y \leqslant 0$.

87. (FUVEST) Considere a parábola de equação
$y = x^2 + mx + 4m$.
a) Achar a intersecção da parábola com o eixo x, quando $m = -2$.
b) Determine o conjunto dos valores de m para os quais a parábola não corta o eixo x.

88. (FEI) O domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x-1}}$ é:
a) $1 < x \leqslant 3$ ou $x \geqslant 4$;
b) $1 < x < 3$ ou $x < 4$;
c) $-1 < x \leqslant 3$ ou $x \geqslant 4$;
d) $x < 1$ ou $x \geqslant 4$;
e) $-1 \leqslant x \leqslant 3$ ou $x > 4$.

Scanned by CamScanner

TRIGONOMETRIA

Medidas de arcos e ângulos

Grau: 360° é a medida de uma circunferência.

Radiano: arco de comprimento igual ao raio; 2π rad é a medida de uma circunferência.

Conversão: Grau ↔ Radiano

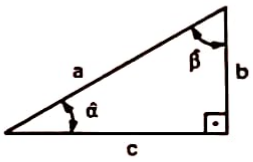
$360° = 2\pi$ rad
$180° = \pi$ rad

Para converter x graus em y rad usamos a regra de três:

$$\begin{cases} 180° \leftrightarrow \pi \text{ rad} \\ x° \leftrightarrow y \text{ rad} \end{cases}$$

Trigonometria do triângulo

Triângulo retângulo:



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{b}{a};$$

$$\text{sen } \beta = \frac{c}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{c}{a};$$

$$\cos \beta = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{b}{c};$$

$$\text{tg } \beta = \frac{c}{b}$$

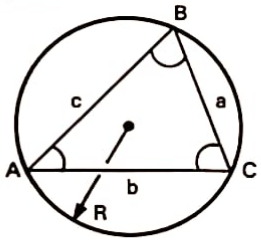
$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \text{sen } \beta \end{cases}$$

Valores notáveis:

x	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
sen x	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos x	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2
tg x	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
	30°	45°	60°

Triângulos quaisquer:

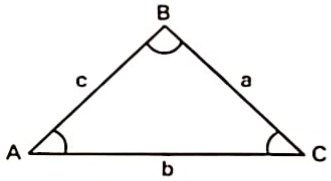
• lei dos senos



(R = raio da circunferência circunscrita)

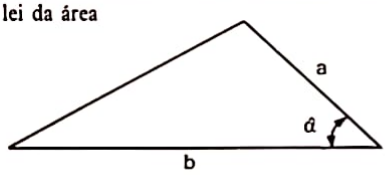
$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2 \cdot R$$

• lei dos cossenos



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot ac \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos \hat{C}$$

• lei da área



$$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } \alpha}{2}$$

(S = área do triângulo)

se α̂ é um ângulo obtuso ($90° < \alpha < 180°$), então:

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } (180° - \alpha)$$
$$\cos \alpha = -\cos (180° - \alpha)$$

★ EXERCÍCIOS ★

89. Numa circunferência de raio 5 cm, um arco tem comprimento 15 cm. Qual a medida deste arco em radianos?

90. Numa dada circunferência, um arco de comprimento 20 cm mede 4 radianos; qual o comprimento desta circunferência em centímetros?

91. Escrever em graus os arcos de:

a) $\frac{2\pi}{5}$ rad;
b) $\frac{7\pi}{6}$ rad;
c) $\frac{5\pi}{18}$ rad;
d) $\frac{3\pi}{4}$ rad.

92. Escrever em radianos os arcos de:

a) 75°;
b) 67°30′;
c) 40°;
d) 225°.

93. (UNIV. FED. DE MINAS GERAIS) Sendo A = = 88°20′, B = 31°40′ e C = $\frac{\pi}{3}$ radianos, a expressão A + B − C é igual a:

a) $\frac{2\pi}{3}$ radianos;
b) 116°40′;
c) 86°40′;
d) 115°;
e) nenhuma anterior.

94. (FUND. CARLOS CHAGAS-SE) Se a medida de um arco é $\dfrac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}}{\frac{3}{4}}$ radianos, a sua medida, em graus é:

a) 40;
b) 96;
c) 112,5;
d) 200;
e) 450.

95. (PUC-SP) Um automóvel percorre uma estrada no sentido de norte para sul. Num determinado instante, o automóvel faz uma curva à esquerda, percorrendo um arco igual à oitava parte de uma circunferência, continuando em linha reta. Em que direção o automóvel estará indo após sair da curva?

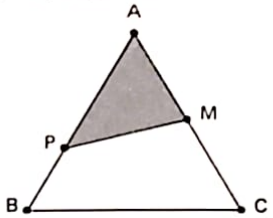
a) nordeste;
b) oeste;
c) sudoeste;
d) leste;
e) sudeste.

96. (CESGRANRIO) Em um triângulo ABC, AB = = 3, BC = 4 e AB̂C = 60°. O lado AC mede:

a) 5;
b) $\sqrt{13}$;
c) $\sqrt{37}$;
d) $2\sqrt{3}$;
e) $3\sqrt{3}$.

Scanned by CamScanner

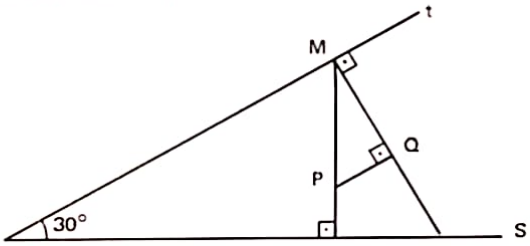
97. (FUVEST-SP) ABC é equilátero de lado 4, AM = = MC = 2, AP = 3 e PB = 1.



O perímetro do triângulo APM é:

a) $5 + \sqrt{7}$;
b) $5 + \sqrt{10}$;
c) $5 + \sqrt{19}$;
d) $5 + \sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$;
e) $5 + \sqrt{13 + 6\sqrt{3}}$.

98. (FUVEST-SP)



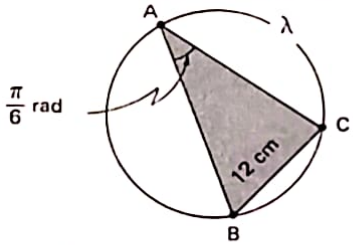
Dados: MP ⊥ s; MQ ⊥ t; MQ ⊥ PQ; MP = 6. Então PQ é igual a:

a) $3\sqrt{3}$;
b) 3;
c) $6\sqrt{3}$;
d) $4\sqrt{3}$;
e) $2\sqrt{3}$.

99. (FUVEST-SP) Numa circunferência está inscrito um triângulo ABC; seu lado $\overline{BC}$ é igual ao raio da circunferência. O ângulo $B\hat{A}C$ mede:

a) 15°; b) 30°; c) 36°; d) 45°; e) 60°.

100. (SANTA CASA-SP) A figura seguinte mostra o triângulo ABC, inscrito na circunferência (λ) de raio R.



O ângulo $\hat{A}$ vale $\frac{\pi}{6}$ rad e o lado oposto ao ângulo dado vale 12 cm. Então, o valor do diâmetro da circunferência é:

a) 12 cm;
b) 6 cm;
c) 18 cm;
d) 30 cm;
e) 24 cm.

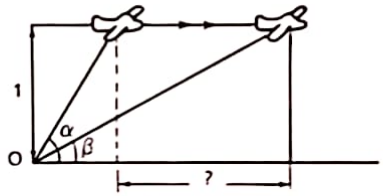
101. (PUC-CAMPINAS-SP) Um triângulo ABC é tal que: $\hat{B} = 60°$, AB = 8 cm e BC = 5 cm. O lado $\overline{AC}$, desse triângulo, medirá:

a) 6 cm;
b) 9 cm;
c) 10 cm;
d) 12 cm;
e) n.d.a.

102. (FUVEST-SP) Um móvel parte de A e segue numa direção que forma com a reta $\overleftrightarrow{AC}$ um ângulo de 30°. Sabe-se que o móvel caminha com uma velocidade constante de 50 km/h. Após 3 horas de percurso, a distância a que o móvel se encontra da reta $\overleftrightarrow{AC}$ é de:

a) 75 km;
b) $50\sqrt{3}$ km;
c) $75\sqrt{3}$ km;
d) $75\sqrt{2}$ km;
e) 50 km.

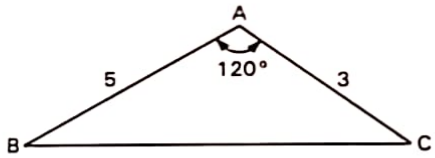
103. (FUND. CARLOS CHAGAS-SP)



Um avião voa numa reta horizontal da altura 1 em relação a um observador 0, situado na projeção horizontal da trajetória. No instante t_0 é visto sob ângulo α e no instante t_1 sob ângulo β. A distância percorrida pelo avião no intervalo $(t_0 ; t_1)$ é:

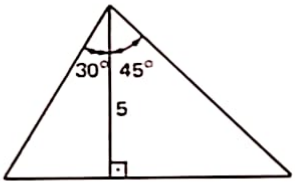
a) cotg β − cotg α;
b) tg α − tg β;
c) sen α − sen β;
d) cos β − cos α;
e) tg β − tg α.

104. (MACK-SP) Na figura, a área do triângulo ABC é:



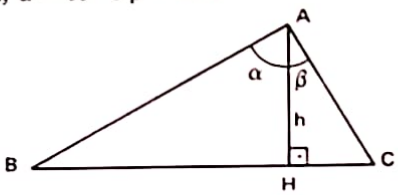
a) $(15\sqrt{3}) \cdot 4^{-1}$;
b) $(15\sqrt{3}) \cdot 2^{-1}$;
c) 15/2;
d) $(15\sqrt{2}) \cdot 4^{-1}$;
e) 15/4.

105. (FUND. CARLOS CHAGAS-SP) A área do triângulo representado na figura seguinte é:

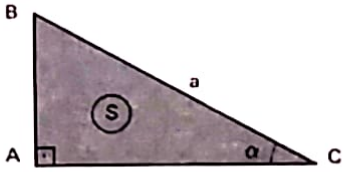


a) $\frac{125\sqrt{3}}{2}$;
b) $\frac{25}{2}(1 + \sqrt{3})$;
c) $\frac{25}{3}(3 + \sqrt{3})$;
d) $\frac{25}{6}(3 + \sqrt{3})$;
e) $\frac{5}{12}(3\sqrt{2} + 10\sqrt{3})$.

106. Calcule a área S do triângulo seguinte, sendo h = 4 cm; $\hat{\alpha} = 60°$ e $\hat{\beta} = 45°$.

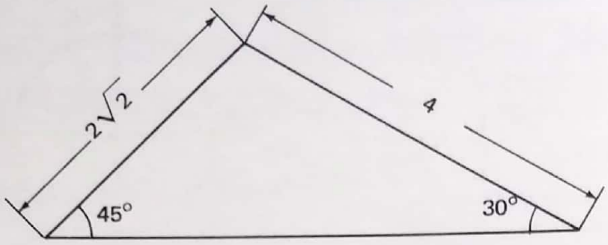


107. Determine a área S do triângulo da figura seguinte, dados a hipotenusa a e o ângulo $\hat{\alpha}$.



Scanned by CamScanner

108. (F.G.V-SP) A área do triângulo abaixo é:

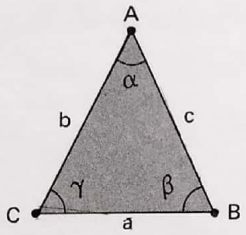


a) 4; c) $2(\sqrt{2} + 1)$; e) $(\sqrt{3} + 1)$.
b) $(\sqrt{2} + 1)$; d) $2(\sqrt{3} + 1)$;

109. (MACK-SP) Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8 e 12 e formam um ângulo de 60°. As diagonais medem:
a) 4 e $4\sqrt{7}$; c) $4\sqrt{7}$ e $4\sqrt{17}$; e) 4 e 4,5.
b) $4\sqrt{7}$ e $4\sqrt{19}$; d) $4\sqrt{17}$ e $4\sqrt{19}$;

110. (PUC-SP) No triângulo abaixo, a = 20, b = 25 e $\gamma = 60°$.

Então, sen α é igual a:



a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$; d) $\frac{2}{\sqrt{10}}$;
b) $\frac{2}{\sqrt{7}}$; e) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$;

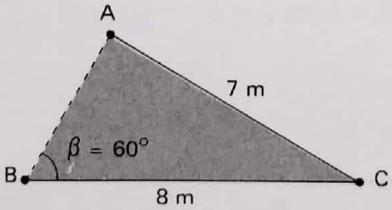
111. Num triângulo ABC, retângulo em A, a bissetriz interna, relativa ao vértice B, divide o cateto em duas partes tais que uma é o dobro da outra. Calcular o ângulo $\hat{B}$.

112. (FUVEST-SP) No triângulo retângulo ABC, os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $2 + \sqrt{3}$ e 1, respectivamente. Seja D um ponto de $\overline{AB}$ tal que AD = AC. Calcule tg (α + β), onde α e β são, respectivamente, as medidas de $A\hat{D}C$ e $A\hat{B}C$.

113. (FUVEST-SP) Um trapézio isósceles está circunscrito a uma circunferência de raio 2 e tem um ângulo agudo de 60°. Determine a área do trapézio.

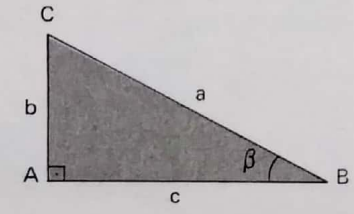
114. (UNIV. DE BRASÍLIA) Um triângulo ABC tem para lados: $a = x^2 + x + 1$, $b = 2x + 1$ e $c = x^2 - 1$. Então $\hat{A}$ vale:
a) 120°; b) 60°; c) 45°; d) 30°.

115. (Mauá - SP)



No triângulo ABC, temos: AC = 7 m, BC = 8 m, β = $A\hat{B}C$ = 60°. Determine a área do triângulo.

116. (PUC-SP)



A área S do triângulo retângulo ABC é:
a) $S = \frac{a^2 \cos 2\beta}{4}$; b) $S = \frac{a^2 \operatorname{tg} \beta}{2}$; c) $S = \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 \beta}{4}$;
d) $S = \frac{a^2 \operatorname{sen} \beta}{4}$; e) $S = \frac{a^2 \operatorname{sen} 2\beta}{4}$.

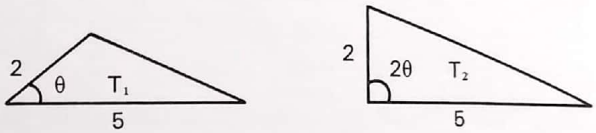
117. (FUVEST) Em um plano tem-se um quadrado de lado a, uma reta r paralela a um lado do quadrado e uma reta t que forma com r um ângulo agudo θ. Projeta-se o quadrado sobre r paralelamente a t e obtém-se um segmento de comprimento 3a. Determine tg θ.

118. (GV-SP) No círculo trigonométrico, o triângulo de lados $|\operatorname{sen} x|$, $|\cos x|$ e seu raio tem por área A. Então:
a) $A = 0{,}25\ |\operatorname{sen} x|$; d) $A = 0{,}25\ |\operatorname{sen} 2x|$;
b) $A = 0{,}50\ |\operatorname{sen} x|$; e) $A = 3\ |\operatorname{sen} 2x|$.
c) A é sempre menor que 0,2;

119. (CESGRANRIO) Os catetos de um triângulo medem senα e cosα. Se o perímetro do triângulo vale $1 + \sqrt{(3/2)}$, o menor ângulo do triângulo mede:
a) 15°; b) 22°30'; c) 25°; d) 27°30'; e) 30°.

120. (MACK-SP) Os ângulos internos A e 2A de um triângulo têm como medidas dos lados opostos, respectivamente, os valores 1 e $\sqrt{2}$ O ângulo A mede:
a) 90°; b) 60°; c) 45°; d) 30°; e) 15°.

121. (UNESP) A área do triângulo T_1 é 3; então, a área do triângulo T_2 da figura seguinte é:



a) 6; b) 5,4; c) 4,8; d) 4,2; e) 3,6.

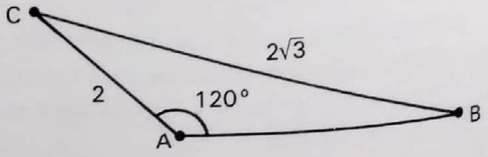
122. (FUVEST-SP) Dois pontos A e B estão situados na margem de um rio e distantes 40 m um do outro. Um ponto C, na outra margem do rio, está situado de tal modo que o ângulo $C\hat{A}B$ mede 75° e o ângulo $A\hat{C}B$ mede 75°. Determine a largura do rio.
a) 40 m; b) 30 m; c) 25 m; d) 20 m; e) $20\sqrt{3}$ m.

123. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - 5 \cdot \operatorname{sen} x + 6$. A afirmação falsa é:
a) $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$; d) $f(x) \leqslant 12, \forall x \in \mathbb{R}$;
b) $f(x) \geqslant 2, \forall x \in \mathbb{R}$; e) $f(x) \leqslant 20, \forall x \in \mathbb{R}$.
c) $f(x) \geqslant 6, \forall x \in \mathbb{R}$;

124. (FATEC-SP) Se α, β e γ são as medidas dos ângulos internos de um triângulo obtusângulo e $\gamma > \alpha + \beta$ então é FALSO que:
a) $\operatorname{tg}\gamma < \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; d) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta < 1$;
b) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\operatorname{tg}\gamma$; e) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma > 1$.
c) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tg}\gamma \neq 1$;

125. Dois lados de um triângulo medem $\sqrt{6}$ cm e 4 cm e formam um ângulo de 75°. Calcule a área do triângulo.

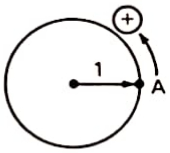
126. (UFOP-MG) Determine a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo seguinte:



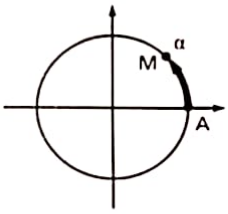
Scanned by CamScanner

Seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico

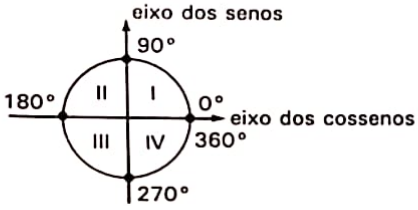
Ciclo trigonométrico é uma circunferência com:
- raio igual a 1;
- ponto origem dos arcos: A;
- orientação: sentido positivo é o anti-horário.



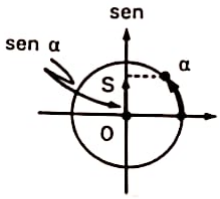
Arco trigonométrico de medida α:
- tem origem A (origem dos arcos)
- orientação positiva se $\alpha > 0$
  negativa se $\alpha < 0$



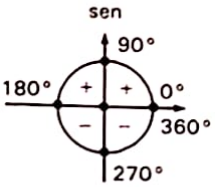
Quadrante



Seno
Definição

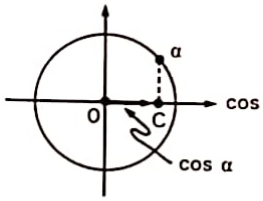


Sinais

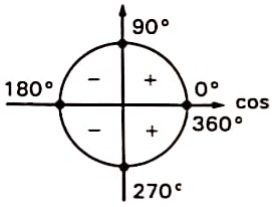


α	0°	90°	180°	270°	360°
senα	0	1	0	−1	0

Cosseno
Definição

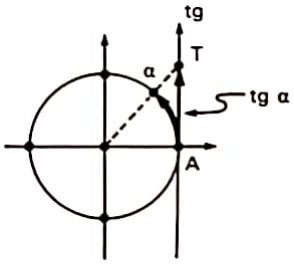


Sinais

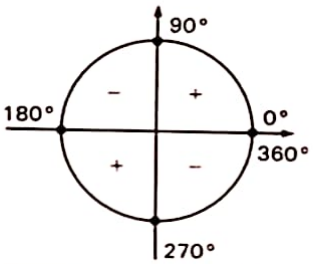


α	0°	90°	180°	270°	360°
cosα	1	0	−1	0	1

Tangente
Definição



Sinais



α	0°	90°	180°	270°	360°
tgα	0	∄	0	∄	0

Relações trigonométricas

Relações fundamentais:

- $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$
- Se $\cos x \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}}$

Secante, cossecante e cotangente:

- Se $\text{sen } x \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{cotg } x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}}$
- Se $\cos x \neq 0 \Rightarrow \boxed{\sec x = \dfrac{1}{\cos x}}$
- Se $\text{sen } x \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x}}$

Relações derivadas:

- Se $\cos x \neq 0 \Rightarrow \boxed{\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x}$
- Se $\text{sen } x \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x}$
- Se $\left.\begin{array}{l}\text{sen } x \neq 0 \\ \text{e } \cos x \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{cotg } x = \dfrac{1}{\text{tg } x}}$

★ EXERCÍCIOS ★

127. Determine o valor numérico de:

$$\text{sen } \frac{3\pi}{2} + \text{tg } \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6}.$$

128. (FATEC) A expressão $\dfrac{\cos \frac{5\pi}{3} + 2^{\cos \pi}}{3 \cdot \text{tg } \frac{3\pi}{4}}$ tem valor igual a:

a) $-5\sqrt{2}/3$; b) $-5/6$; c) $-1/3$; d) $1/2$; e) 1.

129. (FATEC) Se $\text{sen } x \cdot \cos x > 0$, $\text{tg } x \cdot \sec x < 0$ e $0 < x < 2\pi$, então:
a) $0 < x < \pi/2$;
b) $\pi/2 < x < \pi$;
c) $\pi < x < 3\pi/2$;
d) $3\pi/2 < x < 2\pi$;
e) não há x que satisfaça às condições propostas.

Scanned by CamScanner

130. Sejam x, y $\in \mathbb{R}$; se $x + y = \pi/2$ e $x - y = \pi/6$ e $t = \dfrac{\text{sen } 2x + \text{sen } 2y}{\cos 2x - \cos 2y}$, então:

a) $t = \sqrt{3}/3$;
b) $t = 1$;
c) $t = 1/2$;
d) $t = -\sqrt{3}$;
e) n.d.a.

131. Sendo α um ângulo agudo tal que $\text{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}$, calcule cosα, tgα, secα, cossecα e cotgα.

132. O ângulo α é agudo e $\text{tg}\alpha = \dfrac{5}{12}$. Calcule senα e cosα.

133. (UNESP) Se sen x = 2/3, onde $x \in [0; \pi/2]$, então tg x é igual a:

a) $2\sqrt{5}/5$;
b) $\sqrt{5}/2$;
c) $3\sqrt{5}/5$;
d) 3/2;
e) 1.

134. (FATEC) Seja $x \in]0; \pi/2[$ e tg x = 3/4; então:

a) $\text{sen } x = \sqrt{5}/10$;
b) $\text{sen } x = \sqrt{5}/2$;
c) sen x = 1/2;
d) sen x = 3/5;
e) n.d.a.

135. O arco x é do 3º quadrante e $\text{sen } x = -\dfrac{1}{3}$. Calcule sec x.

136. (UNESP) Se $x \in [3\pi/2; 2\pi]$, $\cos x = \sqrt{5}/3$ e A = 2 + cossec x, então:

a) A = − 1/2;
b) A = − 3/2;
c) A = 3;
d) A = 3/2;
e) A = 1/2.

137. Sendo $\text{cossec } x = \dfrac{13}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule tg x.

138. (FUVEST-SP) Se $\text{tg } x = \dfrac{3}{4}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, o valor de cos x − sen x é:

a) 7/5; b) − 7/5; c) − 2/5; d) 1/5; e) − 1/5.

139. (MACK-SP) Se $x = \dfrac{\pi}{2}$, então:

$$\frac{\text{sen } x + 2 \cdot \text{cotg}\left(\dfrac{x}{2}\right) - \cos 2x}{\text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right) \cdot \text{cossec } x + \sec 4x}$$ é igual a:

a) −2; b) 0; c) 1/2; d) 2; e) 4.

140. (FATEC) O valor numérico da expressão

$$\frac{\text{cossec}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - \text{tg } 2x}{1 - \sec\left(\dfrac{4x}{3}\right)}$$ para $x = \dfrac{\pi}{2}$, é:

a) − 2; b) − 2/3; c) 2; d) 2/3; e) 1.

141. (MACK-SP) Considerem-se as seguintes afirmações:
(1) Se sen x = −cos x, então tg x = 1;
(2) sec 180° = 1;
(3) Se x > 0, então sen x > 0.

Associando V ou F a cada afirmação nesta ordem, conforme seja verdadeira ou falsa, tem-se:

a) (F, F, F);
b) (F, F, V);
c) (V, F, F);
d) (F, V, F);
e) (V, V, F).

142. (FUND. GETÚLIO VARGAS-SP) Simplificando a expressão

$$\frac{\text{sen } a \cdot \text{tg } a \cdot \text{cossec } a}{\cos a \cdot \text{cotg } a \cdot \sec a}$$ obtém-se:

a) 0;
b) $\sec^2 a$;
c) $\text{sen}^2 a$;
d) 1;
e) $\text{tg}^2 a$.

143. (FATEC) — Se f: $]0;\pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = -\text{sen } x \cdot \text{tg } x + \sec x$, então:

a) f(x) = cossec x;
b) f(x) = cos x · sec x;
c) $f(x) = 1 - \text{tg}^2 x$;
d) f(x) = sen x;
e) f(x) = cos x.

144. (FUND. GETÚLIO VARGAS-SP) Simplificando a expressão $\dfrac{\cos^2 x - \text{cotg } x}{\text{sen}^2 x - \text{tg } x}$, obtemos:

a) $\sec^2 x$;
b) $\text{sen}^2 x$;
c) $\text{tg}^2 x$;
d) $\cos^2 x$;
e) $\text{cotg}^2 x$.

145. (UNESP) Se $x \in [0; \pi]$ e $\text{tg}^2 x + \text{sen}^2 x = 3/2$, então $4 \cdot \cos^2 x$ é igual a:

a) 0; b) 2,0; c) 1,5; d) 2,5; e) 4.

146. (FUVEST) Sendo a uma das soluções da equação $\text{tg}^2 a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$, o valor de $\text{tg}^2 a$ é:

a) $\sqrt{2} - 1$;
b) $\sqrt{2} + 1$;
c) $\sqrt{3} - 1$;
d) $\sqrt{3} + 1$;
e) $\sqrt{2} + 3$.

147. Sendo $\text{sen } x = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ obter $y = \dfrac{\cos x}{\text{tg } x + \sec x}$ em função de a e b.

148. Calcular tg x sabendo-se que $4\text{sen}^2 x + 2\cos^2 x = 3$.

149. (FUVEST-SP) Quais são as raízes da equação do segundo grau $x^2 \text{ sen}\alpha - 2x \cos\alpha - \text{sen}\alpha = 0$, onde $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$?

a) $2\dfrac{\cos\alpha + 1}{\text{sen}\alpha}$ e $2\dfrac{\cos\alpha - 1}{\text{sen}\alpha}$;

b) $\dfrac{\cos\alpha + 1}{\text{sen}\alpha}$ e $\dfrac{\cos\alpha - 1}{\text{sen}\alpha}$;

c) cosα + 1 e cosα − 1;

d) $\dfrac{\text{sen}\alpha + 1}{\cos\alpha}$ e $\dfrac{\text{sen}\alpha - 1}{\cos\alpha}$;

e) $\dfrac{\text{sen}\alpha + 1}{2}$ e $\dfrac{\text{sen}\alpha - 1}{2}$.

150. (UNESP-SP) Seja $y = \dfrac{2 + 2^{\text{sen}^2 t}}{1 + 2^{\cos^2 t}}$. Então para todo $t \in \mathbb{R}$:

a) y = 2;
b) $y = 2^{\text{sen } t}$;
c) $y = 2^{\cos t}$;
d) $y = 2^{\text{sen}^2 t}$;
e) $y = 2^{\cos^2 t}$.

151. (UF-ES) Se 3 senθ + 4 cosθ = 5, então senθ + cosθ é igual a:

a) 1/5;
b) 3/5;
c) − 1/5;
d) 7/5;
e) − 3/5.

152. (UNESP) A expressão $1 - 2\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x + \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$ é aquivalente a:

a) $\cos^4 x$;
b) $2 \cos^2 x$;
c) $\cos^3 x$;
d) $\cos^4 x + 1$;
e) $\cos^2 x$.

153. Se $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e *x* é do primeiro quadrante, então:

a) $1 - \text{tg}^2 x = 1$;
b) $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = \sqrt{2}$;
c) cotg x − 1 = 2;
d) sec x + cossec x = $2\sqrt{2}$;
e) $1 - \text{cossec}^2 x = 0$.

Scanned by CamScanner

154. Se sen x = 2/3 e x é um arco do segundo quadrante, então:

a) tg x = − 7/2;
b) cotg x = − 2/7;
c) cos x = − $\sqrt{5}/3$;
d) sec x = $3\sqrt{5}/5$;
e) cossec x = 1/2.

155. O valor da expressão $\dfrac{\text{sen}3x - 2\cos 2x}{\text{sen } x + 2\cos\frac{x}{2} + \text{tg}\frac{x}{2}}$ para x = 90° é:

a) maior que 1;
b) um número negativo;
c) um número irracional inferior a 1;
d) um número real superior a 3,14;
e) n.d.a.

156. (GV-SP) Das igualdades:

1) sen(π/6) = − sen(5π/6);
2) cos(π/6) = − cos(5π/6);
3) tg(π/6) = tg(7π/6);
4) cossec(π/6) = cossec(5π/6).

podemos dizer que:

a) nenhuma delas é correta;
b) apenas uma delas é correta;
c) apenas duas delas são corretas;
d) apenas três delas são corretas;
e) todas são corretas.

157. (FUVEST) Se tg x = 3/4 e $\pi \leqslant x \leqslant 3\pi/2$, o valor de cos x − sen x é:

a) 7/5; b) − 7/5; c) 1/5; d) − 1/5.

158 Sendo $y = \dfrac{\sec x + \text{cossec } x}{1 + \text{tg } x}$ e sen x = $\frac{1}{3}$ então

a) y = 2/3; b) y = 3/2; c) y = 3; d) y = 2; e) n.d.a.

159. Se $\text{tg } x = \dfrac{2m}{1 - m^2}$ então:

a) $\text{sen } x = \dfrac{1 + m^2}{2m}$;
b) sen x = 2m;
c) $\text{sen } x = \dfrac{2m}{1 + m^2}$;
d) $\text{sen } x = \pm \dfrac{2m}{1 + m^2}$;
e) n.d.a.

160. (MACK-SP) Se x = π/2, então $\dfrac{\text{sen } x + 2 \cdot \text{cotg}(x/2) - \cos 2x}{\text{tg}(x/2) \cdot \text{cossec } x + \sec 4x}$ é igual a:

a) − 2; b) 0; c) 1/2; d) 2; e) 4.

161. (FUVEST-SP) A alternativa que encerra a única igualdade verdadeira para qualquer valor x real é:

a) $1 + \text{tg}^2x = \sec^2x$;
b) $\text{sen}^2(2x) + \cos^2(2x) = 1$;
c) $\cos(2x) = \cos^2x + \text{sen}^2x$
d) $1 + \text{cotg}^2x = \text{cossec}^2x$;
e) n.d.a.

Transformações de arcos

Arcos negativos:

- sen(− x) = − sen x
- tg(− x) = − tg x
- cos(− x) = cos x

Adição de arcos:

- sen(a + b) = sen a · cos b + sen b · cos a
- cos(a + b) = cos a · cos b − sen a · sen b
- $\text{tg}(a + b) = \dfrac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

Subtração de arcos:

- sen(a − b) = sen a · cos b − sen b · cos a
- cos(a − b) = cos a · cos b + sen a · sen b
- $\text{tg}(a - b) = \dfrac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

Duplicação de arcos:

- sen 2a = 2 · sen a · cos a
- cos 2a = $\cos^2a - \text{sen}^2a \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} \cos 2a = 2 \cdot \cos^2a - 1 \\ \cos 2a = 1 - 2\text{sen}^2a \end{cases}$
- $\text{tg } 2a = \dfrac{2\text{tg } a}{1 - \text{tg}^2a}$

Arcos complementares:

- sen(π/2 − x) = cos x
- cos(π/2 − x) = sen x
- tg(π/2 − x) = cotg x

✶ EXERCÍCIOS ✶

162. (MACK-SP) Sendo $\text{sen } x = \dfrac{12}{13}$ e $\text{sen } y = \dfrac{4}{5}$, $0 < x, y < \dfrac{\pi}{2}$, então sen (x − y) é igual a:

a) 48/65;
b) 112/65;
c) 48/60;
d) 56/65;
e) 16/65.

163. (CESGRANRIO-RJ) Sejam α um arco do 1º quadrante e β um arco do 2º quadrante, tais que cos α = 0,8 e sen β = 0,6. O valor de sen (α + β) é:

a) 1,00;
b) 0,96;
c) 0,70;
d) 0,48;
e) 0,00.

164. (PUC-SP) Se tg (x + y) = 33 e tg x = 3, então tg y é igual a:

a) 0,2; b) 0,3; c) 0,4; d) 0,5; e) 0,6.

165. (FUND. GETÚLIO VARGAS-SP) Sen (π + x) + + $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ é, para todo $x \in \mathbb{R}$, equivalente a:

a) sen x + cos x;
b) sen x − cos x;
c) 2 sen x;
d) 0;
e) − 2 sen x.

166. Sejam $x \in]0; \pi/2[$ e $y \in]3\pi/2; 2\pi[$; se cos x = 2/3 e cos y = 3/5, então:

a) cos (x + y) = 19/15;
b) cos (x + y) = $2\sqrt{5}/15$;
c) $\cos(x + y) = \dfrac{6 + 4\sqrt{5}}{15}$;
d) $\cos(x + y) = \dfrac{3\sqrt{5} + 8}{15}$;
e) $\cos(x + y) = \dfrac{11\sqrt{5}}{15}$.

Scanned by CamScanner

167. (SANTA CASA-SP) Qual das igualdades seguintes é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$?

a) $\text{sen}(-2x) = \text{sen}\,2x$;
b) $\cos(\pi/2 - 2x) = \cos 2x$;
c) $\text{sen}(\pi + x) = \text{sen}\,x$;
d) $\cos(\pi/2 + x) = -\text{sen}\,x$;
e) $\text{sen}(\pi/2 - x) = -\cos x$.

168. (UNESP) Se x e y são números reais tais que $y = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\cos(x - \pi/4)}{\text{sen}\,x}$, então:

a) $y = \text{cotg}\,x + 1$;
b) $y = -\text{tg}^2x - 1$;
c) $y = 2 \cdot (\cos x + \text{sen}\,x)$;
d) $y = 2$;
e) n.d.a.

169. (UNESP) Se x e y são dois arcos complementares, então $(\cos x - \cos y)^2 + (\text{sen}\,x + \text{sen}\,y)^2$ é igual a:

a) 0; b) 1/2; c) 3/2; d) 1; e) 2.

170. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \cos(2x) + \cos x$. O valor mínimo de f é:

a) $-3/4$; b) $-7/8$; c) -1; d) $-9/8$; e) 0.

171. (FATEC) Seja $x \in \mathbb{R}$ e $1 - \cos 2x = a$; então:

a) $a = \cos^2x$;
b) $a = \text{sen}^2x$;
c) $2a = \cos^2x$;
d) $2a = \text{sen}^2x$;
e) n.d.a.

172. (PUC-SP) Da trigonometria vem a fórmula $\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg}a + \text{tg}b}{1 - \text{tg}a\,\text{tg}b}$. Se $\text{tg}\,45° = 1$, então $\text{tg}\,22{,}5°$ é igual a:

a) $1 - \sqrt{2}$;
b) $2 - \sqrt{3}$;
c) $\sqrt{3} - 1$;
d) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$;
e) $\sqrt{2} - 1$.

173. (FUVEST-SP) O valor de $(\text{sen}\,22°30' + \cos 22°30')^2$ é:

a) 3/2;
b) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$;
c) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$;
d) 1;
e) 2.

174. (FATEC) Se $x \in]0; \pi/2[$ e $\sec^2x = 25/9$, então cossec 2x é igual a:

a) $\cos^2x$;
b) 25/24;
c) 5/4;
d) 0;
e) n.d.a.

175. Calcular sen 2x sabendo-se que $\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x = 3$.

176. Sendo $\text{sen}\,x + \cos x = m$, então sen 2x vale:

a) 2 m;
b) $m^2 - 1$;
c) $m^2 + 1$;
d) $2m - 1$;
e) $2m^2 - 1$.

177. Se $\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}$, então tg(a) vale:

a) 4/3; b) 3/4; c) 2; d) 1; e) -2.

178. (ITA-SP) O valor de x, $x > 0$, que satisfaz a equação $\sqrt{x} = \text{tg}(\pi/12)$ é:

a) $x = 4\sqrt{3}$;
b) $x = 5 - 4\sqrt{3}$;
c) $x = 7 - \sqrt{3}$;
d) $x = 7 - 4\sqrt{3}$;
e) $x = 9 - 4\sqrt{3}$.

179. (UNESP) Se $y = \frac{\cos 2x + 2\,\text{sen}^2x}{2 \cdot \cos(\pi - x)}$, então:

a) $y = -\text{sen}\,x$;
b) $y = -\frac{1}{2} \cdot \sec x$;
c) $y = -2\sec x$;
d) $y = \cos x$;
e) n.d.a.

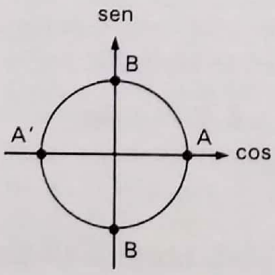
Arcos côngruos

São arcos que têm a mesma origem A e a mesma extremidade M; a medida x de qualquer arco trigonométrico côngruo com x_0 é:

$\boxed{x = x_0 + k \cdot 2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, x em radianos ou

$\boxed{x = x_0 + k \cdot 360°}$, $k \in \mathbb{Z}$, x em graus.

Congruências importantes:



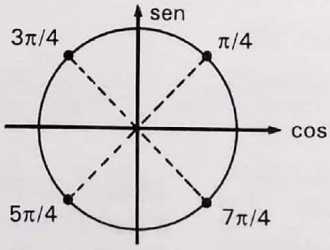
• se x é a medida de um arco com extremidades em:

a) A ou A' ⇒ $\boxed{x = k \cdot \pi}$;

b) B ou B' ⇒ $\boxed{x = \pi/2 + k \cdot \pi}$, ou $\boxed{x = \pm\,\pi/2 + k \cdot 2\pi}$;

c) A ou A' ou B ou B' ⇒ $\boxed{x = k \cdot (\pi/2)}$, $k \in \mathbb{Z}$.

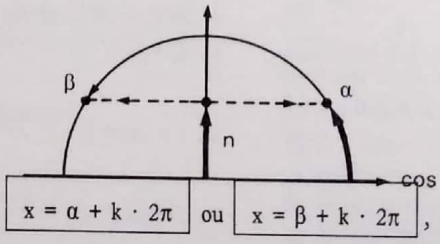
• se x é côngruo com $\pi/4$ ou $3\pi/4$ ou $5\pi/4$ ou $7\pi/4$, então:



⇒ $\boxed{x = \pi/4 + k \cdot (\pi/2)}$ ou $\boxed{x = \pm\,\pi/4 + k \cdot \pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

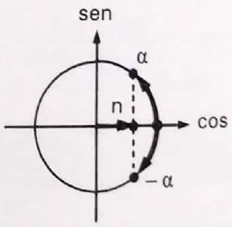
Equações trigonométricas

Sen x = n; $-1 \leqslant n \leqslant 1$



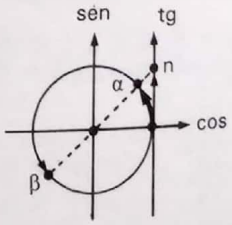
$\boxed{x = \alpha + k \cdot 2\pi}$ ou $\boxed{x = \beta + k \cdot 2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cos x = n; $-1 \leqslant n \leqslant 1$



$\boxed{x = \pm\alpha + k \cdot 2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

Tg x = n



$\boxed{x = \alpha + k \cdot 2\pi}$ ou $\boxed{x = \beta + k \cdot 2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{x = \alpha + k \cdot \pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

(esta expressão substitui as duas anteriores)

Scanned by CamScanner

★ EXERCÍCIOS ★

180. Considere um ciclo trigonométrico e um arco $\widehat{AM}$ de medida $-200°$; determine as medidas dos três menores arcos trigonométricos positivos côngruos do arco de medida $-200°$ (A é o ponto origem dos arcos).

181. Considere um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida $2\pi/5$ rad; determine as medidas dos dois menores arcos positivos e dos dois maiores negativos, côngruos com o arco dado.

182. Sabendo que π rad representa metade do ciclo trigonométrico, responda:

a) o arco de medida $\pi/4$ "cabe quantas vezes" dentro de meio ciclo trigonométrico?

b) e no ciclo trigonométrico completo?

183. Sendo A o ponto origem dos arcos de um ciclo trigonométrico, divida-o em 8 partes iguais de modo que A seja um dos pontos de divisão; determine:

a) a medida (em rad) de cada parte em que ficou dividido o ciclo;

b) determine as medidas (em rad) dos arcos trigonométricos de origem em A e extremidades finais nos pontos de divisão obtidos no item anterior; considere apenas os arcos positivos e menores que uma volta.

Repita este exercício, dividindo o ciclo em 12 partes iguais e, depois, em 10 partes.

184. Seja k um número inteiro; fazendo $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ determine as medidas de alguns arcos representados pelas expressões seguintes e marque, aproximadamente, no ciclo trigonométrico os pontos que representam as extremidades finais desses arcos.

a) $x = k \cdot \pi$;
b) $x = k \cdot \pi/2$;
c) $x = k \cdot \pi/3$;
d) $x = k \cdot \pi/4$;
e) $x = \pi/2 + k \cdot \pi$;
f) $x = \pi/4 + k \cdot \pi$;
g) $x = \pi/4 + k \cdot \pi/2$;
h) $x = k \cdot \pi \pm \pi/2$.

185. Determine os seguintes valores trigonométricos:

a) sen $(17\pi/2)$; b) sen $(-13\pi/2)$; c) sen 27π;
d) sen (-30π); e) sen $(43\pi/4)$; f) sen $(-37\pi/3)$;
g) sen $(23\pi/6)$; h) cos 18π; i) cos (-23π);
j) cos $(15\pi/2)$; k) cos $(-27\pi/2)$; l) cos $(9\pi/4)$;
m) cos $(-17\pi/3)$; n) cos $(31\pi/6)$; o) tg 7π;
p) tg (-14π); q) tg $(33\pi/4)$; r) tg $(-37\pi/3)$;
s) tg $(29\pi/6)$.

Sugestão: converta as medidas dos arcos para graus, reduza à primeira volta positiva e consulte a figura dos valores notáveis do livro.

186. (MACK-SP) Para k inteiro, seja a o maior arco negativo da família de arcos cujas medidas algébricas são dadas por $2\pi/3 + 2k\pi$. O valor de cos a é:

a) $-\sqrt{2}/2$; b) $1/2$; c) $\sqrt{3}/2$; d) $-\sqrt{3}/2$; e) $-1/2$.

187. (OBJETIVO) Assinale a verdadeira:

a) sen 453° < sen 747° < sen 1.128°;
b) sen 747° < sen 453° < sen 1.128°;
c) sen 747° < sen 1.128° < sen 453°;
d) sen 1.128° < sen 747° < sen 453°;
e) sen 453° < sen 1.128° < sen 747°.

188. (SANTA CASA-SP) Se A = sen 580°, B = sen (−780°) e C = cos 350°, então é verdade que:

a) A < B < C; c) A < C < B; e) C < B < A.
b) B < A < C; d) B < C < A;

189. Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $2 \cdot \text{sen}\, x - 1 = 0$;
b) $2 \cdot \cos x - 1 = 0$;
c) $4 \cdot \text{sen}^2 x - 1 = 0$;
d) $2 \cdot \cos^2 x - 1 = 0$;
e) $\text{tg}\, x = -1$;
f) $3 \cdot \text{tg}\, x + \sqrt{3} = 0$;
g) $\text{tg}^2 x - 1 = 0$;
h) $\text{tg}^2 x - 3 = 0$.

190. (FATEC) Se $A = \{x \mid x \in [0; 2\pi[,\ 4\,\text{sen}^2 x + 3 = 8\,\text{sen}\, x\}$, então:

a) $A = \varnothing$;
b) $A = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$;
c) $A = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$;
d) $A = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$;
e) $A = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right\}$.

191. (UNESP) Seja $A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ 2\cos^2 x = 3\,\text{sen}\, x\}$. Então $x \in A$ se, e somente se, existe k, $k \in \mathbb{Z}$, tal que:

a) $x = 2k\pi + \pi/6$ ou $x = 2k\pi + 5\pi/6$;
b) $x = k\pi + \pi/6$;
c) $x = 2k\pi + \pi/3$ ou $x = 2k\pi + 2\pi/5$;
d) $x = k\pi + \pi/3$;
e) $x = 2k\pi + 2\pi/3$ ou $x = 2k\pi + 5\pi/3$.

192. (UNESP) Seja $A = \{x \in [0; 2\pi],\ \text{sen}\, x = \cos x - 1\}$. Então A tem:

a) 1 elemento; c) 3 elementos; e) 5 elementos.
b) 2 elementos; d) 4 elementos;

193. Resolver a equação $\cos 2x + 4\cos x + 3 = 0$.

194. (FUVEST) No intervalo $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, determine o conjunto solução da equação $\text{sen}\, 2x - \cos x = 0$.

195. (SANTA CASA-SP) Quantas são as soluções da equação $\text{sen}\, x \cdot \cos x = 1/4$, no intervalo $[0; 2\pi]$?

a) 5; b) 4; c) 3; d) 2; e) 1.

196. (FUVEST) Considere a equação $\text{sen}\, x - \cos x = m$.

a) ache todas as soluções reais da equação acima quando $m = 0$.

b) determine todos os valores m para os quais a equação possui soluções reais.

197. O conjunto solução da equação

$$\left| 4 \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \right| = 1 \text{ no intervalo } [0; \pi] \text{ é:}$$

a) $\{\pi/2; 7\pi/6; 5\pi/2\}$; c) $\{\pi/6; \pi\}$; e) $\{\pi/2; \pi/3\}$.
b) $\{\pi/6; \pi; 2\pi; 3\pi\}$; d) $\{\pi/2; \pi\}$;

198. (U. LONDRINA) Se $y = \cos(2280°)$, então y é igual a:

a) $-\cos 12°$; c) $-\cos 60°$; e) $\cos 60°$.
b) $-\cos 30°$; d) $\cos 12°$;

199. (STA. CASA-SP) O número de arcos no intervalo $\left[0; \frac{10\pi}{3}\right]$, cujo seno é igual a $-1/2$, é:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 5; e) 6.

200. (U.F.-PA) O menor valor positivo de x que satisfaz a equação $2\,\text{sen}\, x - 1 = 0$ é:

a) $\pi/6$; b) $\pi/4$; c) $\pi/3$; d) $\pi/2$; e) π.

201. (MACK-SP) No intervalo $[0; \pi]$, o número de valores de x tais que $2\,\text{sen}^2 x + \cos 2x = 1$ é:

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) maior do que 3.

202. (F.C. CHAGAS-SP) O número de soluções da equação $\cos 4x = 0$, no intervalo $[0; \pi]$ é:

a) 3; b) 4; c) 5; d) 6; e) 7.

203. A soma das raízes da equação $1 - 4\cos^2 x = 0$, compreendidas entre 0 e π, é:

a) $\pi/3$; b) π; c) $3\pi/4$; d) $5\pi/6$; e) $7\pi/6$.

Scanned by CamScanner

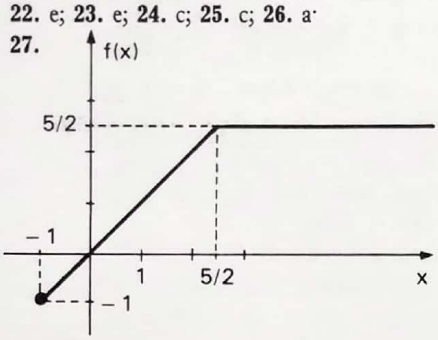
204. (FGV-SP) Dada a equação $\cos^2 x - 2\sec^2 x = 1$, com $0 \leqslant x \leqslant \pi$, então:

a) $x = \pi/4$; b) $x = 3\pi/4$; c) $x = 0$; d) não existe x que satisfaça a equação; e) n.d.a.

★ RESPOSTAS ★

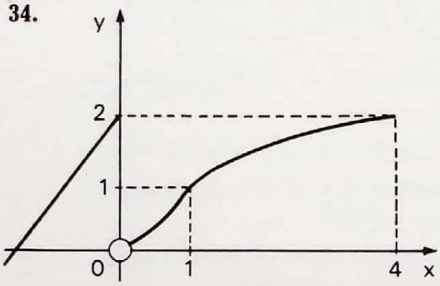
1. d; **2.** a; **3.** b; **4.** e; **5.** e; **6.** d; **7.** a; **8.** d; **9.** c; **10.** c; **11.** d; **12.** b; **13.** e; **14.** d; **15.** c; **16.** c; **17.** d; **18.** c; **19.** e; **20.** c; **21.** a; **22.** e; **23.** e; **24.** c; **25.** c; **26.** a·

27.



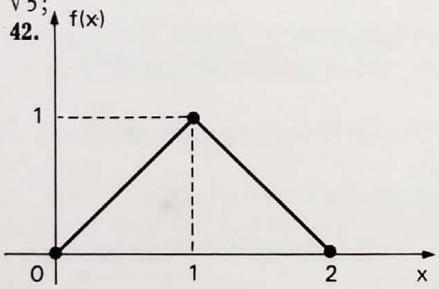
28. d; **29.** c; **30.** b; **31.** b; **32.** a; **33.** c;

34.

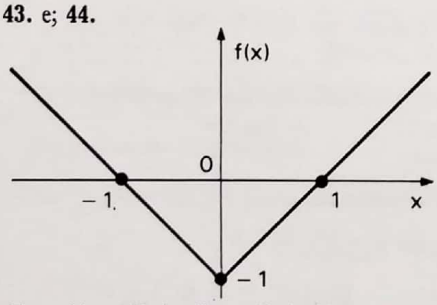


35. d; **36.** a; **37.** e; **38.** c; **39.** a; **40.** [1; 10]; **41.** $\sqrt{5}$;

42.

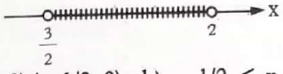


43. e; **44.**



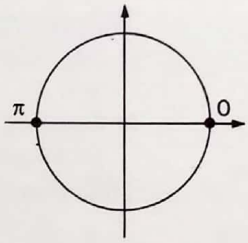
45. c; **46.** e; **47.** b; **48.** a; **49.** b; **50.** b; **51.** a) reta, b) parábola; **52.** c; **53.** d; **54.** b; **55.** b; **56.** a; **57.** c; **58.** c; **59.** b; **60.** c; **61.** e; **62.** e; **63.** b; **64.** c; **65.** b; **66.** d; **67.** c; **68.** d; **69.** b; **70.** e; **71.** e; **72.** c; **73.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$; **74.** d; **75.** d; **76.** c; **77.** c; **78.** a; **79.** b; **80.** d; **81.** $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3/2\}$; **82.** $\{t \in \mathbb{R} \mid t < 0\}$; **83.** b; **84.** d;

85.

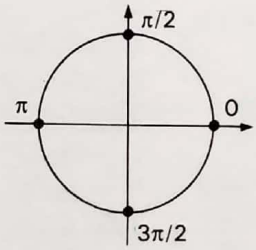


86. a) (5; 0) (– 1/2; 0), b) $-1/2 \leqslant x \leqslant 5$; **87.** a) (– 2; 0) e (4; 0), b) $0 < m < 16$; **88.** a; **89.** 3 rad; **90.** 10π; **91.** a) 72°, b) 210°, c) 50°, d) 135°; **92.** a) $5\pi/12$, b) $3\pi/8$, c) $2\pi/9$, d) $5\pi/4$; **93.** e)(60°); **94.** d; **95.** e; **96.** b; **97.** a; **98.** b; **99.** b; **100.** e; **101.** e)(7 cm); **102.** a; **103.** a; **104.** a; **105.** d; **106.** $8(\sqrt{3} + 1)$cm². **107.** $(a^2 \cdot \text{sen } 2\alpha)/4$; **108.** d; **109.** b; **110.** b; **111.** 60°; **112.** $\sqrt{3}$; **113.** $32\sqrt{3}/3$; **114.** a; **115.** $6\sqrt{3}$ ou $10\sqrt{3}$; **116.** e; **117.** 1/2; **118.** d; **119.** a; **120.** c; **121.** c; **122.** d; **123.** c; **124.** e; **125.** $3 + \sqrt{3}$ cm²; **126.** 2; **127.** $\sqrt{3}/2$; **128.** c; **129.** c; **130.** d; **131.** 4/5, 3/4, 5/4, 5/3, 4/3; **132.** 5/13, 12/13; **133.** a; **134.** d; **135.** $-3\sqrt{2}/4$; **136.** e; **137.** – 5/12; **138.** e; **139.** d; **140.** d; **141.** a; **142.** e; **143.** e; **144.** e; **145.** b; **146.** a; **147.** $\dfrac{2b^2}{a^2 + b^2}$; **148.** ±1; **149.** b; **150.** d; **151.** d; **152.** e; **153.** d; **154.** c; **155.** c)$(2 - \sqrt{2}/2)$; **156.** d)(F V V V); **157.** d; **158.** c; **159.** d; **160.** d; **161.** b; **162.** e; **163.** e; **164.** b; **165.** d; **166.** c; **167.** d; **168.** a; **169.** e; **170.** d; **171.** e)($a = 2\,\text{sen}^2 x$); **172.** e; **173.** c; **174.** b; **175.** 2/3; **176.** b; **177.** a; **178.** d; **179.** b; **180.** 160°, 520°, 880°; **181.** $12\pi/5$, $22\pi/5$, $-8\pi/5$, $-18\pi/5$; **182.** a) 4, b) 8; **183.** a) $\pi/4$, b) 0; $\pi/4$; $2\pi/4$; $3\pi/4$; π; $5\pi/4$; $6\pi/4$, $7\pi/4$, c) 0, $\pi/6$, $2\pi/6$, $3\pi/6$; ...; $11\pi/6$, d) 0, $\pi/5$, $2\pi/5$, ..., $9\pi/5$; **184.**

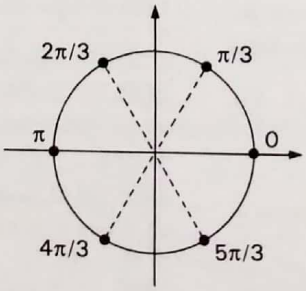
a)



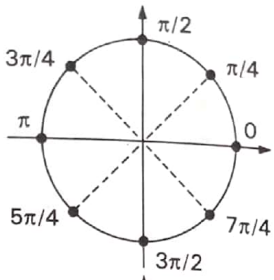
b)



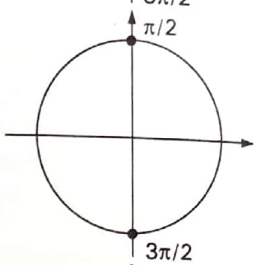
c)



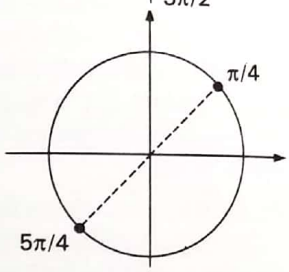
d)



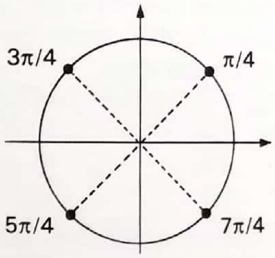
e)



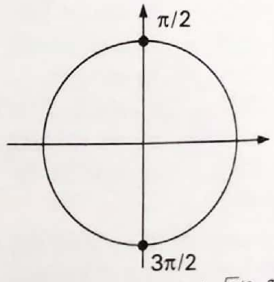
f)



g)



h)



185. a) 1, b) – 1, c) 0, d) 0, e) $\sqrt{2}/2$, f) $-\sqrt{3}/2$, g) – 1/2, h) 1, i) – 1, j) 0, k) 0, l) $\sqrt{2}/2$, m) 1/2, n) $-\sqrt{3}/2$, o) 0, p) 0, q) 1, r) $-\sqrt{3}$, s) $-\sqrt{3}/3$; **186.** e; **187.** c; **188.** b; **189.** sendo $k \in \mathbb{Z}$, temos: a) $\pi/6 + k \cdot 2\pi$ ou $5\pi/6 + 2k\pi$, b) $\pm\pi/3 + k \cdot 2\pi$, c) $\pm\pi/6 + k \cdot \pi$, d) $\pi/4 + k \cdot \pi/2$, e) $-\pi/4 + k \cdot \pi$, f) $-\pi/6 + k \cdot \pi$, g) $\pm\pi/4 + k \cdot \pi$, h) $\pm\pi/3 + k \cdot \pi$; **190.** d; **191.** a; **192.** c; **193.** $\pi + k \cdot 2\pi$; **194.** $\{\pi/2; \pi/6\}$; **195.** b; **196.** a) $\pi/4 + k \cdot \pi$, b) $-\sqrt{2} \leqslant m \leqslant \sqrt{2}$; **197.** e; **198.** c; **199.** b; **200.** a; **201.** e; **202.** b; **203.** b; **204.** d.

Scanned by CamScanner

RESUMOS E EXERCÍCIOS

Correspondem a Matemática — páginas 97 a 144

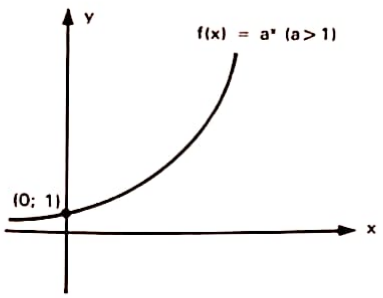
ÁLGEBRA

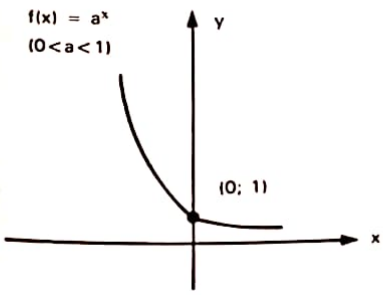
Função exponencial

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, do tipo (ou redutível a) $f(x) = a^x$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$.

Domínio e imagem
$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$ (reais positivos).

Gráfico





- se $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é crescente;
- se $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ é decrescente;
- a função $f(x) = a^x$, intercepta o eixo das ordenadas (y) no ponto (0; 1);
- a função $f(x) = a^x$ não intercepta o eixo das abcissas (x).

Função logarítmica

Logaritmo

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

- **condições de existência**

$a, b, x \in \mathbb{R}$

$a > 0$ e $a \neq 1$ e $b > 0$

- **conseqüências da definição**

$\log_a 1 = 0$ ($\forall\, 0 < a \neq 1$);

$\log_a a = 1$ ($\forall\, 0 < a \neq 1$);

$a^{\log_a b} = b$ ($0 < a \neq 1$ e $b > 0$);

$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$ ($0 < a \neq 1$ e $b > 0$ e $c > 0$).

- **propriedades operatórias:** admitindo a existência de todos os logaritmos envolvidos, temos:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc;$$
$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c};$$
$$\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b;$$
$$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a b.$$

- **mudança de base:** para passarmos da base a ($0 < a \neq 1$) para a base c ($0 < c \neq 1$), usamos a relação:

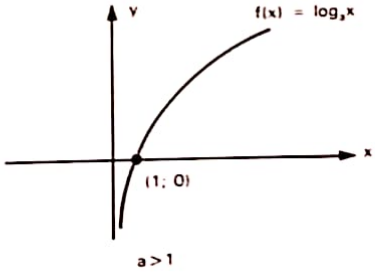
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

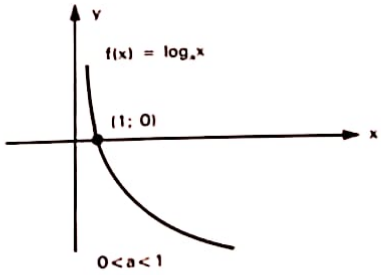
OBSERVAÇÃO Quando a base não vier escrita subentende-se que seu valor é 10 (não esqueça!).

Função logarítmica
$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$

- **domínio e imagem**
$D(f) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

- **gráfico**





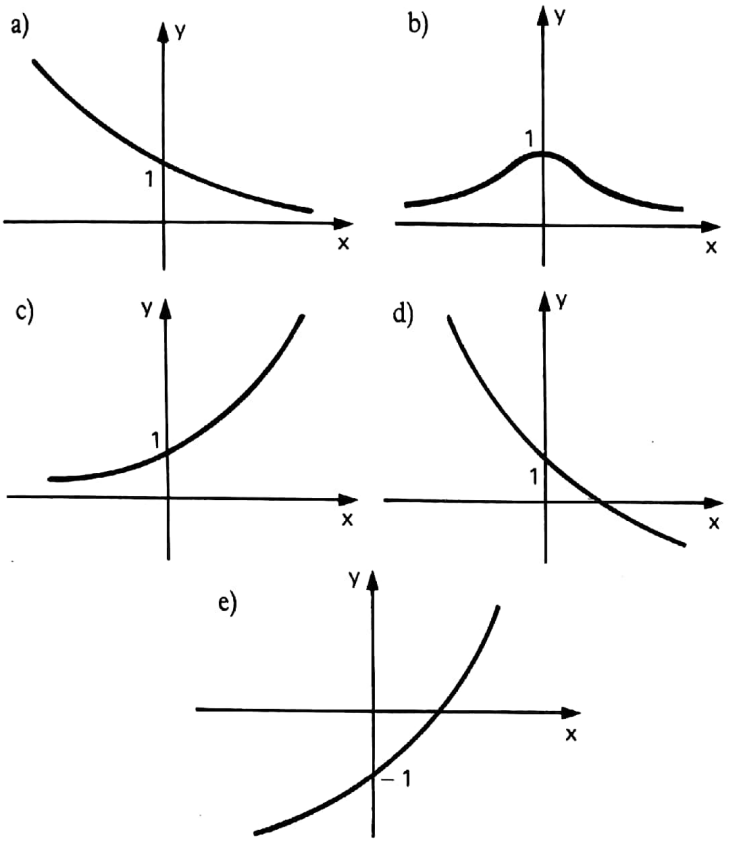
- se $a > 1$, $f(x) = \log_a x$ é crescente;
- se $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a x$ é decrescente;
- a função $f(x) = \log_a x$ intercepta o eixo das abcissas no ponto (1; 0);
- a função $f(x) = \log_a x$ não intercepta o eixo das ordenadas.

Scanned by CamScanner

★ EXERCÍCIOS ★

1. (PUC-SP) Para a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, dada por $y = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ e $a \neq 1$, podemos dizer que:
a) ela é crescente se $a \neq 1$;
b) ela é decrescente se $a \neq 1$;
c) ela é crescente para qualquer x real, se $a > 1$, e decrescente se $a < 1$;
d) ela é crescente para $x \in \mathbb{R}_+^*$ e decrescente para $x \in \mathbb{R}_-^*$;
e) ela é não decrescente quando $a < 1$.

2. (CESGRANRIO) O gráfico que melhor representa a função $f(x) = e^{-2x}$ é:



3. (FUVEST-SP) Resolva: $4^x + 8 = 6(2^x)$.

4. (FEI-SP) Sendo $f(x) = \frac{1}{4} - 2^x$ e $g(x) = 4^x$, resolva a equação: $f(x) + g(x) = 0$.

5. (FCC-SP) A solução da equação $0{,}5^{2x} = 0{,}25^{1-x}$ é um número x, tal que:
a) $0 < x < 1$;
b) $1 < x < 2$;
c) $2 < x < 3$;
d) $x > 3$;
e) $x < 0$.

6. (FGV-SP) O produto das soluções das equações $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108 \\ 4^x \cdot 2^y = 128 \end{cases}$ é:
a) -4;
b) -2;
c) 18;
d) 6;
e) 12.

7. (PUC-SP) O conjunto verdade da equação $3 \cdot 9^x - 26 \cdot 3^x - 9 = 0$ é:
a) $\{3\}$;
b) $\{-2\}$;
c) $\{-3\}$;
d) $\{2\}$;
e) $\varnothing$

8. (FCC-SP) A solução da equação $\left(\frac{1}{81}\right)^{x-2} = (\sqrt{27})^x$ pertence ao intervalo:
a) $]0; 1[$;
b) $]1; 2[$;
c) $]2; 3[$;
d) $]3; 4[$;
e) $]4; 5[$.

9. (ITA-SP) A soma de todos os valores de x que satisfazem à identidade :

$$9^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3^{1-x}} = -1 \text{ é:}$$

a) 0;
b) 1;
c) 2;
d) 3;
e) n.d.a.

10. (FCC-SP) Se $3^{x^2-1} < 27$, então x pertence ao intervalo:
a) $]-3; 3[$;
b) $]0; 4[$;
c) $]-\infty; 2[$
d) $[-2; 2]$;
e) $]-2; 2[$.

11. (PUC-SP) Se $\frac{1}{8} \leqslant 2^{-x}$, então vale para x a afirmação:
a) $x \in \mathbb{R}$ e $x < \frac{1}{3}$;
b) $x \in \mathbb{R}$ e $x > \frac{1}{3}$;
c) $x \in \mathbb{R}$ e $x \leqslant \frac{1}{3}$;
d) $x \in \mathbb{R}$ e $x \leqslant 3$;
e) $x \in \mathbb{R}$ e $x \geqslant 3$.

12. (PUC-SP) O domínio da relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $y = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 243}}$ é:
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$;
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$;
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\}$;
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$;
e) $\varnothing$.

13. (FUVEST-SP) O valor da expressão $\dfrac{-(-2)^2 - \sqrt[3]{-27}}{(-3+5)^0 - \log_2 4}$ é:
a) -7;
b) -1;
c) 1;
d) 2;
e) 7.

14. (UF-MG) Sendo $f(x) = 2^{3x}$ e $g(x) = \log x$, onde log representa logaritmo decimal, o valor de $f(g(10))$ é:

Scanned by CamScanner

a) 2; b) 4; c) 6; d) 8; e) 10.

15. (FUVEST-SP) O conjunto solução da inequação $(x - \log_3 27) \cdot (x - \log_4 8) < 0$ é dado por:

a) $\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}$;

b) $\frac{3}{2} < x < 3$;

c) $\frac{2}{3} < x < 3$;

d) $x < \frac{2}{3}$ ou $x > \frac{3}{2}$;

e) $x < \frac{3}{2}$ ou $x > 3$.

16. (PUC-SP) Se $\log_{10} 2 = 0{,}3010$, então $\log_{10} 5$ é igual a:

a) 0,6990;
b) 0,6880;
c) 0,6500;
d) 0,6770;
e) 0,6440.

17. (FCC-SP) Se $\log_3 a = x$, então $\log_9 a^2$ é igual a:

a) $2x^2$;
b) x^2;
c) $x + 2$;
d) $2x$;
e) x.

18. (FCC-SP) Se $\log 5 = 0{,}70$, o valor de $\log 250$ é:

a) 2,40;
b) 2,70;
c) 2,80;
d) 3,40;
e) 3,80.

19. (UNESP) Se $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ e $\log_2 \operatorname{sen} x = -2$, então $\log_2 \sqrt{\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x}}$ é igual a:

a) $-2\sqrt{2}$;
b) -2;
c) $-\frac{1}{2}$;
d) 0;
e) 1.

20. (PUCC-SP) Se $\log 72 - \log 48 = 2x - \log \frac{2}{3}$, então o valor de $\log x$ é:

a) 0;
b) $\frac{1}{2}$;
c) 1;
d) $\log \frac{1}{2}$;
e) n.d.a.

21. Se $\log_a b = m$ e $\log_b c = n$, então $\log_b(a^2 \cdot c)$ vale:

a) $\frac{m \cdot n + 2}{m}$;
b) $2m + n$;
c) $m + n$;
d) $\frac{m}{2} + n$;
e) $\frac{2 + n}{m}$.

22. (UNESP) Se $\log_b(\sqrt[3]{b} \cdot a^2) = 4$ e $c = \log_a b$, então:

a) $c = 6/11$;
b) $c = 11/6$;
c) $c = 5/3$;
d) $c = 3/5$;
e) n.d.a.

23. (UF-UBERLÂNDIA) Sendo $y = \sqrt[5]{\frac{x^2}{t}}$, $\log_3 x = 5$ e $\log_3 t = 4$, então, $\log_y 3$ vale:

a) 6/5;
b) 7/4;
c) 4/3;
d) 5/3;
e) 1/8.

24. (FCC-SP) A sentença $(\log x)^2 = 9$ é verdadeira se, e somente se:

a) $x > 0$;
b) $x \geqslant 1$;
c) $x = 10^3$;
d) $x = 3$ ou $x = -3$;
e) $x = 10^3$ ou $x = \frac{1}{10^3}$

25. (CESGRANRIO) A solução da equação $3 \cdot \log_{10} 4x - 2 \cdot \log_{10} 2 = 0$ é:

a) $\frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$;
b) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$;
c) $2 \cdot \sqrt[3]{2}$;
d) $\sqrt[3]{4}$;
e) 1.

26. (FAAP-SP) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} \log x - \log y = \log y \\ 3x + 2y = 33 \end{cases}$$

27. (FCC-SP) A solução da equação $2 \cdot \log_2 x - \log_2 \sqrt{x} = 3$ é:

a) 0;
b) $\sqrt{7}$;
c) 4;
d) 100;
e) irracional.

28. (FEI-SP) Resolva a equação $2^x + 5 \cdot 2^{-x} - 69 \cdot \log_2 \sqrt[9]{2} = 0$.

29. (CESGRANRIO) Se $\log x$ representa o logaritmo decimal do número positivo x, então a soma das raízes de $\log^2 x - \log x^2 = 0$ é:

a) -1; b) 1; c) 20; d) 100; e) 101.

30. (UF-CE) Se x_1 e x_2 são as soluções da equação: ${}_x\log_5 x = \frac{x^4}{125}$, sendo $x_1 < x_2$, determine o valor de $\frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1)$.

31. (UnB) No conjunto dos números reais maiores que zero, a equação ${}_x\log x = 3$:

a) não tem soluções reais;
b) tem uma única solução real;
c) tem duas soluções reais distintas;
d) tem infinitas soluções reais.

32. (SANTA CASA-SP) A função real definida por: $f(x) = \log_{x-1}(-x^2 + x + 6)$ tem para domínio:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$;
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } 2 < x < 3\}$;
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$;
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$;
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

Scanned by CamScanner

33. (UNESP) Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{6 - 2x} + \log(x - 1)$, para todo $x \in A$. Então:

a) $A \subset]-1; 2[$;
b) $A \subset]1; 3]$;
c) $A \subset [1; 3[$;
d) $A \subset [3; +\infty[$;
e) n.d.a.

34. (FGV-SP) A função $y = \log(x^2 - 6x + 2k + 1)$ é definida para todo $x \in \mathbb{R}$ se:

a) $k > 4$;
b) $k \geqslant 4$;
c) $-4 < k < 4$;
d) $k < 4$;
e) $k \leqslant 4$.

35. (UC-MG) O domínio natural da função $f(x) = \sqrt{\log(x + 3)}$ é formado pelos números reais x, tais que:

a) $x \geqslant 3$;
b) $x \geqslant 2$;
c) $x \geqslant -1$;
d) $x \geqslant -2$;
e) $x \geqslant -3$.

36. (UNESP) Se $V = \{x \in \mathbb{R} \mid \log(x + 2) - \log(x + 1) > \log 2\}$, então:

a) $V =]-\infty; 1[$;
b) $V =]4; +\infty[$;
c) $V =]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[$;
d) $V =]1; 4[$;
e) n.d.a.

37. (PUC-SP) Se $a > 1$, então o conjunto-verdade da inequação $\log_a(x^2 - 2x + 2) > 0$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$;
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$;
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$;
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$;
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

38. (FCC-SP) O mais amplo domínio real da função $f(x) = \sqrt{\log x}$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$;
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$;
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 1\}$;
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$;
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

39. (FGV-SP) Dada a equação $x^2 - 2x + \log N = 0$, para que ela tenha duas raízes de sinais contrários é preciso que:

a) $2 < N < 3$;
b) $0 < N < 1$;
c) $3 < N < 4$;
d) $N = 1$;
e) $1 < N < 2$.

40. (FGV-SP) Os valores de x para que $\log x + \log(x + 3) < 1$ são:

a) $x > -5$;
b) $x > 2$;
c) $0 < x < 2$;
d) $x < -5$ ou $x > 2$;
e) $-5 < x < 2$.

Seqüências

A um conjunto ordenado de números denominamos seqüência.

• **notação:** numa seqüência existe um primeiro termo, um segundo termo, um terceiro etc.

1º termo: representa-se por a_1 ou $f(1)$;
2º termo: representa-se por a_2 ou $f(2)$;
3º termo: representa-se por a_3 ou $f(3)$.

Um termo qualquer da seqüência (termo geral) representa-se por a_n ou $f(n)$.

Progressão aritmética

Progressão aritmética (P.A.) é toda seqüência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao seu antecedente somado a uma constante chamada razão da progressão.

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + r \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} = r}$$

• **termo geral**

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

• **soma dos termos**

A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$$

• **propriedades**

• numa P.A. cada termo é igual à média aritmética entre "seus vizinhos":

$$(\ldots, a; b; c; \ldots) \Rightarrow \boxed{b = \frac{a + c}{2}}$$

• três termos consecutivos de uma P.A. são escritos: $(\ldots; x - r; x; x + r; \ldots)$.

Progressão geométrica

Progressão geométrica (P.G.) é toda seqüência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao seu antecedente multiplicado por uma constante, chamada razão da progressão.

$$\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot q \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = q} \; ;$$

$$a_{n-1} \neq 0$$

• **termo geral**

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

• **soma dos termos**

• a soma dos n primeiros termos de uma P.G. é:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}}$$

• soma dos termos de uma P.G. infinita e convergente $(-1 < q < 1)$

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1 - q}}$$

• **propriedades**

• numa P.G. cada termo é igual à média geométrica entre "seus vizinhos":

$$(\ldots; a; b; c; \ldots) \Rightarrow \boxed{b^2 = a \cdot c}$$

• três termos consecutivos de uma P.G. são escritos:

$$\left(\ldots; \frac{x}{q}; x; x \cdot q; \ldots\right)$$

Scanned by CamScanner

★ EXERCÍCIOS ★

41. Analisando cada uma das seqüências seguintes, acrescente mais dois termos a cada uma delas:
a) (1; 3; 5; 7; ...);
b) (1; 2; 4; 8; ...);
c) (2; 5; 8; 11; ...):
d) (1; 4; 9; 16; ...);
e) $\left(\frac{2}{5}; \frac{6}{10}; \frac{18}{20}; \frac{54}{40}; \ldots\right)$.

42. Numa seqüência, a_{n-1} representa o termo anterior ao termo a_n e a_{n+1} representa o termo posterior ao termo a_n; simbolicamente, temos: $(\ldots; a_{n-1}; a_n; a_{n+1}; \ldots)$. A partir disso, escreva os 5 primeiros termos das seqüências em que:
a) $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$ com $n \geqslant 1$;
b) $a_1 = 4$ e $a_{n+1} = a_n + 2$ com $n \geqslant 1$;
c) $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} - 5$ com $n \geqslant 2$;
d) $a_1 = 10$ e $a_n = n \cdot a_{n-1}$ com $n \geqslant 2$.

43. Escreva os quatro primeiros termos das seqüências seguintes, cujo termo geral a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, se escreve:
a) $a_n = n$;
b) $a_n = n^2$;
c) $a_n = 1 + 2n$;
d) $a_n = 5 - 3n$;
e) $a_n = n^2 + 2n + 1$.

44. Calcule:
a) o 8º termo da seqüência (1; 4; 7; ...);
b) o 12º termo da seqüência (−3; 2; 7; ...);
c) o 7º termo da seqüência (1; 2; 4; 8; ...);
d) o 10º termo da seqüência (16; −8; 4; −2; ...).

45. Calcule o 1º termo da P.A. em que $a_8 = 30$ e $a_9 = 35$.

46. Calcule o 4º termo da P.A. em que $a_{10} = 18$ e $a_{12} = 10$.

47. Calcule a razão da P.A. em que $a_5 = 8$ e $a_{12} = 43$.

48. Calcule o 1º termo da P.G. em que $a_6 = 972$ e $a_7 = 2916$.

49. Calcule o 3º termo da P.G. em que $a_5 = 10$ e $a_7 = 50$.

50. Calcule a razão da P.G. em que $a_4 = 3$ e $a_8 = 1875$.

51. Sendo S_n a soma dos n primeiros termos de uma seqüência, calcule:
a) S_{20} para a seqüência (2; 2; 2; 2; ...);
b) S_{32} para a seqüência (1; 4; 7; 10; ...);
c) S_{100} para a seqüência (1; 3; 5; 7; ...);
d) S_{10} para a seqüência (4; −4; 4; −4; 4; ...);
e) S_{13} para a seqüência (5; −5; 5; −5; 5; ...);
f) S_9 para a seqüência (1; 2; 4; 8; ...);
g) S_{11} para a seqüência (4; −2; 1; −1/2; ...).

52. Calcule quantos são os termos da P.A. (3; 9; ... ; 303). e da P.A. (32; 28; 24; ... ; −112).

53. Calcule o número de termos das P.G. seguintes:
a) (3; 6; 12; ... ; 3072);
b) (2; 6; 18; ... ; 486).

54. (MACK-SP) O trigésimo primeiro termo de uma progressão aritmética de primeiro termo 2 e razão 3 é:
a) 63; b) 65; c) 92; d) 95; e) 98.

55. (FEI-SP) Determinar a razão de uma progressão aritmética de 10 termos, sabendo que o primeiro termo é 42 e o último é −12.

56. (PUC-SP) O 24º termo da P.A. $\left(\frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}; \ldots\right)$ é:
a) 35; b) 45; c) 28; d) 38; e) 25/2.

57. (CESGRANRIO) O primeiro termo a de uma P.A. de razão 13 satisfaz $0 \leqslant a \leqslant 10$. Se um dos termos da progressão é 35, o valor de a é:
a) 7; b) 8; c) 9; d) 10; e) 3.

58. (PUC-SP) Três números positivos estão em P.A. A soma deles é 12 e o produto 18. O termo do meio é:
a) 2; b) 6; c) 5; d) 4; e) 3.

59. (FCC-SP) A seqüência (a; b; c) é uma progressão aritmética. Se $a + b + c = 6$ e $a \cdot b \cdot c = -24$, o maior dos termos é:
a) −6; b) 2; c) 3; d) 4; e) 6.

60. (PUC-SP) O terceiro termo de uma seqüência geométrica é 10 e o sexto termo é 80. Então, a razão é:
a) 1; b) −1; c) −2; d) 2; e) 3.

61. (FCC-SP) A seqüência $f(i) = (a_i)$, $i \in \mathbb{N}^*$, onde $a_i = 2 - 3i$, é uma:
a) P.G. alternada;
b) P.A. crescente;
c) P.G. crescente;
d) P.A. decrescente;
e) P.G. decrescente.

62. (UNESP) Numa P.G. de termos positivos, a soma do 6º ao 8º termo é 224 e a soma do 4º ao 6º termo é 56. Então, o 3º termo dessa P.G. é:
a) 6; b) 12; c) 16; d) 8; e) 4.

63. (FEI-SP) Em uma P.G. de quatro termos, a soma dos termos de ordem par é 10 e a soma dos termos de ordem ímpar é 5. Escreva a progressão.

64. (FUVEST-SP) A população humana de um conglomerado urbano é de 10 milhões de habitantes e a de ratos é de 200 milhões. Admitindo-se que ambas as populações crescem em P.G., de modo que a humana dobre a cada 20 anos e a de ratos dobre a cada ano, dentro de 10 anos quantos ratos haverá por habitante?

65. (UF-BA) A soma dos 3º e 4º termos da seqüência:
$$\begin{cases} a_1 = 18 \\ a_{n+1} = 18 + (-1)^{n+1} \cdot a_n, \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$ é:
a) −36; b) −18; c) 0; d) 18; e) 36;

66. (UF-RS) A soma dos seis primeiros termos da seqüência, definida por $a_n = 2^{n - \frac{1}{2}}$ com $n \in \mathbb{N}^*$, é:
a) $2^{\frac{11}{2}}$; b) $31\sqrt{2}$; c) $63\sqrt{2}$; d) $99\sqrt{2}$; e) $512\sqrt{2}$.

Scanned by CamScanner

67. (UF-BA) $(-2; 6; -18; ...)$ é uma progressão:
a) aritmética e $a_7 = 46$;
b) aritmética e $a_7 = -20$;
c) aritmética e $a_7 = -11$;
d) geométrica e $a_7 = (-6)^6$;
e) geométrica e $a_7 = -2 \cdot (-3)^6$.

68. (FUVEST-SP) O quinto e o sétimo termos de uma P.G. de razão positiva valem respectivamente 10 e 16. O 6º termo desta P.G. é:
a) 13; b) $10\sqrt{6}$; c) 4; d) $4\sqrt{10}$; e) 40.

69. Os três primeiros termos de uma P.G. são $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt[3]{2}$ e $a_3 = \sqrt[6]{2}$. O quarto termo é:
a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) 1; c) $\sqrt[8]{2}$; d) $\sqrt[9]{2}$; e) 1/2.

70. (UNESP) Se a, b, c e d formam, nesta ordem, uma P.A. de razão r, então $b^2 - a^2$, $c^2 - b^2$ e $d^2 - c^2$ formam, nesta ordem, uma P.A. de razão:
a) 2; b) 2r; c) 2ar; d) $2r^2$; e) r.

71. (FGV-SP) Quantos termos devemos tomar na P.A. $(-7; -3; ...)$ a fim de que a soma valha 3150?
a) 40; b) 39; c) 43; d) 41; e) 42.

72. (FCC-SP) Se a soma dos n primeiros termos da P.A. $(-40; -38; -36; ...)$ é -264, o valor mínimo de n é:
a) 6; b) 8; c) 15; d) 24; e) 33.

73. (FEI-SP) Calcular a soma dos n primeiros números ímpares positivos.

74. (FCC-SP) Se o termo geral de uma seqüência é $a_n = 5n - 13$, $n \in \mathbb{N}^*$, então a soma dos seus 50 primeiros termos é:
a) 5850; b) 5725; c) 5650; d) 5225; e) 5150.

75. (UE-CE) Sejam $a < b < c$ três termos consecutivos de uma P.G., todos positivos. Se $a = m - 1$, $b = m + 5$ e $c = 11m - 1$, então o valor de $a + b + c$ é:
a) 40; b) 42; c) 44; d) 46; e) 50.

76. (UF-RS) Sabendo que (a_n) é uma P.A. de razão 3, (b_n) é uma P.G. de razão 1/2, $a_6 = b_1$ e $a_3 = b_2$, então $a_1 + b_1$ é:
a) -31; b) -11; c) 18; d) 21; e) 24.

77. (PUC-SP) Seja a seqüência $(a_1; a_2; a_3; ...; a_n; ...)$ onde $a_1 = 1$ e $2a_{p+1} = 2a_p + 1$, para todo p inteiro e $p > 0$. Nestas condições, a_{151} é igual a:
a) 72; b) 74; c) 76; d) 78; e) 80.

78. (PUC-SP) Sabe-se que as seqüências (a; 2; b) e (a; 5/2; b) são, respectivamente, progressões geométrica e aritmética. Os números a e b são raízes da equação:
a) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
b) $x^2 + 5x + 4 = 0$;
c) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;
d) $2x^2 + 5x + 2 = 0$;
e) $2x^2 - 5x - 2 = 0$.

79. (SANTA CASA-SP) Seja g(x) uma função cujo domínio é o conjunto dos números inteiros e que associa a cada inteiro par o valor -1 e a todo ímpar o triplo de seu valor. $g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + ... + g(2k)$, com k inteiro, é igual a:
a) $3k^2 - k$;
b) $2k^3 - 3$;
c) $3k^3 - k$;
d) $k - 3k^3$;
e) n.d.a.

80. (FGV-SP) O terceiro termo de uma P.A. é 11 e a razão é 4; a soma dos 20 primeiros termos é:
a) 790; b) 800; c) 810; d) 820; e) 830.

81. (FUVEST-SP) Suponha que $a_1; a_2; ....; a_{20}$ sejam números reais positivos em progressão geométrica. Sabe-se que $a_1 = 1$ e $a_{20} = \sqrt{10}$. Calcule:

$$\log a_1 + \log a_2 + ... + \log a_{20}$$

(log indica logaritmo decimal).

82. (FUVEST-SP) Em um pentágono convexo os ângulos internos formam uma P.A.. Determine um desses ângulos.

83. (FAAP-SP) Um empreiteiro contratou a abertura de um poço nas seguintes condições: recebe Cz$ 1.000,00 pelo primeiro metro de profundidade, Cz$ 2.000,00 pelo segundo, Cz$ 4.000,00 pelo terceiro e assim sucessivamente, duplicando sempre até o último metro de profundidade. Se o poço tem 10 metros, quanto recebeu o empreiteiro pelo serviço prestado?

84. Sejam $S_1 = 3 + 7 + 11 + ... + 43$ e $S_2 = 1 + 2 + 4 + ... + 128$. Então:
a) $S_1 = S_2$;
b) $S_1 - S_2 = 2$;
c) $S_2 - S_1 = 2$;
d) $S_1 + S_2 = 510$;
e) $S_1 + 2S_2 = 1000$.

85. (MACK-SP) A soma dos n primeiros termos da progressão geométrica $(a; aq^2; aq^4; aq^6; ...)$ com $aq \neq 0$ e $q \neq \pm 1$, é:
a) $S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$
b) $S_n = \frac{a \cdot (1 - q^n)}{q^n - 1}$
c) $S_n = \frac{a \cdot (1 - q^{2n})}{1 - q^2}$
d) $S_n = \frac{a \cdot (1 - q)^{2n}}{q - 1}$
e) $S_n = \frac{2a \cdot (1 - q^n)}{1 - q^2}$

86. (UF-VIÇOSA) A soma da série geométrica $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^8} + ... + \frac{1}{10^{2n}} + ...$ é:
a) 1/9999;
b) 1/9;
c) 1/999;
d) 1/99;
e) 1/99999.

87. (SANTA CASA-SP) Simplificando-se a expressão $= \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}} \cdot ...$ obtém-se:
a) $\sqrt{x}$; b) $\sqrt[3]{x}$; c) 1/2; d) 1; e) 1/729.

88. (UF-RS) O limite da soma dos termos de uma P.G. (soma dos infinitos termos de uma P.G. convergente) é 1 e o primeiro termo é 2/3. O terceiro termo desta progressão é:
a) $\frac{2}{27}$; b) $\frac{1}{9}$; c) $-\frac{1}{9}$; d) $\frac{2}{9}$; e) 6.

89. (UF-ES) A soma dos termos de ordem par de uma P.G. infinita é 10 e a soma dos termos de ordem ímpar é 20. O 3º termo desta P.G. é:
a) $\frac{15}{4}$; c) $\frac{11}{2}$; d) 4; e) $\frac{13}{2}$.

Scanned by CamScanner

Números complexos

Unidade imaginária

É o número i, tal que: $\boxed{i^2 = -1}$

Definição de número complexo

É todo número do tipo:

$$\boxed{z = a + b \cdot i}$$

onde: $\begin{cases} a \in \mathbb{R},\ a = \text{parte real do complexo;} \\ b \in \mathbb{R},\ b = \text{coeficiente da parte imaginária;} \\ i = \text{unidade imaginária,} \end{cases}$

$$\boxed{C = \{z \mid z = a + bi,\ a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R}\}}$$

é o conjunto dos números complexos.

• imaginários puros

$\begin{cases} z = a + bi \\ \text{e } \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = bi}$ é um imaginário puro.

• números reais

$\begin{cases} z = a + bi \\ \text{e } \quad b = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = a}$ é um número real; logo, todo número real é complexo.

Conjugado de um número complexo

Se $\boxed{z = a + bi \text{ então } \bar{z} = a - bi}$, onde $\bar{z}$ é o conjugado de z.

Igualdade de complexos

$\begin{cases} z_1 = a_1 + b_1 \cdot i \\ z_2 = a_2 + b_2 \cdot i \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ \text{e} \\ b_1 = b_2 \end{cases}}$

Operações com números complexos

Sendo: i = unidade imaginária

$z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$

$z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$, temos as seguintes operações:

• potências de i

$\begin{cases} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -j \\ i^4 = 1 \end{cases}$

$\boxed{i^n = i^{r},\ n \in \mathbb{N}}$ (resto)

onde:

r = 0, 1, 2 ou 3:

$$\begin{array}{r|l} n & 4 \\ \hline r & q \end{array}$$

resto

• adição

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i}$$

• subtração

$$\boxed{z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i}$$

• multiplicação

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 \cdot i) \times (a_2 + b_2 \cdot i) = \\ &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + \\ &\quad + a_2 \cdot b_1) \cdot i \end{aligned}}$$

ou, efetua-se a multiplicação de complexos aplicando-se a propriedade distributiva da multiplicação (abrem-se os parênteses) e usa-se o fato de que $i^2 = -1$.

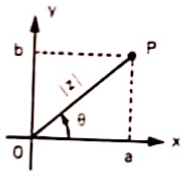
• divisão

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}}$$

Assim, obtém-se o quociente de dois complexos multiplicando-se o numerador e denominador da fração pelo conjugado do denominador.

Representação gráfica

O número complexo $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ é representado pelo ponto P de coordenadas (a; b) no plano chamado de plano de Argand-Gauss.



P: é o afixo de z;

Ox: eixo real;

Oy: eixo imaginário.

• módulo

$z = a + bi = \boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$ é um número real que representa a distância do afixo de z à origem 0 do sistema de coordenadas.

• argumento

É o ângulo θ determinado pelo eixo real Ox e o segmento OP, medido no sentido anti-horário a partir do eixo real.

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a}{|z|}} \text{ e } \boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|}}$$

Forma trigonométrica

$z = a + bi \Leftrightarrow z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$

Potenciação de complexos (fórmula de Moivre)

$z = a + bi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$

$\Rightarrow \boxed{z^n = (|z|)^n \cdot [\cos(n\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\theta)],\ n \in \mathbb{N}}$

★ EXERCÍCIOS ★

90. Calcule:

a) i^{13}; b) i^{26}; c) i^{40};

d) i^{55}; e) i^{79}; f) $\dfrac{i^{15} + i^{20}}{i^{60}}$.

91. Efetue todas as operações indicadas e escreva o resultado na forma de $z = a + bi$, com a e b reais:

a) $(3 + 2i) + (2 - 5i) \cdot i$;

b) $(1 + i) \cdot (1 - i) - 2i$;

c) $(1 + 2i) - (2 - 3i) \cdot (1 + 5i)$;

d) $(4 - 3i) \cdot (5 - i) \cdot (1 + i)$;

e) $(3 + 2i)^2$;

f) $(5 - i)^2$;

g) $(1 + i)^3$;

h) $\dfrac{3}{2 + i}$;

i) $\dfrac{1 + 2i}{3 - i}$;

j) $\dfrac{i^9}{4 - 3i}$;

k) $\dfrac{1}{i}$;

l) $\dfrac{i^{11} + 2i^{13}}{i^{18} - i^{37}}$;

m) $\dfrac{(3 + 2i)^2 + (2 - i)^2}{(1 + i)^2}$;

n) $\dfrac{3 + 2i}{1 - i} + \dfrac{5 - i}{1 + i}$;

o) $\dfrac{3 - i}{2 - i} + \dfrac{2 + i}{1 - 2i} + \dfrac{5}{3 + i}$.

Scanned by CamScanner

92. Calcule a e b reais de modo que:

a) $a + bi = 2(3 + i) + (1 - i)(2 + i)$;

b) $(3 - 2i) \cdot (a + bi) = 100$;

c) $(a - 3i) \cdot (a + 3i) \cdot i$ seja real;

d) $(2a - i) \cdot (3 + ai)$ seja real;

e) $(a - 2i)(2a - i)$ seja imaginário puro;

f) $(a + i) \cdot (3 - ai)$ seja imaginário puro;

g) $\dfrac{1 + 2i}{2 + ai}$ seja real;

h) $\dfrac{2 - ai}{1 + 2ai}$ seja imaginário puro;

i) $(2 - a + 3b) + 2bi = 0$.

93. Calcule:

a) $(1 + i)^2$;

b) $(1 - i)^2$;

c) $\dfrac{1 + i}{1 - i}$

d) $\dfrac{1 - i}{1 + i}$;

e) $(1 + i)^{20}$;

f) $(1 - i)^{25}$;

g) $(1 + i)^{80} - (1 - i)^{80}$;

h) $\dfrac{(1 - i)^{96}}{(1 + i)^{94}}$

94. Escreva na forma trigonométrica os seguintes complexos:

a) $1 + i$;

b) $2i$;

c) -4;

d) $-1 + \sqrt{3}\ i$;

e) $\sqrt{3} - i$;

f) $-2 - 2i$;

g) $-4i$

h) $-\sqrt{3} - i$;

i) 8;

j) $\dfrac{1 + i}{i}$.

95. Sendo $i^2 = -1$, e $z = i + \dfrac{1}{1 - i}$, calcule $|z|$.

96. Calcule o módulo do número complexo $\dfrac{3 - 2i}{4 + 6i}$.

97. Se $z = \dfrac{i}{1 - \sqrt{3} \cdot i}$ é um número complexo, determine z^2.

98. Calcule o número complexo x, tal que:

$$x = (-3 - 2i)^2 - \frac{2}{i}$$

99. Sendo $A + Bi = \dfrac{9 - 3i}{4 - 2i}$, onde A e B são reais e i é a unidade imaginária, calcule $A + B$.

100. Sendo $z = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ i\right)$, calcule z^2.

101. Se i é a unidade imaginária, calcule $A = \dfrac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3}$.

102. Se $i^2 = -1$, calcule $y = \dfrac{11i^{112} - 2i^{131}}{2i^0 + i^{123}}$.

103. Calcule $z = \dfrac{i^3 - i}{2 + i}$.

104. Calcule y, tal que $y = \dfrac{1 + i}{3 + i} - \dfrac{2}{3 - i} + \dfrac{i}{3 + i}$.

105. Calcule z, tal que $z = \dfrac{i}{i - 2} - \dfrac{2 - 3i}{i + 2}$.

106. Sendo $z_1 = \dfrac{1}{2i + 4}$ e $z_2 = \dfrac{3i}{10} + 1$, calcule $z_1 + z_2$.

107. (UNESP) Seja $z = 8 \cdot (1 + \cos 60° + i \cdot \text{sen } 60°)$, onde $i = \sqrt{-1}$; se ρ é o módulo de z, então:

a) $\rho = 8\sqrt{3}$;

b) $\rho = 8$;

c) $\rho = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$;

d) $\rho = 4\sqrt{3}$;

e) n.d.a.

108. (UNESP) Seja i tal que $i^2 = -1$. Se $z = c + di$, com c e d reais, é um número complexo e $\bar{z}$ o conjugado de z, então:

a) $z - \bar{z} = -2d$;

b) $z \cdot \bar{z} = c^2 - d^2$;

c) $\overline{z \cdot \bar{z}} = c^2 + d^2$;

d) $z \cdot \dfrac{1}{\bar{z}} = 1$;

e) $z \cdot \bar{z} = d^2 - c^2$.

109. Seja a seqüência (a_n), cujo termo geral é $a_n = i^n$, onde $i^2 = -1$ e $n \in \mathbb{N}$. A soma dos 10 primeiros termos dessa seqüência é:

a) $\dfrac{2}{i - 1}$;

b) $\dfrac{2}{1 + i}$;

c) 0;

d) $1 + i$;

e) $1 - i$.

110. O número complexo $(1 + i)^{11}$ pode ser posto na forma $a + bi$, onde a e b são números inteiros; neste caso b é igual a:

a) 11;

b) 21;

c) 32;

e) 43;

e) 54.

111. (FATEC) Se $(1 + i)(a + bi) = (1 + ai)(b + i)$, onde a e b são reais, então:

a) $a = -b$;

b) $a = 2b$;

c) $a = 3b$;

d) $a = 4b$;

e) n.d.a.

112. (MACK-SP) Se $u = 4 + 3i$ e $v = 5 - 2i$, calcule uv.

113. (MACK-SP) Simplifique: $\dfrac{(2 + i)^{101} \cdot (2 - i)^{50}}{(-2 - i)^{100} \cdot (i - 2)^{49}}$

114. (UNESP) Se $i = \sqrt{-1}$ e $z = \dfrac{1}{2} - i^{98}$, então z^3 é igual a:

a) $-\dfrac{1}{8}$;

b) $\dfrac{3}{2}$;

c) $\dfrac{27}{8}$;

d) $\dfrac{11}{8} + \dfrac{1}{4}i$;

e) $\dfrac{11}{8} - \dfrac{1}{4}i$

115. (MACK-SP) Se $u = x + iy$ e $v = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, calcule a parte real do número complexo $v \cdot \bar{u}$.

116. (PUC-SP) Se $f(z) = z^2 - z + 1$, calcule $f(1 - i)$.

117. (SANTA CASA-SP) Seja g(x) uma função cujo domínio é o conjunto dos números inteiros e que associa a cada inteiro par o valor -1 e a todo ímpar o triplo de seu valor. $g(i^{4k})$, com $i = \sqrt{-1}$ (unidade imaginária) vale:

a) -3; b) -1; c) 3; d) 1; e) n.d.a.

Scanned by CamScanner

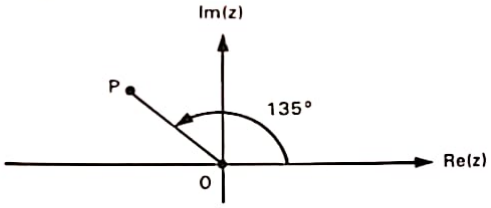
118. (CESGRANRIO) O módulo do número complexo $(1 + 3i)^4$ é:
a) 256; c) 81; e) 16.
b) 100; d) 64;

119. (SANTA CASA-SP) Determine os valores de w que satisfazem a igualdade $w^2 + |w| = 0$, onde $|w|$ é o módulo do número complexo w.

120. (FEI-SP) Dados os números complexos $z = 1 + i$ e $m = 1 - i$, determine $\left| \dfrac{z - m}{1 - \bar{z}m} \right|$.

121. (UNESP) O menor valor de n, $n \in \mathbb{N}^*$, para que o número complexo $(1 + i \cdot \sqrt{3})^n$, onde $i^2 = -1$, seja um número real é:
a) 2; b) 3; c) 5;
d) 7; e) 11.

122. (PUC-SP) Na figura abaixo, o ponto P é a imagem de um número complexo z, representado no plano de Gauss. Se $OP = 2\sqrt{2}$, então z^2 é igual a:
a) $4 - 4i$; d) $8i$;
b) $-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \cdot i$; e) $-8i$.
c) $4 + 4i$;



123. (FATEC) Se $i^2 = -1$ e $z = (1 - \sqrt{3} \cdot i) \cdot (-1 + i)$; se arg(z) denota o argumento de z, então:
a) $0 < \arg(z) < \pi/2$; d) $3\pi/2 < \arg(z) < 2\pi$;
b) $\pi/2 < \arg(z) < \pi$; e) $\arg(z) \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$.
c) $\pi < \arg(z) < 3\pi/2$;

124. (UNESP) Se z é um número complexo tal que $z = i^{87} \cdot (1 + \sqrt{3} \cdot i)^3$, então, o argumento de z é:
a) $\pi/2$; b) $\pi/3$; c) $2\pi/3$; d) $7\pi/6$; e) $11\pi/6$.

125. (FATEC) Se $w = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \dfrac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen} \dfrac{\pi}{4}\right)$, então w^{12} é igual a:
a) $-8 \cdot \cos \dfrac{\pi}{4}$; d) $-16 \cdot i \cdot \text{sen} \dfrac{\pi}{4}$;
b) $8 \cdot i \cdot \text{sen} \dfrac{\pi}{4}$; e) $16\left(\cos \dfrac{\pi}{4} - i \cdot \text{sen} \dfrac{\pi}{4}\right)$
c) -16;

126. (FGV-SP) As raízes quadradas do número $3 + 4i$, onde i representa a unidade imaginária, são:
a) $\{2 + i; -2 - i\}$ d) $\{4 + i; -4 - i\}$;
b) $\{1 + i; -1 - i\}$; e) n.d.a.
c) $\{3 + i; -3 - i\}$;

127. (FUVEST-SP) O número complexo $z \neq 0$ e o seu inverso $\dfrac{1}{z}$ têm o mesmo módulo. Conclui-se que:
a) z e $\dfrac{1}{z}$ são conjugados; d) z e $\dfrac{1}{z}$ são reais;
b) $z + \dfrac{1}{z} = i$; e) $z^2 = 1$.
c) este módulo é 2;

128. (FUVEST-SP) Determine dois números complexos z_1 e z_2, tais que $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$ e $z_1 + z_2 = 1$.

129. (UNESP) Se $\bar{z}$ é o conjugado de um número complexo z, então é falso que:
a) $z \cdot \bar{z} = |z|$;
b) $\overline{z + \bar{z}} = \bar{z} + z$;
c) $z + \bar{z}$ é um número real;
d) $\left| \dfrac{z}{|z|} \right| = 1$, para $z \neq 0$;
e) $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$, para $z \neq 0$.

130. (UNESP) Seja $i^2 = -1$, $x = 1 + 2i$ e $y = x + \dfrac{1}{x}$; se z é o módulo de y, então:
a) $z = 1$; d) $z = 2$;
b) $z = 4$; e) n.d.a.
c) $z = 3$;

Polinômios

Toda expressão do tipo:
$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, onde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

• valor numérico
O valor numérico de P(x) para $x = \alpha$ é dado por:
$P(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n$

• polinômio identicamente nulo
$P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow P(\alpha) = 0, \forall \alpha$
$P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$

• polinômios idênticos
$A(x) \equiv B(x) \Leftrightarrow A(\alpha) = B(\alpha), \forall \alpha$.

Sendo $A(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$
e $B(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$, então:
$A(x) \equiv B(x) \Leftrightarrow a_0 = b_0; a_1 = b_1; \ldots; a_{n-1} = b_{n-1}; a_n = b_n$.

• grau de um polinômio
É o maior expoente da variável x, com coeficiente não nulo, que aparece na representação do polinômio P(x).

• notação: gr(P)

OBSERVAÇÃO Se $P(x) \equiv 0$, não se define gr(P).

Divisão de polinômios

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

Temos que:
$A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$; com a condição $gr(R) < gr(B)$ ou $R(x) \equiv 0$

Teorema do resto
O resto da divisão de um polinômio P(x) por $x - a$ é igual a P(a).

Teorema de D'Alembert
Um polinômio P(x) é divisível por $x - a$, se e somente se, $P(a) = 0$.

Scanned by CamScanner

Equações algébricas

Seja $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ um polinômio na variável x, de grau n ($a_0 \neq 0$); então $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ é uma equação algébrica de grau n.

Raízes de uma equação algébrica

Na equação algébrica $P(x) = 0$, todo número complexo r, tal que $P(r) = 0$, chama-se raiz (ou zero) da equação.

Teorema fundamental da álgebra

"Toda equação algébrica de grau n, onde $n \geqslant 1$, admite pelo menos uma raiz complexa."

Teorema da decomposição

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ é um polinômio de grau $n > 0$ e pode ser fatorado da seguinte forma:
$P(x) = a_0(x - r_1) \cdot (x - r_2) ... (x - r_n)$ onde $r_1, r_2, ... r_n$ são as raízes de P(x).

Multiplicidade de uma raiz

Se $P(x) = (x - r)^m \cdot Q(x)$ (com $m \in \mathbb{N}^*$) e $Q(r) \neq 0$, então r é uma raiz com multiplicidade m de $P(x) = 0$.

Teorema das raízes complexas

Seja P(x) um polinômio de grau n, onde $n \geqslant 2$, com coeficientes reais; se $P(z) = 0$, então $P(\bar{z}) = 0$, sendo $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$ (com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$).

Relações de Girard

Seja $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ ($a_0 \neq 0$) a equação cujas raízes são $r_1, r_2, ..., r_n$:

$$r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + ... + r_{n-1} \cdot r_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + ... + r_{n-2} \cdot r_{n-1} \cdot r_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 ... r_n = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0}$$

★ EXERCÍCIOS ★

131. (PUC-SP) Determine os valores de m, n e p de modo que sejam idênticos os polinômios $P_1(x) = (m + n + p)x^4 - (p + 1)x^3 + mx^2 + (n - p)x + n$ e $P_2(x) = 2mx^3 + (2p + 7)x^2 + 5mx + 2m$.

132. (CESESP) Sejam f e g dois polinômios não nulos de coeficientes reais. Assinale a alternativa correta.
a) grau (fg) = grau (f) · grau (g);
b) grau (f) $\geqslant$ grau (fg);
c) grau (fg) = grau (f) + grau (g);
d) grau (f + g) = grau (f) + grau (g);
e) grau (f + g) = max {grau (f), grau (g)}.

133. (PUC-SP) O polinômio na indeterminada X, dado por $f = (2a^2 + a - 3)X^3 + (a^2 - 1)X^2 + (a + 1)X - 3$, $a \in \mathbb{R}$, tem grau:
a) 3, para todo $a \in \mathbb{R}$;
b) 2, se $a = 1$;
c) 3, se $a \neq -3/2$;
d) 1, se $a = 1$;
e) 0, para todo $a \in \mathbb{R}$

134. (PUC-SP) Se p e q são polinômios de graus 4 e 5, respectivamente, então o grau de:
a) p + q é 5;
b) pq é 20;
c) p + q é 9;
d) pq é 10;
e) q − p é 4.

135. (PUCC-SP) Dado o polinômio $P(x) = x^n + x^{n-1} + ... x^2 + x + 3$, se n for ímpar, então $P(-1)$ vale:
a) −1;
b) 0
c) 2;
d) 1;
e) 3.

136. (UF-RS) Se $r(x) = ap(x) + bq(x)$, com $r(x) = 4x^2 + kx - 8$, $p(x) = 2x^2 - 3x - 2$, $q(x) = x^2 - 5x + 1$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$, então a + b + k é:
a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

137. (FEI) Determine a e b para que a identidade $\frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1} = \frac{3x-5}{x^2-2x-3}$, seja verificada para todo $x \in \mathbb{R} - \{-1, 3\}$.

138. (UC-MG) A soma dos valores de A, B e C tal que $\frac{2x-3}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x+1}$ é:
a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

139. (UF-BA) Determine o polinômio que, dividido por 2x + 3, tem quociente x − 1 e resto 6.

140. (EE MAUÁ-SP) Dados: $P(x) = 2x^3 + Ax + 3B$ (A e B constantes) e $Q(x) = x^2 - 3x + 9$
a) Divida P(x) por Q(x).
b) Determine A e B para que a divisão seja exata.

141. (CESGRANRIO) O polinômio $x^3 + 2x^2 + mx + n$ é divisível por $x^2 + x + 1$. O valor de m + n é:
a) −3;
b) −1;
c) 1;
d) 2;
e) 3.

142. (CESGRANRIO) O polinômio $x^3 + px + q$ é divisível por $x^2 + 2x + 5$. Os valores de p e q são, respectivamente:
a) 2 e 5;
b) 5 e 2;
c) 1 e 5;
d) 1 e −10;
e) 3 e 6.

143. (UF SÃO CARLOS-SP) Classifique as seguintes afirmações em V (verdadeiro) e F (falso).
I — Se P(x) e Q(x) são polinômios de grau n, então P(x) + Q(x) é um polinômio de grau 2n;
II — Se P(x) e Q(x) são polinômios de grau n, então P(x) · Q(x) é um polinômio de grau n^2;
III — Se P(x) é um polinômio de grau n + 1 e Q(x) um polinômio de grau n − 3, então o resto da divisão P(x) : Q(x) é um polinômio de grau 4.

144. (SANTA CASA-SP) O polinômio $P_1(x) = x^3 + px + q$ é divisível por $P_2(x) = x^2 + mx - 1$ se:
(m, p e q são números reais)
a) $p = -q^2 - 1$ e $m = q$;
b) $m^2 - 1 = p$ e $m - q = 0$;
c) $q + p = 1$ e $m = 0$;
d) $m = -q$ e $p = 1 + q^3$;
e) n.d.a.

Scanned by CamScanner

145. (UE-CE) Se o polinômio $P(x) = x^3 - kx^2 + kx - 1$ é divisível por $(x - 1)^2$, então k é igual a:
a) 1; c) 3;
b) 2; d) 4.

146. (SANTA CASA-SP) Numa divisão de polinômios em que o dividendo é de grau n e o quociente é de grau $n - 4$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 4$, o grau do resto pode ser no máximo igual a:
a) 3; b) 4; c) 5; d) $n - 4$; e) $n - 5$.

147. (MACK-SP) Sabendo-se que $ax^4 + bx^3 + 1$ é divisível por $(x - 1)^2$, então o valor de $2a + b$ é:
a) 2; b) 4; c) 5; d) -7; e) 8.

148. (PUC-SP) Ache o resto da divisão do polinômio $p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$ por $x + 1$.

149. (PUC-SP) Determine o valor de a, para que o resto da divisão de $p(x) = ax^3 - 2x + 1$, por $x - 3$, seja 4.

150. (MACK-SP) O resto da divisão de $p(x) = x^{2n} + 1$ (n número natural não nulo) por $q(x) = x + 1$ é:
a) sempre 0;
b) sempre 2;
c) 0 se e somente se n for ímpar;
d) 2 se e somente se n for par;
e) n.d.a.

151. (PUC-SP) A divisão do polinômio p(x) por $x - a$ fornece o quociente $q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ e o resto $p(a) = 1$. Sabendo que $p(0) = -15$, o valor de a é:
a) 13; c) 14; e) 16.
b) -13; d) -16;

152. (FGV-SP) Determine o produto $m \cdot n$ para que o polinômio $x^3 - 6x^2 + mx + n$ seja divisível por $(x - 1) \cdot (x - 2)$.

153. (SANTA CASA-SP) Um polinômio P(x) dividido por $x - 2$ dá resto 3 e dividido por $x^2 - 2$ dá resto $3x - 1$. Calcule o resto da divisão de P(x) por $(x - 2)(x^2 - 2)$.

154. (UnB) $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são polinômios do 2º grau que se anulam quando $x = 0$. O resto da divisão de $P_1(x)$ por $(x - 1)(x + 2)$ é $3x + 1$. O resto da divisão de $P_2(x)$ por $(x + 1)(x + 2)$ é $2x - 1$.
Então, o quociente da divisão de $P_1(x)$ por $P_2(x)$ é:
a) 1; b) 0; c) $x + 1$; d) n.d.a.

155. (FCC-BA) Dividindo-se o polinômio f por $x^2 - 1$, obtém-se quociente $x + 2$ e resto $x - 3$. O resto da divisão de f por $x - 1$ é:
a) 3; b) 2; c) 0; d) -2; e) -3.

156. (EE MAUÁ-SP) Determinar p e q de modo que o polinômio $P(x) = x^3 - 10x^2 + px + q$ seja divisível pelo produto $(x - 1)(x - 2)$.

157. (ITA-SP) Sejam a, b e c números reais que nesta ordem formam uma progressão aritmética de soma 12. Sabendo-se que os restos das divisões de $x^{10} + 8x^6 + ax^5 + bx^3 + cx$ por $x - 2$ e por $x + 2$ são iguais, então a razão desta progressão aritmética é:
a) 1; c) 37/5; e) -3.
b) 28/5; d) 44/15;

158. Obter o quociente e o resto das seguintes divisões:
a) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ por $x - 1$;
b) $3x^4 - 7x$ por $x + 2$.

159. (PUCC-SP) Se você efetuar a divisão do polinômio $2x^3 - 21x^2 + 5x - 1$ pelo binômio $x + 1$:
a) O quociente não possui termo independente.
b) Os coeficientes dos termos do quociente serão 2, -23 e 28.
c) O resto será 29.
d) O quociente é do 1º grau.
e) n.d.a.

160. (FEI) Determinar m e n reais para que o polinômio $P(x) = x^4 + mx^3 + nx^2 - 17x + 16$ seja divisível por $(x - 1)^2$.

161. (EE MAUÁ-SP) Determine todas as raízes da equação $P(x) = 0$, sendo $P(x) = 9x^3 - 36x^2 + 29x - 6$. Sabe-se que esse polinômio é divisível por $x - 3$.

162. (FUVEST-SP) A equação $x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$, onde m e n são números reais, admite $1 + i$ (i sendo a unidade imaginária) como raiz. Então, m e n valem respectivamente:
a) 2 e 2; d) 2 e -2;
b) 2 e 0; e) -2 e 0.
c) 0 e 2;

163. (ABC-SP) Uma equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$, é recíproca se, e somente se, a existência de cada raiz a real ou complexa implica a existência da raiz $\frac{1}{a}$.
a) $x^2 - x = 0$ é recíproca;
b) $x^3 - 1 = 0$ é recíproca;
c) $x - \sqrt{4} = 0$ é recíproca;
d) $3x^2 + 10x + 3 = 0$ é recíproca;
e) $x^2 - 6x + 9 = 0$ é recíproca.

164. (PUCC-SP) Um polinômio do 3º grau anula-se para $x = 1$ e para $x = -3$. Assume os valores -12 e 30 para $x = 0$ e $x = 2$, respectivamente. Esse polinômio é:
a) $P(x) = (x + 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 4)$;
b) $P(x) = (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 4)$;
c) $P(x) = (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x + 4)$;
d) $P(x) = (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 4)$;
e) n.d.a.

165. (PUC-SP) Em relação ao polinômio $P(x) = (x - 1)^2 \cdot (x^2 - 1)$, o que se pode afirmar sobre o número 1?
a) é raiz simples; d) é raiz quádrupla;
b) é raiz dupla; e) não é raiz.
c) é raiz tripla;

166. (MACK-SP) Na equação $(x^3 - x^2 + x - 1)^{18} = 0$, a multiplicidade da raiz $x = 1$ é:
a) 1; b) 9; c) 18; d) 36; e) 54.

Scanned by CamScanner

167. (UF-MT) Sejam -2 e 3 duas raízes da equação $2x^3 - x^2 + kx + t = 0$, onde $k, t \in \mathbb{R}$. A terceira raiz é:
a) impossível de ser determinada;
b) -1;
c) $-1/2$;
d) $1/2$;
e) 1.

168. (FEI-SP) Resolva a equação cúbica:
$x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$.

169. (CESGRANRIO) Um dos fatores de $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$ é $2x - 1$. A maior raiz de $P(x)$ é:
a) 1;
b) 2;
c) 3;
d) 4;
e) 6.

170. (PUC-RJ) Sobre as raízes da equação $x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0$ podemos afirmar:
a) Nenhuma raiz é real.
b) Há uma raiz real e duas imaginárias conjugadas.
c) Há três raízes reais cuja soma é 3.
d) Há três raízes reais cuja soma é 1.
e) Há três raízes reais cuja soma é -3.

171. (PUC-SP) Calcule a soma das raízes da equação $17x^5 - 4x^3 + 9x^2 - 14x + 5 = 0$.

172. (CESGRANRIO) A média aritmética das raízes da equação $x^3 - 12x^2 + 6x = 0$ é:
a) 5;
b) 4;
c) 3;
d) 0;
e) 2.

173. (CESGRANRIO) O produto de duas das raízes da equação $2x^3 - 19x^2 + 37x - 14 = 0$ é 1. A soma das duas maiores raízes da equação é:
a) 7;
b) 8;
c) 9;
d) 19/2;
e) 19.

174. (EE MAUÁ-SP) Dada a equação $x^3 - 9x^2 + 26x + a = 0$, determine o valor de a para que as raízes dessa equação sejam números naturais sucessivos.

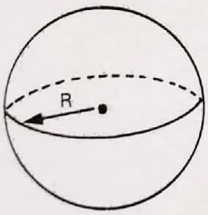
175. (FUVEST-SP) A equação do segundo grau $ax^2 - 4x + 16 = 0$ tem uma raiz cujo valor é 4. A outra raiz é:
a) 1;
b) 2;
c) 3;
d) -1;
e) -2.

176. (FEI-SP) Determine a soma dos quadrados das raízes da equação $2x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 3 = 0$.

177. (MACK-SP) As raízes da equação $x^3 + 9x^2 + nx + m = 0$ formam uma P.A. de razão 3. Então:
a) $n = 3$ e $m = 6$;
b) $n = 18$ e $m = 0$;
c) $n = 3$ e $m = 1/18$;
d) $m + n = 9$;
e) $n \neq 0$ e $m \cdot n = 9$.

GEOMETRIA ESPACIAL

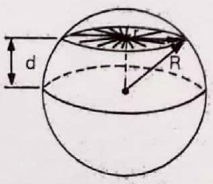
Esfera



V: volume da esfera $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

S: área da superfície esférica $S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$

Intersecção de uma esfera com um plano



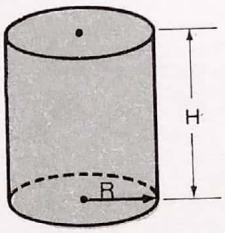
$R^2 = d^2 + r^2$

R: raio da esfera
r: raio da secção
d: distância do centro da esfera ao plano da secção.

Cilindro reto

R: raio da base

H: altura



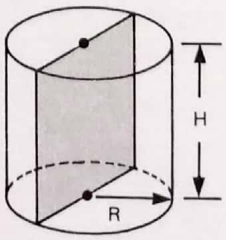
B: área da base $B = \pi \cdot R^2$

V: volume $V = B \cdot H$

S_L: área lateral $S_L = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H$

Secção meridiana

É o retângulo resultante da intersecção do cilindro com um plano que contém os centros das bases.



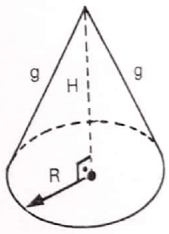
OBSERVAÇÃO Cilindro eqüilátero é aquele em que $H = 2R$ (altura = diâmetro da base); neste caso a secção meridiana é um quadrado.

Cone reto

R: raio da base

H: altura

g: geratriz



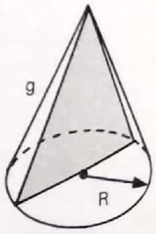
B: área da base $B = \pi \cdot R^2$

V: volume $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$

S_L: área lateral $S_L = \pi \cdot R \cdot g$

Secção meridiana

É o triângulo resultante da intersecção do cone com um plano que contém o vértice do cone e o centro da base.

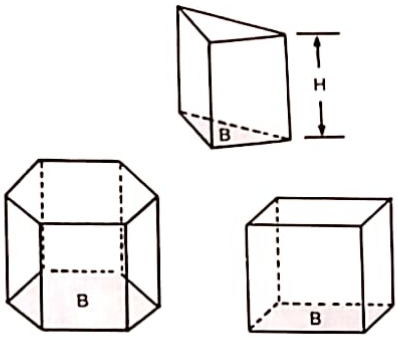


OBSERVAÇÃO Cone eqüilátero é aquele em que $g = 2R$ (geratriz = diâmetro da base); neste caso a secção meridiana é um triângulo eqüilátero.

Scanned by CamScanner

Prisma reto

Bases: polígonos paralelos e congruentes;
Faces laterais: são retângulos.

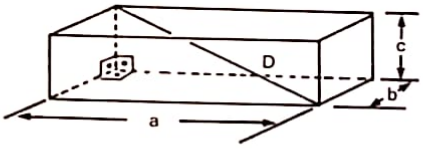


V: volume
B: área da base } ⇒ $V = B \cdot H$
H: altura

OBSERVAÇÃO Prisma regular: as bases são polígonos regulares; as faces laterais são retângulos todos iguais entre si.

Paralelepípedo retângulo

É um prisma de seis faces, todas retangulares.



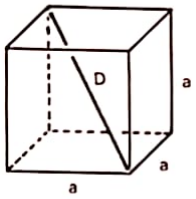
V: volume ⇒ $V = a \cdot b \cdot c$

S: área ⇒ $S = 2 \cdot (ab + ac + bc)$

D: diagonal ⇒ $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Cubo

É um paralelepípedo de seis faces, todas quadradas.



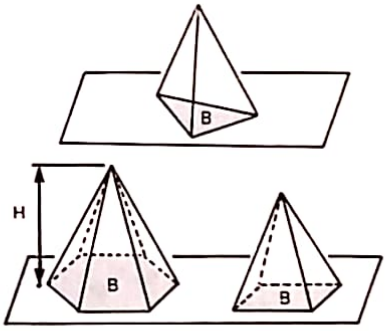
V: volume ⇒ $V = a^3$

S: área ⇒ $S = 6 \cdot a^2$

D: diagonal ⇒ $D = a\sqrt{3}$

Pirâmide

Base: em forma de polígono.
Faces laterais: são triangulares.

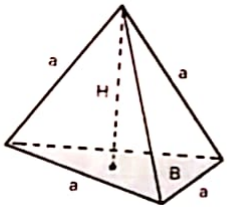


V: volume
B: área da base } ⇒ $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$
H: altura

OBSERVAÇÃO Pirâmide regular: a base é um polígono regular; as faces laterais são triângulos isósceles.

Tetraedro regular

É uma pirâmide de base triangular regular; todas as quatro faces são triângulos eqüiláteros.



B: área da base; é a área do triângulo eqüilátero de lado a ⇒ $B = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

H: altura; distância do vértice ao centro da base ⇒ $H = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3}$

V: volume; $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$ ⇒

⇒ $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$

★ EXERCÍCIOS ★

178. O raio de uma esfera é de 6 cm; calcule seu volume e a área de sua superfície.

179. A área da superfície de uma esfera mede 36π cm²; qual o volume da esfera correspondente?

180. Uma esfera de raio 13 cm é seccionada por um plano que passa a 5 cm de seu centro. Qual a área da secção formada?

181. Um plano intercepta uma esfera de modo que o comprimento da secção é 6π cm. Qual a distância desse plano ao centro da esfera se esta tem raio de 5 cm?

182. O raio da base de um cilindro reto é de 5 cm e a altura do cilindro mede 10 cm. Qual o volume e a área da superfície deste cilindro?

183. A área lateral de um cilindro eqüilátero mede 64π cm². Qual o volume deste cilindro?

184. Duplicando-se o raio da base de um cilindro reto e quadruplicando-se sua altura, seu volume fica multiplicado por k; determine k.

185. Uma esfera está inscrita num cilindro eqüilátero. Determine a razão entre os volumes e as áreas desses dois sólidos.

Scanned by CamScanner

186. Um triângulo eqüilátero de lado 12 cm é a secção meridiana de um cone eqüilátero. Determine o volume e a área desse cone.

187. Seccionando-se um cone reto por um plano paralelo à sua base obtém-se um tronco de cone cujo volume é igual a 7/8 do volume do cone original.Se a altura do cone original é de 12 cm, a que distância do vértice está a secção?

188. Um cone reto está inscrito num cilindro reto de modo que a base do cone coincide com uma das bases do cilindro e o vértice do cone é o centro da outra base do cilindro. Qual a razão entre os volumes do cilindro e do cone?

189. Uma esfera de raio 3 cm está inscrita num cone eqüilátero. Qual o volume deste cone?

190. A aresta da base de um prisma reto hexagonal regular mede 4 cm e a altura desse prisma mede 2 cm. Qual o volume e a área da superfície do prisma?

191. As nove arestas de um prisma triangular regular medem 6 cm cada uma. Qual o volume do prisma?

192. Um cilindro reto está inscrito num prisma quadrangular regular cuja aresta da base mede 4 cm e cuja altura mede 10 cm. Qual o volume do cilindro?

193. As dimensões de um paralelepípedo retângulo formam uma P.G. de 3 termos cujo produto é 8 e cuja razão é 2. Qual o volume e a área da superfície do paralelepípedo?

194. A diagonal de um cubo mede $12\sqrt{3}$ cm. Qual o volume do cubo?

195. A soma das dimensões de uma paralelepípedo retângulo é 7 cm e a área de sua superfície é de 28 cm². Qual a medida de sua diagonal?

196. Uma esfera de raio 4 cm está inscrita num cubo. Qual a área da superfície do cubo?

197. Uma esfera está circunscrita a um cubo de aresta 2 cm. Qual o volume da esfera?

198. Uma pirâmide quadrangular regular tem a aresta da base medindo $5\sqrt{2}$ cm e a aresta lateral medindo 13 cm. Qual o volume desta pirâmide?

199. Qual o volume de um tetraedro regular cuja aresta mede 4 cm? E qual é a área da superfície do mesmo tetraedro?

200. Um cone reto de altura 12 cm e raio da base 2 cm está inscrito numa pirâmide triangular regular de modo que os vértices do cone e da pirâmide coincidem e a base do cone está inscrita na base da pirâmide. Qual o volume da pirâmide?

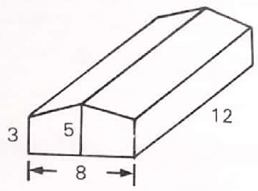
201. Uma laranja pode ser considerada uma esfera de raio R, composta de 12 gomos exatamente "iguais". A área da superfície total de cada gomo é dada por:
a) $4\pi R^2$;
b) $3\pi R^2$;
c) $2\pi R^2$;
d) $4\pi R^2/3$;
e) $3\pi R^2/4$

202. (FUVEST-SP) Qual a altura de uma pirâmide quadrangular que tem as oito arestas iguais a $\sqrt{2}$?
a) 1; b) $\sqrt{1,5}$; c) $\sqrt{2}$; d) $\sqrt{2,5}$; e) $\sqrt{3}$.

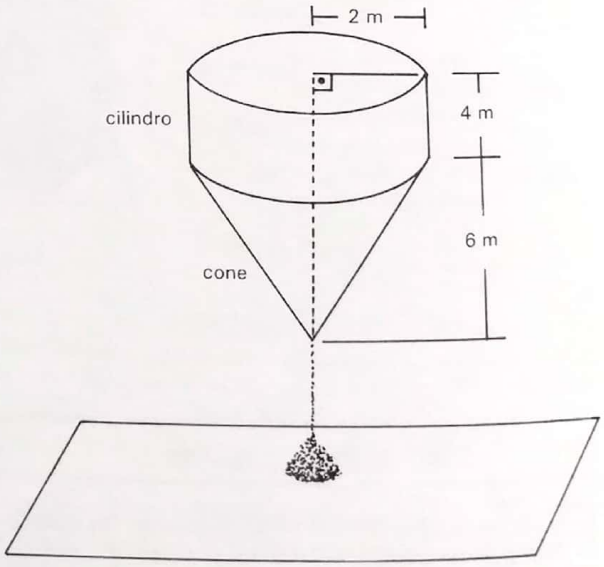
203. Sendo α o ângulo que a aresta lateral de um tetraedro regular forma com o plano da base, determine tgα.

204. O volume do cubo inscrito num cilindro circular reto é de aproximadamente:
a) 55% do volume do cilindro;
b) 60% do volume do cilindro;
c) 63% do volume do cilindro;
d) 70% do volume do cilindro;
e) 73% do volume do cilindro;

205. (VUNESP) O volume de ar contido em um galpão com a forma e dimensões dadas pela figura seguinte é:
a) 288;
b) 384;
c) 480;
d) 360;
e) 768.



206. (UNESP) A fim de que não haja desperdício de ração e seus animais estejam sempre bem nutridos, um fazendeiro construiu um recipiente com uma pequena abertura na parte inferior, que permite a reposição automática da alimentação, conforme mostra a figura seguinte. A capacidade total de armazenagem do recipiente, em metros cúbicos, é:



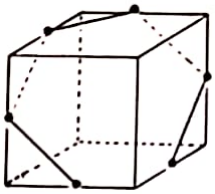
a) $8\pi + \frac{40\pi}{3}$;
b) 24π;
c) 28π;
d) 48π;
e) impossível de ser determinada, pois faltam informações.

207. Ligando-se convenientemente os pontos médios das arestas de um cubo, obtém-se um hexágono regular confor-

Scanned by CamScanner

me a figura seguinte. A razão entre a área desse hexágono e a área da superfície total desse cubo é:

a) $\sqrt{2}/4$;
b) $\sqrt{2}/2$;
c) $\sqrt{3}/8$;
d) $\sqrt{3}/6$;
e) $\sqrt{3}/4$;



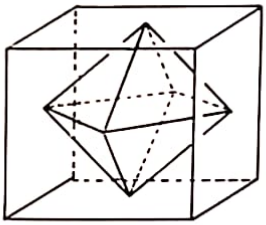
208. Um fabricante de molhos enlata seus produtos em embalagem cilíndrica circular reta e posteriormente encaixota uma a uma em embalagem cúbica de 10 centímetros de aresta. Se as faces da caixa cúbica tangenciam a embalagem cilíndrica, então o comprador que adquire este molho pela aparência externa da caixa está sendo lesado em aproximadamente:

a) 15,5%;
b) 21,5%;
c) 32%;
d) 41,3%;
e) 38%.

209. Um peixe ao ser colocado dentro de um aquário, com forma de paralelepípedo retangular com 60 cm de comprimento por 40 cm de largura, faz o nível da água subir exatamente 0,5 mm. O volume desse peixe, em cm^3, é:

a) 12;
b) 24;
c) 64,5;
d) 120;
e) 240.

210. (VUNESP) Os centros das faces de um cubo são os vértices de um octaedro regular:



Calcule as razões entre:
a) a área do cubo e a do octaedro nele inscrito;
b) o volume do cubo e do octaedro nele inscrito.

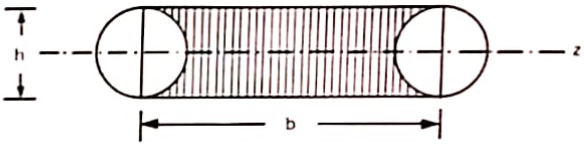
211. (UNICAMP) Numa esfera de raio unitário está inscrito um cubo; neste cubo está inscrito uma esfera, na qual está inscrito um cubo, e assim por diante. Mostre que os raios das esferas, na ordem em que aparecem, estão em progressão geométrica. Determine a razão da progressão e calcule sua soma.

212. (FUVEST-SP) É dado um tetraedro regular ABCD de aresta 1. Na aresta BC, toma-se um ponto P de modo que PA + PD tenha o menor valor possível.
a) Qual o valor da razão PB/CB?
b) Calcule PA + PD.

213. (ITA-SP) Qual o volume de um cone circular reto, se a área de sua superfície lateral é de 24π cm^2 e o raio de sua base mede 4 cm?

a) $\frac{16\pi}{3}\sqrt{20}$ cm^3;
b) $\frac{\sqrt{24}}{4}\pi$ cm^3;
c) $\frac{\sqrt{24}}{3}\pi$ cm^3;
d) $\frac{8}{3}\sqrt{24}\pi$ cm^3;
e) $\frac{1}{3}\sqrt{20}\pi$ cm^3.

214. (ITA-SP) Considere um retângulo de altura h e base b e duas circunferências com diâmetro h e centros nos lados do retângulo, conforme a figura abaixo. Seja z um eixo que passa pelo centro destas circunferências. Calcule a superfície total do sólido gerado pela rotação da área hachurada da figura em torno do eixo z.



a) $\pi h\,(b - h)$;
b) $\pi h\,(b + h)$;
c) $\pi b\,(b - h)$;
d) $\pi b\,(b + h)$;
e) n.d.a.

215. (FUVEST-SP) O segmento PA é perpendicular ao plano que contém o triângulo eqüilátero ABC. Suponha que AB = 2.AP e que M seja o ponto médio do segmento BC. Determine o ângulo formado pelos segmentos PA e PM.

216. (FUVEST-SP) Um tanque em forma de paralelepípedo tem por base um retângulo horizontal de lados 0,8 m e 1,2 m. Um indivíduo, ao mergulhar completamente no tanque, faz o nível da água subir 0,075 m. Então o volume do indivíduo, em m^3, é:

a) 0,066;
b) 0,072;
c) 0,096;
d) 0,600;
e) 1,000.

217. Numa câmara de ar suficientemente cheia para ser utilizada como "bóia" está impressa uma figura de área S. Se insuflarmos mais ar para dentro da "bóia", tal que seu volume fique duplicado, então a figura passará a ter área igual a:

a) 2S;
b) $S\sqrt{2}$;
c) $S\sqrt{3}$;
d) $S \cdot \sqrt{2}$;
e) $S \cdot \sqrt[3]{4}$

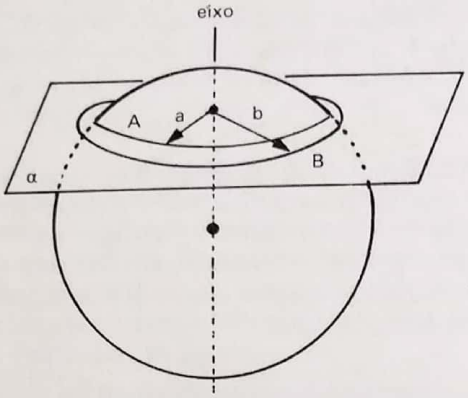
218. (UNICAMP) Como deve ser alterado o raio de uma cesta de basquete se o volume da bola for alterado por um fator multiplicativo α? Não leve em conta a folga existente entre a cesta e a bola.

219. (UNESP) Considere que o globo terrestre é uma esfera. Seja α um plano perpendicular ao eixo da Terra e que a intercepta determinando um círculo A de perímetro p e

Scanned by CamScanner

raio a, em metros.

Considere um outro círculo B de perímetro p + 1 e raio b, em metros, coplanar e concêntrico a A. Nestas condições, o valor de (b − a):



a) tende a aumentar ao se considerar α cada vez mais próximo dos pólos;
b) assume seu menor valor quando p for máximo;
c) é constante, qualquer que seja a escolha de α;
d) é sempre menor que 15 cm;
e) não pode ser obtido, pois faltam dados no problema.

220. Num cubo de aresta 6 cm, PA, PB e PC são três arestas. O volume do sólido (tetraedro) cujos vértices são os pontos P, A, B e C é:

a) 36 cm³
b) 72 cm³
c) 108 cm³
d) $36\sqrt{2}$ cm³
e) $48\sqrt{2}$ cm³

221. Com a fusão de todo o material contido em 18 moedas, formou-se uma esfera. Sabendo que a altura de cada moeda é 3 mm e o diâmetro da base é 24 mm, o raio da esfera será:

a) 18 mm
b) 24 mm
c) 28 mm
d) 36 mm
e) 42 mm

222. Um cone de 20 cm de altura é seccionado por um plano paralelo à sua base. Se a área da secção é igual a 1/4 da área da base, então a distância do vértice do cone ao plano de secção será:

a) 5 cm b) 7,5 cm c) 10 cm d) 12 cm e) 15 cm

★ RESPOSTAS ★

1. c; **2**. a; **3**. {1; 2}; **4**. {−1}; **5**. a; **6**. d; **7**. d; **8**. b; **9**. b; **10**. e; **11**. d; **12**. c; **13**. c; **14**. d; **15**. b; **16**. a; **17**. e; **18**. a; **19**. c; **20**. e; **21**. a; **22**. a; **23**. c; **24**. e; **25**. a; **26**. S = {(9; 3)}; **27**. c; **28**. S = {3; $\log_2 5 - 3$}; **29**. e; **30**. 60; **31**. c; **32**. b; **33**. b; **34**. a; **35**. d; **36**. d; **37**. c; **38**. d; **39**. b; **40**. c; **41**. a) 9; 11, b) 16; 32, c) 14; 17, d) 25; 36, e) $\frac{162}{80}$; $\frac{486}{160}$; **42**. a) (2; 4; 8; 16; 32), b) (4; 6; 8; 10; 12), c) (3; −2; −7; −12; −17), d) (10; 20; 60; 240; 1 200); **43**. a) (1; 2; 3; 4; ...), b) (1; 4; 9; 16; ...), c) (3; 5; 7; 9; ...), d) (2; −1; −4; −7; ...), e) (4; 9; 16; 25; ...); **44**. a) 22, b) 52, c) 64, d) −1/32; **45**. −5; **46**. 42; **47**. 5; **48**. 4; **49**. 2; **50**. ±5; **51**. a) 40, b) 1 520, c) 10 000, d) 0, e) 5, f) 511, g) 683/256; **52**. 51, 37; **53**. 11; 6; **54**. c; **55**. −6; **56**. a; **57**. c; **58**. d; **59**. e; **60**. d; **61**. d; **62**. e; **63**. (1; 2; 4; 8); **64**. $5 \cdot 2^{11} \cdot \sqrt{2}$ ratos/hab.; **65**. b; **66**. c; **67**. e; **68**. d; **69**. b; **70**. d; **71**. e; **72**. b; **73**. $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$; **74**. b; **75**. b; **76**. d; **77**. c; **78**. a; **79**. a; **80**. d; **81**. 5; **82**. 5 termos em P.A.: x − 2r; x − r; x; x + r; x + 2r. A soma dos ângulos internos do pentágono: 540°; logo, resp.: 108°; **83**. Cz$ 1 023 000,00; **84**. c; **85**. c; **86**. d; **87**. a; **88**. a; **89**. a; **90**. a) i, b) −1, c) 1, d) −i, e) −i, f) 1 − i; **91**. a) 8 + 4i, b) 2 − 2i, c) −16 − 5i, d) 36 − 2i, e) 5 + 12i, f) 24 − 10i, g) −2 + 2i, h) (6 − 3i)/5, i) (1 + 7i)/10, j) (−3 + 4i)/25, k) −i, l) (−1 − i)/2, m) 4 − 4i, n) (5 − i)/2, o) (29 + 7i)/10; **92**. a) a = 9; b = 1, b) $a = \frac{300}{13}$; $b = \frac{200}{13}$, c) $\cancel{a}$ a, d) $\pm\sqrt{6}/2$, e) ±1 f) a = 0, g) a = 4, h) a = ±1, i) a = 2; b = 0; **93**. a) 2i, b) −2i, c) i, d) −i, e) −1 024, f) $2^{12} \cdot (1 - i)$, g) 0, h) 2i; **94**. a) $\sqrt{2} \cdot (\cos 45° + i \cdot \text{sen } 45°)$, b) $2 \cdot (\cos 90° + i \cdot \text{sen } 90°)$, c) $4 \cdot (\cos 180° + i \cdot \text{sen } 180°)$, d) $2 \cdot (\cos 120° + i \cdot \text{sen } 120°)$, e) $2 \cdot (\cos 330° + i \cdot \text{sen } 330°)$, f) $2\sqrt{2} \cdot (\cos 225° + i \cdot \text{sen } 225°)$, g) $4 \cdot (\cos 270° + i \cdot \text{sen } 270°)$, h) $2 \cdot (\cos 210° + i \cdot \text{sen } 210°)$, i) $8 \cdot (\cos 0° + i \cdot \text{sen } 0°)$, j) $\sqrt{2} \cdot (\cos 315° + i \cdot \text{sen } 315°)$; **95**. $\sqrt{10}/2$; **96**. 1/2; **97**. $(1 - \sqrt{3} \cdot i)/8$; **98**. 5 + 14i; **99**. 12/5; **100**. $(-1 + \sqrt{3}i)/2$; **101**. 2; **102**. 4 + 3i; **103**. (−2 − 4i)/5; **104**. (3i − 1)/10; **105**. 6i/5; **106**. (6 + i)/5; **107**. a; **108**. c; **109**. d; **110**. c; **111**. e; **112**. 26 + 7i; **113**. −5; **114**. c; **115**. $\frac{x - y \cdot \sqrt{3}}{2}$; **116**. −i; **117**. c; **118**. b; **119**. 0; i; −i; **120**. $2\sqrt{5}/5$; **121**. b; **122**. e; **123**. a; **124**. a; **125**. c; **126**. a; faça z = a + bi, com $(a + bi)^2 = 3 + 4i$; **127**. a; **128**. $(1 \pm \sqrt{3}i)/2$; **129**. a; **130**. d; **131**. m = 1; n = 2; p = −3; **132**. c; **133**. d; **134**. a; **135**. c; **136**. c; **137**. a = 1 e b = 2 (ache o m.m.c. no primeiro membro, reduza os termos semelhantes e aplique o princípio da identidade de polinômios); **138**. c; **139**. $2x^2 + x + 3$; **140**. a) q = 2x + 6; r = Ax + 3B − 54, b) A = 0 e B = 18; **141**. e; **142**. d; **143**. I-F; II-F; III-F; **144**. a; **145**. c; **146**. a; **147**. a; **148**. 6; **149**. 1/3; **150**. b; **151**. e; **152**. −66; **153**. $-x^2 + 3x + 1$; **154**. a; **155**. d; **156**. p = 23 e q = −14; **157**. b; **158**. a) $Q(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$; r = 6 b) $Q(x) = 3x^3 - 6x^2 + 12x - 31$; r = 62; **159**. b; **160**. m = 13 e n = −13 (imponha que a divisão de P(x) por x − 1 seja exata, efetue essa divisão por Briot-Ruffini e imponha que o quociente obtido seja novamente divisível por x − 1); **161**. 3; 2/3; 1/3; **162**. e; **163**. d; **164**. c; **165**. c; **166**. c; **167**. c; **168**. $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 2 (use a fatoração por agrupamento no 1º membro); **169**. c; **170**. b; **171**. 0; **172**. b; **173**. c; **174**. −24; **175**. e; **176**. 10; **177**. b; **178**. 288π cm³; 144π cm²; **179**. 36π cm³; **180**. 144π cm²; **181**. 4 cm; **182**. 250π cm³; 150π cm²; **183**. 128π cm³; **184**. 16; **185**. 2/3; 2/3; **186**. $72\pi\sqrt{3}$ cm³; 108π cm²; **187**. 6 cm; **188**. 3; **189**. 81π cm³; **190**. $48\sqrt{3}$ cm³; $48 \cdot (\sqrt{3} + 1)$ cm²; **191**. $54\sqrt{3}$ cm³; **192**. 40π cm³; **193**. 8; 28; **194**. 1728 cm³; **195**. $\sqrt{21}$ cm; **196**. 384 cm²; **197**. $4\pi\sqrt{3}$ cm³; **198**. 200 cm³; **199**. $16\sqrt{2}/3$ cm³; $16\sqrt{3}$ cm²; **200**. $48\sqrt{3}$ cm³; **201**. d; **202**. a; **203**. $\sqrt{2}$ (pense no triângulo formado pela aresta, pela altura do tetraedro e pelo segmento que une o pé da altura ao pé da aresta); **204**. c; **205**. b; **206**. b; **207**. c; **208**. b; **209**. d; **210**. $2\sqrt{3}$; 6; **211**. $\sqrt{3}/3$; $(3 + \sqrt{3})/2$; **212**. 1/2; $\sqrt{3}$ (P deve ser o ponto médio da aresta); **213**. a; **214**. b; **215**. 60°; **216**. b; **217**. e; **218**. deve ser multiplicado por $\sqrt[3]{\alpha}$; **219**. c; **220**. a; **221**. a; **222**. c.

Scanned by CamScanner

RESUMOS E EXERCÍCIOS

Correspondem a Matemática — páginas 145 a 192

ÁLGEBRA
Matrizes

Matriz $m \times n$, é uma tabela de números reais dispostos em m linhas e n colunas.

Representação:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O primeiro número do índice indica a linha e o segundo número indica a coluna onde se situa o elemento na matriz. Assim a_{23}, por exemplo, indica que o elemento está na 2ª linha e 3ª coluna. Podemos também indicar:
$A = (a_{ij})_{m \times n}$ para uma matriz do tipo $m \times n$.

Casos particulares

Matriz quadrada: $m = n$
Matriz linha: $m = 1$
Matriz coluna: $n = 1$
Matriz nula: Todos os elementos são nulos.

Igualdade de matrizes

Sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, então: $A = B$, se e somente se $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i e todo j.

Adição de matrizes

Sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$ então: $C = A + B$, se e somente se $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i e todo j.

Propriedades
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativa)
- $A + B = B + A$ (comutativa)
- $A + 0 = 0 + A = A$ (elemento neutro)
- $A + (-A) = 0$ (elemento oposto)

$-A$, é a matriz oposta da matriz A e 0 é a matriz nula.

Multiplicação de um número real por uma matriz

Multiplicamos todos os elementos da matriz pelo número real.

Multiplicação de matrizes

Sendo $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$ a matriz produto $C = A \cdot B$, será $C = (c_{ij})_{m \times n}$ onde: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$

OBSERVAÇÃO
- O número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B.
- A matriz produto C, terá o mesmo número de linhas da matriz A e o mesmo número de colunas da matriz B.

Sugestão Acompanhe a multiplicação de matrizes pelos exemplos numéricos e exercícios resolvidos.

Propriedades
- $(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$ (associativa)
- $\begin{cases} (A + B) \cdot C = AC + BC \text{ (distributiva à direita)} \\ A \cdot (B + C) = AB + AC \text{ (distributiva à esquerda)} \end{cases}$

Transposta de uma matriz

Sendo A uma matriz do tipo $m \times n$, a transposta de A, que se indica por A', é a matriz do tipo $n \times m$ que se obtém trocando as linhas por colunas na matriz A. Isto é, a 1ª linha de A' é igual à 1ª coluna de A, a 2ª linha de A' é igual à 2ª coluna de A e assim sucessivamente.

Propriedades
- $(A')' = A$
- $(A + B)' = A' + B'$
- $(\alpha \cdot A)' = \alpha \cdot A'$
- $(AB)' = B' \cdot A'$

Matriz identidade

$I_n = (a_{ij})_{n \times n}$ onde $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

Propriedade
- $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Inversão de matrizes

A matriz inversa da matriz quadrada A, se existir, será indicada por A^{-1} e será tal que: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

Propriedades
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A')^{-1} = (A^{-1})'$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

DETERMINANTES

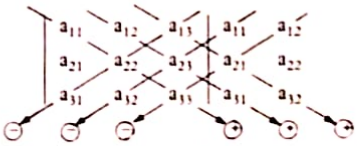
A toda matriz quadrada A, podemos associar um número denominado determinante de A. Indicamos por det A ou pelos elementos da matriz entre duas barras. Exemplo:

matriz A: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Determinante de matriz de ordem 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinante de matriz de ordem 3



Repetimos as duas primeiras colunas ao lado do determinante e a seguir fazemos as operações como indica o esquema. Esta é a regra de Sarrus, só válida para determinantes de ordem 3.

Menor complementar

Se a_{ij} é um elemento da matriz A de ordem $n (n \geq 2)$, então o menor complementar do elemento a_{ij} é o determinante que se obtém retirando-se a linha i e a coluna j da matriz A. Indicamos o menor complementar do elemento a_{ij} por M_{ij}.

Complemento algébrico ou cofator

Indicaremos por A_{ij} e ele será dado por:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$$

Scanned by CamScanner

■ Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada de ordem $n (n \geqslant 2)$, é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.

Propriedades dos determinantes

- $\boxed{\det A^t = \det A}$
- Trocando-se a posição de duas filas paralelas de uma matriz, seu determinante não se altera em módulo, apenas trocando de sinal.
- Se duas filas paralelas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.
- Multiplicando-se (ou dividindo-se) uma fila qualquer de uma matriz por um número, seu determinante fica multiplicado (ou dividido) por esse número.
- Sendo A, uma matriz quadrada de ordem n, e α um número real, então:

$$\boxed{\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det A}$$

- Se duas filas paralelas de uma matriz são proporcionais, então seu determinante é nulo.
- Se uma fila de uma matriz é formada por somas de duas parcelas, então seu determinante é igual à soma de outros dois determinantes: o primeiro formado com as primeiras parcelas e o segundo formado com as segundas parcelas, permanecendo inalteradas as demais filas.
- Teorema de Jacobi: um determinante não se altera quando se soma a uma de suas filas uma outra fila paralela previamente multiplicada por uma constante.

■ Determinante do produto de matrizes

Sendo A e B matrizes quadradas de mesma ordem então: $\boxed{\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)}$

■ Determinante de inversa de uma matriz

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}} \quad (\det A \neq 0)$$

A, matriz quadrada de ordem n.

OBSERVAÇÃO Uma matriz A é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Sistemas de equações lineares

■ Sistema linear de *m* equações a *n* incógnitas

Todo sistema do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

■ Regra de Cramer

Um sistema linear de n equações a n incógnitas pode ser resolvido pela regra de Cramer.

$$\boxed{x_1 = \frac{D_{x1}}{D},\ x_2 = \frac{D_{x2}}{D},\ \ldots,\ x_n = \frac{D_{xn}}{D}\ (D \neq 0)}$$

Classificação

- Se $D \neq 0$, sistema possível e determinado (uma única solução).
- Se $D = D_{x1} = D_{x2} = \ldots = D_{xn} = 0$, sistema possível e indeterminado (infinitas soluções).
- Se $D = 0$ e ($D_{x1} \neq 0$ ou $D_{x2} \neq 0$ ou ... $D_{xn} \neq 0$) o sistema é impossível.

■ Sistemas lineares homogêneos

É o sistema linear que possui os termos independentes de todas as suas equações iguais a zero.

Para um sistema linear homogêneo teremos:

- Se $D \neq 0$, o sistema admitirá uma única solução que será (0; 0; 0; ...; 0), chamada solução trivial.
- Se $D = 0$, o sistema será possível e indeterminado admitindo infinitas soluções.

★ EXERCÍCIOS ★

1. (PUC-SP) A matriz A de ordem 2×3, definida por $a_{ij} = i \cdot j$ é dada por:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 12 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. (UNESP-SP) Seja $A = (a_{ij})$ a matriz real quadrada de ordem 2, definida por:

$$a_{ij} \begin{cases} 2^{i+j}, \text{ para } i < j \\ i^2 + 1, \text{ para } i \geqslant j \end{cases}$$

Então:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ e) n.d.a.

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

3. (UF-BA) Sendo $\begin{bmatrix} 5x & 8 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-y & 8 \\ 10 & 6x-y \end{bmatrix}$, então x e y são respectivamente:

a) 0 e -1 b) 1 e 5 c) 2 e 0
d) 2 e 11 e) 3 e -5

4. (UFB) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1/16 & a^2 \\ -27 & \log_2 1/16 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2^b & 9 \\ a^3 & c \end{bmatrix}$. Determine a, b e c para que A = B.

5. (PUC-SP) Se $a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, então os valores de a, b e c são respectivamente:

a) 1, 1, 1 c) 2, 2, 2 e) 5, 5, 5
b) 0, 0, 0 d) 4, 4, 4

6. (FUVEST-SP) Considere as matrizes:
1) $A = (a_{ij})$, 4×7, definida por $a_{ij} = i - j$;
2) $B = (b_{ij})$, 7×9, definida por $b_{ij} = i$;
3) $C = (c_{ij})$, $C = AB$.

O elemento c_{63}:

a) é -112 b) é -18 c) é -9 d) é 112 e) não existe

7. (PUC-SP) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, então $A^2 + 2A - 11 \cdot I_2$, onde $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, é igual a:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. (FAAP-SP) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}$, calcular *a* e *b*, se $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$.

9. (PUC-SP) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, uma matriz coluna

Scanned by CamScanner

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tal que $AX = 3X$ é:

a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

10. (CESESP-PE) São dadas as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, onde $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$ tais que $a_{ij} = i + j$ e $b_{ij} = 2i - j + 1$. Determine o elemento c_{22} da matriz $(c_{ij}) = C = AB$.

11. (F.C. CHAGAS-SP) A matriz transposta da matriz $A = (a_{ij})$ de tipo 3×2, onde $a_{ij} = 2i - 3j$, é igual a:

a) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

12. (UF-BA) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Efetuando-se $A^t - \frac{1}{3} \cdot A$, obtém-se $\begin{bmatrix} 2x+y & 5x+y & 8/3 \\ 16/3 & 8/3 & 1 \\ 0 & -3 & 4/3 \end{bmatrix}$.

Calcule o valor absoluto de $\frac{y}{x}$.

13. (UF-BA) Sendo $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$, é verdade que:

a) $M\times P = P$ b) $N\times P = P$ c) $M\times M = N$
d) $M+P = P$ e) $M+N = N$

14. (FAAP-SP) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, achar a matriz B, tal que $AB = I$, sendo $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

15. (SANTA CASA-SP) Sabendo-se que a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ x^2 & 0 & 1-y \\ x & y-3 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, determinar x e y.

16. (CESGRANRIO-RJ) A inversa da matriz $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é

a) $\begin{bmatrix} 1/4 & 1/3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -1/4 & 1/3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) inexistente

17. (FAAP-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, calcular $AB+A^{-1}$.

18. (FEI-SP) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, determinar $X = (AB^{-1})^t$.

19. (FEI-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

a) Determinar M^{-1}
b) Sabendo-se que o traço de uma matriz é a soma dos elementos da diagonal principal, determinar o traço da matriz $M^{-1} \cdot A \cdot M$.

20. (FUVEST-SP) O número de raízes da equação

$\begin{vmatrix} 0 & 3^x & 1 \\ 0 & 3^x & 2 \\ 4 & 3^x & 3 \end{vmatrix} = 0$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

21. (FGV-SP) A solução da equação

$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ (x real) é:

a) não tem solução real c) $x = \pm 1$ e) $x = -1$
b) $x = \sqrt{3}$ d) $x = 1$

22. (F.C.CHAGAS-SP) O determinante da matriz $A = (a_{ij})$, de ordem 3, onde

$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ 3i\text{-}j, \text{ se } i = j \end{cases}$ é igual a:

a) 0 b) 12 c) 24 d) 36 e) 48

23. (FUVEST-SP) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, onde $2a = e^x + e^{-x}$ e $2b = e^x - e^{-x}$, é igual a:

a) 1 b) -1 c) e^x d) e^{-x} e) zero

24. (F.C.CHAGAS-SP) O valor de x na equação:

$\begin{vmatrix} 3 & y & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & x \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$ é:

a) $4y - 1$ b) $-4y + 1$ c) $4y - 8$ d) $17/2$ e) -2

25. (FUVEST-SP) O produto da matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ x & y \end{bmatrix}$ pela sua transposta é a identidade. Determine x e y sabendo que $\det A > 0$.

26. (PUC-SP) Sendo dadas as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} -1 \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$ e $B = [x \;\; 1 \;\; 5]$, então a equação $\det (A \cdot B)^t = 0$ tem por conjunto solução:

a) $\{0; 1\}$ c) $\{0\}$ e) n.d.a.
b) o conjunto dos números reais d) $\{-1; 1\}$

27. (UDF) Calcule os números x e y tais que:

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & x & 4 \\ 1 & 1 & y \end{vmatrix} = -1$ e $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$

28. (MACK-SP) Determine em $\mathbb{R}$ a solução da equação:

$\begin{vmatrix} 2 & x & x \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - \log_2 4$

29. (UF-BA) O valor de $\begin{vmatrix} (\sqrt{2})^{-1} & 2^{1/2} \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ é:

a) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{10}}{10} - \sqrt{6}$ e) $\frac{5+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

b) $\frac{5\sqrt{2}}{2} - \sqrt{6}$ d) $2\sqrt{2}$

Scanned by CamScanner

30. (UE-CE) Se P^{-1} é a inversa da matriz $P = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, então o valor do determinante da matriz $P + P^{-1}$ é:

a) 15 b) 20 c) 25 d) 30 e) n.d.a.

31. (UF-BA) O determinante associado à matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ é:

a) múltiplo de 7
b) divisor de 7
c) potência de 7
d) número ímpar
e) número primo

32. (UF-PR) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e sendo $N = 50 + \det(A \cdot B)$, encontre o valor de N.

33. (UDF) Seja M a matriz quadrada de 3ª ordem em que $a_{ij} = i + j$. Determinar o cofator do elemento a_{32}.

34. (FGV-SP) Seja $u = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$

Os valores de x reais para os quais $u^2 - 2u + 1 = 0$, são:

a) $x = -1$ ou $x = -2$
b) $x = \pm 1$
c) $x = 1$ ou $x = 2$
d) $x = 1$

35. (FUVEST-SP) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$

a) 2 b) 1 c) 0 d) -1 e) -2

36. (UF-BA) Se $x = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 4 \\ 10 & 1 & 5 \\ 0 & 20 & 1 \end{vmatrix}$ e $y = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 4 \\ 0 & 20 & 1 \\ 10 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, então:

a) $x = y = 0$ b) $x = 2y$ c) $2x = y$ d) $x + y = 0$

37. (SANTA CASA-SP) Considere uma matriz de ordem 3, tal que $\det A = 6$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

Então, sendo $C = A \cdot B$, podemos afirmar que det C vale:

a) -12 b) 12 c) -24 d) 24 e) n.d.a.

38. (FUVEST-SP) Determine o valor de θ para que a matriz $\begin{vmatrix} \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 & 1 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ \text{sen}\,\theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, seja inversível.

39. (UB-DF) O determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & 9 & 1 & 16 \\ -8 & 27 & -1 & 64 \end{vmatrix}$ é de Vandermonde e o seu valor é:

a) -300 b) -400 c) -500 d) -600

40. (FGV-SP) O valor do determinante (onde log representa o logarítmo na base 10)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 & \log 2000 \\ (\log 2)^2 & (\log 20)^2 & (\log 200)^2 & (\log 2000)^2 \\ (\log 2)^3 & (\log 20)^3 & (\log 200)^3 & (\log 2000)^3 \end{vmatrix}$$

é igual a:

a) 2 b) 12 c) 20 d) 0 e) 1

41. (FUVEST-SP) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4y + 5z = 23 \\ 6z = 18 \end{cases}$

Então x é igual a:

a) 27 b) 3 c) 0 d) -2 e) 1

42. (FUVEST-SP) Determine a e b de modo que sejam equivalentes os sistemas:

$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases}$

43. (F.C.CHAGAS-SP) Se os sistemas

S: $\begin{cases} 2x + ky = 4 \\ tx - y = 1 \end{cases}$ e S': $\begin{cases} x + y = -1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

são equivalentes, então:

a) $k = 2t$
b) $t = 2k$
c) $k + t = 0$
d) $k - t = 0$
e) $2k + 3t = 0$

44. (UNESP-SP) Sejam x, y e z números reais tais que:

$\begin{cases} x + y = 6 \\ y + z = 3 \\ x + z = 1 \end{cases}$

Então $xy - z$ é:

a) -8 b) 7 c) 9 d) 1/9 e) 1/8

45. (FGV-SP) No sistema de equações

$\begin{cases} kx + 3y + z = 2 \\ x - y - kz = 1 \\ 2x - 2y + kz = 2 \end{cases}$

os valores de *k* que o tornam indeterminado são:

a) 0 e 1 b) 2 e 3 c) 0 e -3 d) -1 e 1 e) -1 e 2

46. (FEI-SP) Para que valor de *m* o sistema de equações lineares

$\begin{cases} mx + z = 1 \\ -x + my - 2z = 0 \\ -y + z = 3 \end{cases}$, é impossível?

47. (FUVEST-SP) Para quais valores de *a* o sistema linear

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = a \\ -y - 2z = a^2 \end{cases}$

admite solução?

48. (FUVEST-SP) Discuta:

$\begin{cases} x - 3y = -m \\ 2x + 3my = 4 \end{cases}$

49. (FUVEST-SP) O sistema linear

$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ ax + by = c \end{cases}$, tem solução se e somente se:

a) $a \neq c$
b) $b = c$
c) $a = c$
d) $b = 1$ e $a - c = 1$

Scanned by CamScanner

50. (CESGRANRIO-RJ) Sobre o sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 3y = 5 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$ pode-se afirmar que:

a) não tem solução
b) $x = 1$ e $y = 1$ é solução
c) $x = 5$ e $y = -5/3$ é solução
d) $x = 0$ e $y = 0$ é solução
e) tem uma infinidade de soluções

51. (FUVEST-SP) O sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + mz = 0 \end{cases}$$ é indeterminado para:

a) todo m real
b) nenhum m real
c) $m = 1$
d) $m = -1$
e) $m = 0$

52. (CESGRANRIO-RJ) O valor de λ para que o sistema:

$$\begin{cases} x + y - \lambda z = 0 \\ x + \lambda y - z = 0 \\ x + (1+\lambda)y + z = 0 \end{cases}$$

admita soluções (x; y; z) distintas de (0; 0; 0) é:

a) 2
b) 1
c) -1
d) 0
e) -2

53. (PUC-SP) Para que o sistema

$$\begin{cases} x + \alpha y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x + \alpha z = 0 \end{cases}$$

admita solução distinta diferente da trivial $x = y = z = 0$:

a) $\alpha = 2$ ou $\alpha = -3$
b) tal fato nunca ocorre
c) α deve ser igual a zero
d) α deve ser igual a -1
e) n.d.a.

54. (FUVEST-SP) A equação matricial

$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, admite mais de uma solução se e somente se λ for igual a:

a) 0
b) $\pm\sqrt{3}$
c) ± 3
d) $\pm\sqrt{6}$
e) $\pm\sqrt{11}$

55. (CESGRANRIO-RJ) Sejam λ_1 e λ_2 os valores distintos de λ para que a equação $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ admita a solução $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então, $\lambda_1 + \lambda_2$ é:

a) -5
b) 4
c) 10
d) -6
e) 0

Análise combinatória

■ Fatorial

Sendo $n \in \mathbb{N}$, define-se n fatorial ou fatorial de n (indicamos n!) como sendo:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$1! = 1$$
$$0! = 1$$

Decorre da definição que: $n! = n \cdot (n-1)!$

■ Princípio multiplicativo

Se um evento A pode ocorrer de m maneiras distintas e a seguir, um evento B pode ocorrer de n maneiras distintas, então o número de possibilidades de ocorrer A seguido de B é m multiplicado por n. O princípio multiplicativo pode ser generalizado para mais de dois eventos.

■ Arranjos simples

São agrupamentos onde a ordem com que os elementos participam é considerada e não existe repetição de elementos.

O total do número de arranjos simples é dado por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

n = número de elementos que temos para utilizar.
p = maneira segundo a qual esses elementos serão agrupados.
$A_{n,p}$ lê-se: arranjo de n elementos tomados p a p.

■ Permutações simples

São arranjos simples onde n = p. O número total de permutacões simples é dado por:

$$P_n = n!$$

■ Permutações com repetição

O número total de permutações de n elementos onde exitem: r_1 elementos repetidos de um mesmo tipo, r_2 elementos repetidos de um outro tipo e assim sucessivamente é dado por:

$$P_n = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \ldots r_K!}$$

onde $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$.

■ Combinações simples

São agrupamentos onde não importa a ordem de participação dos elementos. O número total de combinações simples é dado por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

$C_{n,p}$ lê-se: combinação de n elementos tomados p a p.

Binômio de Newton

Número binomial

Sendo $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant p$, temos:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

■ Binomiais complementares

$\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{k}$ são **binomiais complementares** se, e somente se, $p + k = n$

■ Igualdade de binomiais

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{k} \Leftrightarrow p = k \text{ ou } p + k = n$$

Scanned by CamScanner

Triângulo de Pascal

$\binom{0}{0}$

$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$

$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$

$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$

$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$

$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$

$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
.....

Propriedades

- A soma dos binomiais de uma linha é igual a 2^n, onde **n** é o "numerador" dos binomiais.
- Relação de Stifel: a soma de dois binomiais "vizinhos" de uma mesma linha é igual ao binomial situado imediatamente abaixo do segundo número somado:

$$\binom{\ }{\ }\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}\binom{\ }{\ }$$
$$\downarrow$$
$$\binom{\ }{\ }\binom{\ }{\ }\ \binom{n+1}{p+1}\binom{\ }{\ }$$

$$\boxed{\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}}$$ (relação de Stifel)

Binômio de Newton

São expressões do tipo: $(x + a)^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Propriedades

- Os coeficientes de cada termo são os binomiais da linha de "numerador" n do triângulo de Pascal.
- Os expoentes do x (1ª parcela) vão decrescendo de um em um, desde n até zero.
- Os expoentes do a (2ª parcela) vão crescendo de um em um, desde zero até n.
- O desenvolvimento de $(x + a)^n$ é formado de $n + 1$ termos.

■ Termo geral

$$\boxed{T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^p}$$

onde T_{p+1} representa o termo de ordem $p + 1$ do desenvolvimento de $(x + a)^n$.

$$\boxed{(x + a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot a^1 + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot a^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^n}$$

★ EXERCÍCIOS ★

56. (PUC-SP) Se $(n - 6)! = 720$, então:
a) $n = 12$ b) $n = 11$ c) $n = 10$ d) $n = 13$ e) $n = 14$

57. (CESCEA-SP) Se m é um número inteiro não negativo, o valor da expressão $[(m + 2)! - (m + 1)!]m!$ é:
a) $m!$ b) $(m!)^2$ c) 1 d) $(m + 1)!$ e) $[(m + 1)!]^2$

58. (PUC-SP) Simplificando-se $\dfrac{(n - r + 1)!}{(n - r - 1)!}$ obtém-se:
a) $(n - r)(n - r + 1)$
b) $(n - r)(n - 1)$
c) $(n - r)(n + r - 1)$
d) $(n - r)(n - r)$
e) $(n + r)(n - r + 1)$

59. (UF-VIÇOSA) A expressão $\dfrac{(n + 2)! + (n + 1)(n - 1)!}{(n + 1)(n - 1)!}$ é igual a:
a) $n^2 + 2n$
b) $n^2 + 2n + 1$
c) $(n + 2)! + 1$
d) $(n + 2)n! + 1$
e) $n^3 + 2n^3 + 2n$

60. (CESGRANRIO-RJ) Se $a_n = \dfrac{n!(n^2 - 1)}{(n + 1)!}$, então a_{1984} é igual a:
a) $\dfrac{1}{1985}$
b) 1984
c) 1983
d) $\dfrac{1985}{1984^2 - 1}$
e) $\dfrac{1984^2 - 1}{1984}$

61. (UC-PR) A soma das raízes da equação $(5x - 7)! = 1$ vale:
a) 5 b) 7 c) 12 d) 3 e) 4

62. (CESCEA-SP) Se $\dfrac{A_{n-1,\,3}}{A_{n,3}} = \dfrac{3}{4}$ então, n é igual a:
a) 11 b) 13 c) 4 d) 5 e) 12

63. (UF-RS) A solução da equação $2A_{x,4} = 4!C_{x,x-5}$ é:
a) 14 b) 12 c) 10 d) 8 e) 6

64. (CESCEA-SP) Quantos números ímpares de 4 algarismos, sem repetição, podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?
a) 120 b) 60 c) 30 d) 180 e) 90

65. (UF-CE) A quantidade de números pares de 4 algarismos distintos que podemos formar com os algarismos 1, 2, 4, 5, 7, 8 e 9 é:
a) 20 b) 60 c) 240 d) 360 e) n.d.a.

66. (FGV-SP) Quantos são os números maiores que 400, pares, de três algarismos, que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?
a) 620 b) 640 c) 160 d) 2520 e) 2048

67. (UF-CE) Considere os números inteiros maiores que 64000 que possuem 5 algarismos, todos distintos, e que não contêm os dígitos 3 e 8. A quantidade desses números é:
a) 2160 b) 1320 c) 1440 d) 2280 e) n.d.a.

68. (SANTA CASA-SP) Existem 4 estradas de rodagem e 3 estradas de ferro entre as cidades A e B. Quantos são os diferentes percursos para fazer a viagem de ida e volta entre A e B, utilizando rodovia e trem, obrigatoriamente, em qualquer ordem?
a) $4! \times 3!$ b) $2^{-1} \times 4! \times 3!$ c) 24 d) 12 e) 7

69. (MACK-SP) O total de números, formados com algarismos distintos, maiores que 50000 e menores que 90000 e que são divisíveis por 5 é:
a) 1596 b) 2352 c) 2686 d) 2788 e) 4032

70. (CESCEA-SP) O total de números múltiplos de 4, com quatro algarismos distintos, que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 é:

Scanned by CamScanner

a) 24 b) 48 c) 54
d) 96 e) 120

71. (FAAP-SP) Em um campeonato de dois turnos, em que devem jogar 12 equipes de futebol, qual o número total de jogos a serem realizados?

72. (PUC-SP) Chamam-se "palíndromos", números inteiros que não se alteram quando é invertida a ordem de seus algarismos (por exemplo: 383, 4224, 74847). O número total de palíndromos de cinco algarismos é:
a) 900 d) 2500
b) 1000 e) 5000
c) 1900

73. (FGV-SP) Um tabuleiro especial de xadrez possui 16 casas, dispostas em 4 linhas e 4 colunas. Um jogador deseja colocar 4 peças no tabuleiro, de tal forma que, em cada linha e cada coluna, seja colocada apenas uma peça. De quantas maneiras as peças poderão ser colocadas?
a) 64
b) 576
c) 16
d) 4
e) 30

74. (MACK-SP) A quantidade de números de 3 algarismos que tem pelo menos 2 algarismos repetidos é:
a) 38 d) 414
b) 252 e) 454
c) 300

75. (FEI-SP) Num carro com 5 lugares e mais o lugar do motorista viajam 6 pessoas, das quais 3 sabem dirigir. De quantas maneiras se pode dispor essas 6 pessoas em viagem?

76. (ITA-SP) Se colocarmos em ordem crescente todos os números de 5 algarismos distintos, obtidos com 1, 3, 4, 6 e 7, a posição do número 61473 será:
a) 76º d) 82º
b) 78º e) n.d.a.
c) 80º

77. (FGV-SP) Uma palavra é formada por N vogais e N consoantes. De quantos modos distintos pode-se permutar as letras desta palavra, de modo que não apareçam juntas duas vogais ou duas consoantes?
a) $(N!)^2$ d) $(2N)! \cdot 2$
b) $(N!)^2 \cdot 2$ e) n.d.a.
c) $(2N)!$

78. (FEI-SP) O número de anagramas formados com as letras da palavra *república*, na qual as vogais se mantêm nas respectivas posições é:
a) 5! d) 0!
b) 5!4! e) 4!
c) 9!

79. (MAUÁ-SP) De quantos modos podemos ordenar 2 livros de Matemática, 3 de Português e 4 de Física de modo que os livros de uma mesma matéria fiquem sempre juntos e, além disso, os de Física fiquem entre si, sempre na mesma ordem?

80. (UF-PA) Entre as afirmações abaixo, marque a única correta:
a) $0! = 0$
b) $5! = A_{5,1}$
c) $A_{n,3} + 3A_{n,2} + A_{n,1} = n^3$
d) existem 24 "palavras" distintas, feitas com as letras da palavra MAPA
e) $P_4 = 1$

81. (CESCEM-SP) Quatro pontos distintos e não coplanares determinam exatamente:
a) 1 plano d) 4 planos
b) 2 planos e) 5 planos
c) 3 planos

82. (FGV-SP) Em um congresso há 30 professores de Matemática e 12 de Física. Quantas comissões poderíamos organizar, compostas de 3 professores de Matemática e 2 de Física?
a) 5 359 200 b) 60 c) 267 960
d) 129 600 e) 4 060

83. (PUC-SP) Tomam-se dez pontos sobre uma circuferência. Quantos triângulos podemos construir com vértices nesses pontos?
a) 12 d) 720
b) 120
c) 360 e) $\frac{10!}{3}$

84. (UF-UBERLÂNDIA) Em um plano há 12 pontos, dos quais três nunca são colineares, exceto 5 que estão sobre uma mesma reta. O número de retas determinados por esses pontos é:
a) 56 b) 57 c) 46
d) 47 e) 77

85. (MACK-SP) O conjunto A tem 45 subconjuntos de 2 elementos. O número de elementos de A é:
a) 10
b) 15
c) 45
d) 90
e) impossível determinar com a informação dada.

86. (UNESP-SP) Sobre uma reta marcam-se 3 pontos e sobre outra reta, paralela à primeira, marcam-se 5 pontos. O número de triângulos que obteremos unindo 3 quaisquer desses 8 pontos é:
a) 26 b) 90 c) 25
d) 45 e) 42

87. (MACK-SP) Uma classe tem 10 alunos e 5 alunas. Formam-se comissões de 4 alunos e 2 alunas. O número de comissões em que participa o aluno X e não participa a aluna Y é:
a) 1260 d) 504
b) 2100 e) 330
c) 840

88. (UNESP-SP) Um examinador dispõe de 6 questões de álgebra e 4 de geometria para montar uma prova de 4 questões. Quantas provas diferentes ele pode montar usando 2 questões de álgebra e 2 de geometria?
a) 24 b) 60 c) 90
d) 180 e) 720

89. (PUC-SP) De um grupo de 9 professores, 5 lecionam matemática. Quantas comissões de 3 componentes podem ser formadas de modo que em cada uma compareça pelo menos um professor de matemática?
a) 80 d) 83
b) 79 e) n.d.a.
c) 84

Scanned by CamScanner

90. (FGV-SP) Em uma reunião social havia n pessoas; cada uma saudou as outras com um aperto de mãos. Sabendo-se que houve ao todo 66 apertos de mãos, podemos afirmar que:
a) n é um número primo
b) n é um número ímpar
c) n é um divisor de 100
d) n é um divisor de 125
e) n é um múltiplo de 6

91. (UF-VIÇOSA) A combinação de m elementos tomados 4 a 4, vale 102. Então, o arranjo de m elementos, tomados 4 a 4, vale:
a) 612
b) 9
c) 1224
d) 85
e) 2448

92. (PUC-SP) Com 12 pessoas adultas, entre as quais há 3 com 60 anos de idade, qual é o número de comissões de 8 membros que se pode formar de modo que em cada uma delas figure pelo menos uma pessoa sexagenária?

93. (STO. AMARO-SP) Numa circunferência são tomados dez pontos distintos. Ligando-se seis quaisquer desses pontos obtém-se um hexágono. O número de hexágonos distintos que podem ser formados é de:
a) 151200
b) 210
c) 720
d) 105
e) 75600

94. (METODISTA-SP) Numa reunião de professores, em que cada um cumprimentou todos os seus colegas, registraram-se 210 apertos de mãos. O número de professores presentes à reunião foi de:
a) 20 b) 15 c) 10 d) 21 e) n.d.a.

95. (FM SANTOS-SP) O número de produtos positivos de três fatores distintos, que podem ser obtidos com os elementos do conjunto $\{1; -1; 4; -4; 5; -5; 7; 8\}$ é:
a) 336
b) 273
c) 56
d) 26
e) 25

96. (UE-MT) Sobre uma circunferência marcam-se 7 pontos, 2 a 2, distintos. Calcule o número de triângulos que podemos formar com vértices nos pontos marcados.
a) 3
b) 7
c) 30
d) 35
e) 210

97. (UF-ES) Calcule x sabendo-se que $A_x^3 = 6C_x^{x-2}$. Observação: A_x^3 equivale a $A_{x,3}$ e C_x^{x-2} equivale a $C_{x,\,x-2}$
a) $x = 6$
b) $x = 8$
c) $x = 5$
d) $x = 2$
e) $x = 1$

98. (EESCUSP) O número de combinações de n elementos, p a p, que contêm k elementos determinados é:
a) $C_{n-k,\,p-k}$
b) $C_{n,\,k}$
c) $C_{n,\,p-k}$
d) $C_{n-k,\,p}$
e) $C_{n,\,k-p}$

99. (MACK-SP) Quantos objetos distintos se deve ter para que possam ter 21 combinações distintas de pares de objetos?
a) 10 b) 6 c) 42 d) 7 e) 20

100. (IME) Com 10 espécies de frutas, quantos tipos de salada, contendo 6 espécies diferentes, podem ser feitas?

101. (ITA-SP) Uma urna contém 12 bolas, das quais 7 são pretas e 5 brancas. De quantos modos podemos tirar 6 bolas da urna, das quais exatamente duas são brancas?

102. (EESCUSP) Quantos subconjuntos de 5 cartas, contendo exatamente 3 ases, podem ser formados de um baralho de 52 cartas?

103. (FGV-SP) Um professor conta exatamente 3 piadas no seu curso anual. Ele tem por norma nunca contar num ano as mesmas 3 piadas que ele contou em qualquer outro ano. Qual é o mínimo número de piadas diferentes que ele pode contar em 35 anos?
a) 5
b) 12
c) 7
d) 32
e) 21

104. Calcule os seguintes números binomiais:
a) $\binom{7}{4}$ b) $\binom{12}{10}$ c) $\binom{12}{2}$
d) $\binom{8}{1}$ e) $\binom{15}{1}$ f) $\binom{n}{1}$
g) $\binom{7}{0}$ h) $\binom{13}{0}$ i) $\binom{n}{0}$

105. Determine o binomial complementar de:
a) $\binom{7}{3}$ b) $\binom{12}{10}$ c) $\binom{15}{6}$

106. Resolva as seguintes equações:
a) $\binom{8}{n} = \binom{8}{3}$ b) $\binom{13}{5} = \binom{13}{n}$
c) $\binom{n}{7} = \binom{n}{3}$ d) $\binom{n}{5} = \binom{n}{9}$

107. Calcule:
a) $\binom{7}{2} + \binom{7}{3}$
b) $\binom{9}{4} + \binom{9}{5}$
c) $\binom{12}{5} + \binom{12}{6} + \binom{13}{7}$
d) $\binom{15}{10} + \binom{15}{11} + \binom{16}{12} + \binom{17}{13}$
e) $\binom{9}{7} - \binom{8}{7}$
f) $\binom{6}{4} - \binom{5}{3}$

108. (FATEC-SP) A expressão $\frac{p+1}{n+1} \cdot \binom{n+1}{p+1}$, onde $p \leqslant n$, com $p, n \in \mathbb{N}^*$ é igual a:
a) $\binom{n+1}{p}$
b) $\binom{n}{p}$
c) $\binom{n}{p+1}$
d) 1
e) n.d.a.

109. (UE-CE) A soma das soluções da equação $\binom{18}{6} = \binom{18}{4x-1}$ é:
a) 8
b) 5
c) 6
d) 7

110. (MACK-SP) Para $n \in \mathbb{N}^*$, se $\binom{n}{20} = \binom{n}{10}$, então n é igual a:

Scanned by CamScanner

a) 10 b) 20 c) (20!) · (10!) d) 30 e) 20!/10!

111. (MAUÁ-SP) Na equação: $2\binom{n+1}{4} = 7\binom{n-1}{2}$ obter n e em seguida calcular P_n (permutações simples).

112. (STA. CASA-SP) A equação: $\dfrac{\binom{k+1}{2}+\binom{k+1}{3}}{\binom{k+2}{5}} = 1$

a) não admite soluções;
b) admite uma solução entre 1 e 5;
c) admite uma solução entre 5 e 12;
d) admite uma solução entre 12 e 20;
e) admite uma solução maior que 20.

113. (MACK-SP) Os números binomiais $\binom{n}{0}$, $\binom{n+1}{1}$ e $\binom{n+2}{2}$, nesta ordem, estão em progressão aritmética, para $n \in \mathbb{N}$. Nestas condições, o produto dos possíveis valores de n é:

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

114. (UF-PR) Sejam n e p números inteiros positivos, tais que $n - 1 \geqslant p$. Então: $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p+1}$ é igual a:

a) $\binom{n-1}{p-1}$
b) $\binom{n}{p}$
c) $\binom{n+1}{p}$
d) $\binom{n+1}{p-1}$
e) $\binom{n+1}{p+1}$

115. (MACK-SP) O valor de $C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \ldots + C_{n,n-1}$ com $n \in N^*$ é sempre:

a) $2^n - 1$
b) 2^n
c) $2^n + n$
d) n^2
e) $(n + 2)2$

116. (MED. ABC) Calcule o 5º termo do desenvolvimento de $(x - 3)^6$:

a) $-120x^4$
b) $120x^4$
c) $-135x^5$
d) $135x^5$
e) n.d.a.

117. (UF UBERLÂNDIA-MG) Desenvolvendo-se o binômio $\left(2x^2 + \frac{x}{2}\right)^{10}$ segundo as potências decrescentes de x, o 6º termo será:

a) $\frac{105}{4}x^{10}$
b) $\frac{105}{2}x^{14}$
c) $252x^{15}$
d) $210x^{15}$
e) $252x^{10}$

118. (UF-PA) Qual o valor do termo médio do desenvolvimento de $(2x + 3y)^8$?

a) $70 \cdot x^4 \cdot y^4$
b) $70 \cdot 16 \cdot 81 \cdot x^4 \cdot y^4$
c) $70 \cdot 16 \cdot 81 \cdot x^5 \cdot y^4$
d) $70 \cdot 16 \cdot 81 \cdot x^4 \cdot y^5$
e) $70 \cdot 16 \cdot 81 \cdot x^5 \cdot y^5$

119. (UE-CE) O coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(2x + 1)^8$ é:

a) 1024 b) 1120 c) 1648 d) 1792

120. (PUC-RS) O coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$ é:

a) 15 b) 60 c) 160 d) 192 e) 240

121. (PUC-RS) No desenvolvimento de $(x + a)^{10}$, ordenado segundo as potências decrescentes de x, o quinto termo é igual a $\frac{105}{8} \cdot x^6$. Se $a > 0$, então o valor de a é:

a) 1/2 b) 1 c) 3/2
d) 5/2 e) 3

122. (UAM) O termo independente de x no binômio $\left(x^4 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ é igual a:

a) 35 b) 45 c) $\frac{30}{35}$ d) $\frac{30}{42}$

123. (FGV-SP) Desenvolvendo-se a expressão $\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)\right]^6$ obtém-se como termo independente de x o valor:

a) 10
b) -10
c) 20
d) -20
e) 36

124. (CESCEM-SP) Desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^n$ tem um termo independente de x:

a) se n é par
b) se n é ímpar
c) se n é divisível por 3
d) qualquer que seja n diferente de zero
e) não existe nenhum valor de n nessas condições

125. (MAUÁ-SP) Verificar se no desenvolvimento do binômio $\left(2x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4x}\right)^{10}$ haverá, após as simplificações, um termo em x^5. Em caso positivo, determinar seu coeficiente.

126. No desenvolvimento de $(3x + 13)^n$ há 13 termos. A soma dos coeficientes destes termos é igual a:

a) 2^{44}
b) 2^{46}
c) 2^{48}
d) 2^{50}
e) 2^{52}

127. (FGV-SP) A soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(2x + 3y)^5$ é:

a) 15625
b) 7776
c) 6226
d) 4225
e) 2048

128. (UF VIÇOSA) A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x + 3y)^m$ é 625. O valor de m é:

a) 5
b) 6
c) 10
d) 3
e) 4

129. (MACK-SP) Os três primeiros coeficientes no desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^n$ estão em progressão aritmética. O valor de n é:

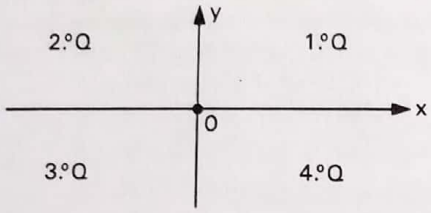
a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

Scanned by CamScanner

GEOMETRIA ANALÍTICA

Sistema de coordenadas cartesianas

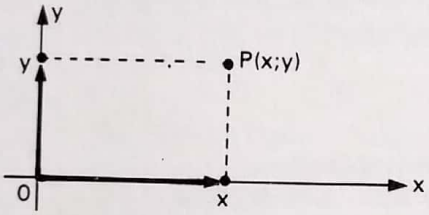
No plano cartesiano, o par de eixos Ox e Oy determinam quatro regiões: são os quadrantes:



O: origem do sistema de coordenadas
Ox: eixo de abscissas
Oy: eixo de ordenadas

■ Coordenadas de um ponto

Todo ponto do plano cartesiano é associado a um par ordenado (x; y) de números reais:

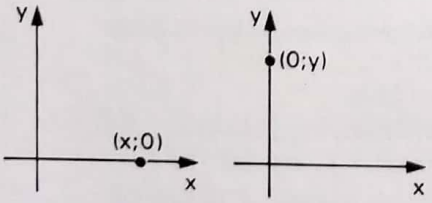


x: abscissa do ponto P
y: ordenada do ponto P
(x; y): coordenadas do ponto P

Casos particulares

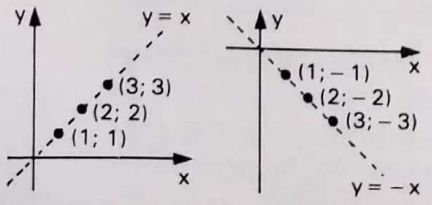
• Todo ponto do eixo de abscissas tem ordenada nula.

• Todo ponto do eixo de ordenadas tem abscissa nula:

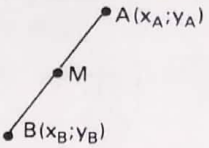


• Todo ponto da bissetriz do 1º e 3º quadrantes (quadrantes ímpares) tem abscissa e ordenada iguais.

• Todo ponto da bissetriz do 2º e 4º quadrantes tem abscissa e ordenada simétricas:



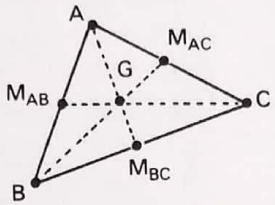
■ Ponto médio



$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

■ Baricentro do triângulo

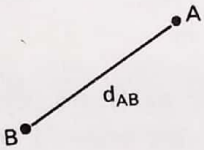
Baricentro: ponto de intersecção das medianas. Mediana: segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.



G = baricentro

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

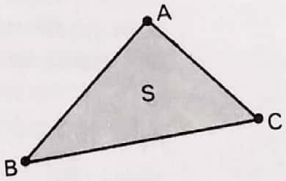
■ Distância entre dois pontos



$$d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\begin{cases} \Delta x = |x_A - x_B| \\ \Delta y = |y_A - y_B| \end{cases}$$

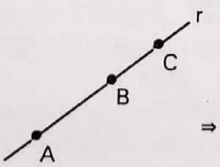
■ Área do triângulo



S = área do triângulo

$$S = \frac{1}{2} \cdot \text{mód} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

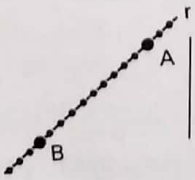
■ Alinhamento de três pontos



A, B, C alinhados (colineares) ⇔

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Equação geral da reta



$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

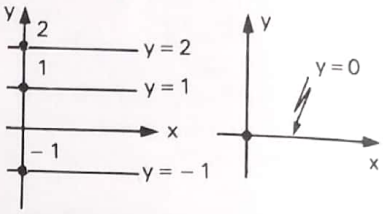
$$\Rightarrow \boxed{a \cdot x + b \cdot y + c = 0}$$

onde (x; y) são as coordenadas de qualquer ponto pertencente à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

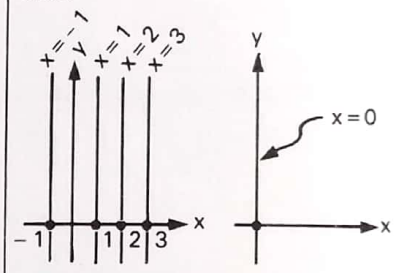
OBSERVAÇÃO *a*, *b*, *c*, são números reais tais que:

• *a* e *b* não são nulos ao mesmo tempo;

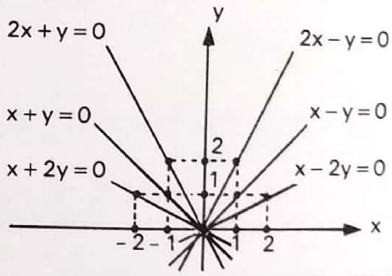
• $\boxed{a = 0}$ ⇒ a reta é paralela ao eixo Ox; a equação desta reta é do tipo $\boxed{y = \text{número}}$; todos os pontos da reta têm a mesma ordenada.



• $\boxed{b = 0}$ ⇒ a reta é paralela ao eixo Oy; a equação desta reta é do tipo $\boxed{x = \text{número}}$; todos os pontos da reta têm a mesma abscissa.



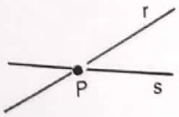
• $\boxed{c = 0}$ ⇒ a reta passa pela origem.



■ Intersecção de retas

r: ax + by + c = 0

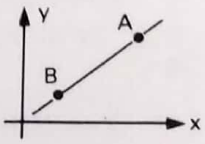
s: a'x + b'y + c' = 0



r ∩ s = {P} ⇒ as coordenadas do ponto de intersecção são calculadas resolvendo-se o sistema formado pelas equações das retas *r* e *s*.

■ Equação reduzida da reta

r: a · x + b · y + c = 0 ⇒



$$\Rightarrow y = \left(\frac{-a}{b}\right)x + \left(\frac{-c}{b}\right)$$

⇓ ⇓

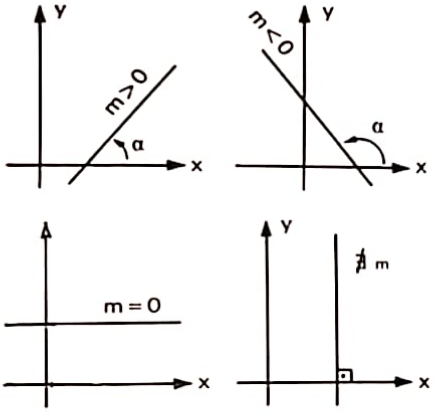
$$\boxed{y = (m) \cdot x + (n)}$$

Scanned by CamScanner

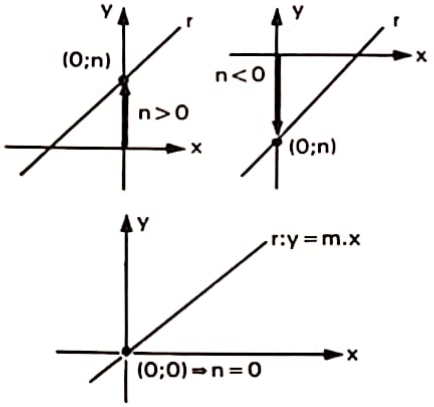
m = coeficiente angular ou **declividade;**

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$$

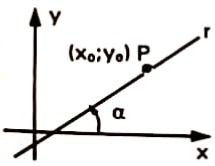
α = inclinação



n = coeficiente linear: ordenada do ponto em que a reta (não vertical) "corta" o eixo das ordenadas.



■ Equação da reta, dado um ponto e o coeficiente angular

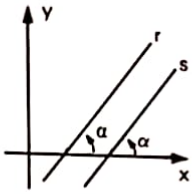


$$r: y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

ponto conhecido

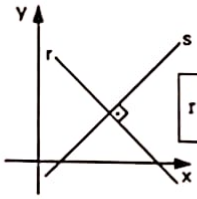
$m = tg\alpha$: coeficiente angular

■ Posições relativas de duas retas



r e s: paralelas

$$r \parallel s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

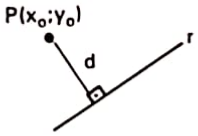


r e s: perpendiculares

$$r \perp s \Leftrightarrow m_s = -\frac{1}{m_r}$$

OBSERVAÇÃO Estas propriedades só valem para retas não verticais.

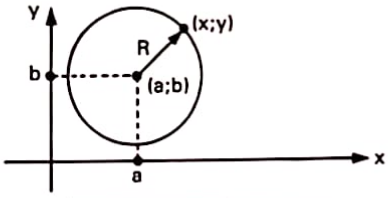
■ Distância de ponto a reta



r: ax + by + c = 0

$$d_{P;\,r} = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Equação da circunferência



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2a \cdot x - 2b \cdot y + p = 0$$

■ Cálculo do centro e do raio

$$x^2 + y^2 - 2a \cdot x - 2b \cdot y + p = 0$$

metade, com sinal trocado

$$a \quad b \Rightarrow C(a; b)$$

p (termo independente) ⇒ $p = a^2 + b^2 - R^2$

OBSERVAÇÃO Na equação de uma circunferência, temos, necessariamente:

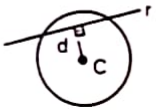
- Os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais, inclusive em sinal e não nulos. Se o coeficiente de x^2 for diferente de 1, deve-se dividir toda a equação por ele.
- Não pode existir termo em $x \cdot y$ na equação.
- O termo independente p é tal que

$$p = a^2 + b^2 - R^2 \Rightarrow R^2 = a^2 + b^2 - p > 0$$

(numa circunferência, o raio é sempre positivo)

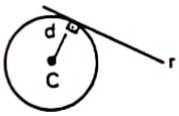
■ Posições relativas entre reta e circunferência

- Reta e circunferência secantes:



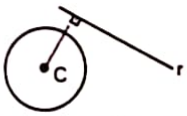
$$d_{C;\,r} < R$$

Reta e circunferência tangentes:



$$d_{C;\,r} = R$$

Reta externa à circunferência:



$$d_{C;\,r} > R$$

Sendo: C(α; β) e r: ax + by + c = 0 ⇒

$$\Rightarrow d_{C;\,r} = \frac{|a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

★ EXERCÍCIOS ★

130. Determine o ponto médio dos segmentos $\overline{AB}$ seguintes:
a) A(0; 0) e B(8; 12) b) A(−4; 8) e B(3; −9)
c) A(3; −5) e B(6; −2) d) A(2; 3) e B(1/2; 2/3)

131. Determine as coordenadas dos pontos que dividem em 4 partes iguais o segmento $\overline{AB}$, sendo:
a) A(0; 0) e B(8; 20) b) A(−4; 6) e B(4; 10)
c) A(5; −2) e B(8; 4) d) A(2; 4/3) e B(18/5; 0)

132. Determine as coordenadas dos pontos que dividem em 3 partes iguais o segmento $\overline{AB}$, sendo:
a) A(0; 0) e B(6; 9) b) A(2; 1) e B(11; 7)
c) A(−3; 4) e B(6; −1) d) A(1/3; 1/4) e B(7/3; 1)

133. Determine o baricentro do triângulo ABC, sendo:
a) A(0; 0), B(1; 3) e C(5; 12)
b) A(−2; 2), B(3; −1) e C(−4; 6)

134. Determine o ponto B(a; b), sabendo que o ponto M(1; 2) é médio do segmento $\overline{AB}$, com A(−1; 6).

135. Determine o vértice C do triângulo ABC, sabendo que A(1; 2), B(4; −1) e G(0; 0) é o baricentro do triângulo ABC.

136. O segmento $\overline{AB}$ é dividido em 5 partes iguais, sendo

Scanned by CamScanner

P o segundo ponto de divisão a partir de A. Determine P sabendo que A(1; 2) e B(11; −13).

137. O segmento $\overline{AB}$ é dividido em 7 partes iguais, sendo P o quinto ponto de divisão a partir de A. Determine B sabendo que A(−3; 5) e P(7; 0).

138. Calcule a distância entre os pontos:
a) A(0; 0) e B(8; 6)
b) A(1; 2) e B(6; −10)
c) A(3; 12) e B(11; −3)
d) A(2; −3) e B(−1; 1)

139. Calcule o perímetro e a área do triângulo ABC, sendo:
a) A(−4; 3), B(5; 3) e C(11; −5)
b) A(0; 0), B(3; 4) e C(−9; −5)

140. (UF-MG) Sabendo-se que a distância entre os pontos A(0; 1) e B(t; 2t) é $\sqrt{13}$, o valor positivo de *t* é:
a) $\frac{1+\sqrt{61}}{5}$ b) 2 c) 3 d) $\frac{2+\sqrt{61}}{2}$ e) n.d.a

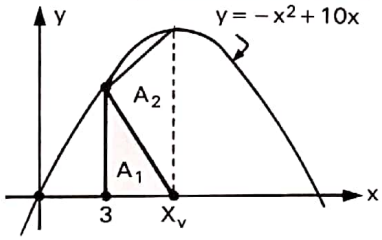
141. Se três vértices de um paralelogramo são os pontos (2; 0) (3; 1) e (5; 2), então o 4º vértice pode ser o ponto:
a) (4; 1) b) (0; 0) c) (6; 2) d) (−4; 1) e) (0; 1)

142. (FGV-SP) A área do triângulo de vértices (−3; 3), (−1; 1) e (4; 0) é:
a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16

143. (PUC-SP) Os pontos A(1; 2), B(4; 3), C(3; 1) e D(m; n), nesta ordem, formam um paralelogramo. A área do paralelogramo ABCD é igual a:
a) 5 b) 6 c) 3 d) 4 e) 7

144. (CESGRANRIO-RJ) Os pontos M, N, P e Q do $\mathbb{R}^2$ são os vértices de um paralelogramo situado no primeiro quadrante. Se M = (3; 5), N = (1; 2) e P = (5; 1), então o vértice Q é:
a) (7; 4) b) (6; 5) c) (9; 8)
d) (8; 6) e) (6; 3)

145. (FGV-SP) As áreas A_1 e A_2 assinaladas são iguais, respectivamente, a:
a) 42 e 25
b) 10,5 e 12,5
c) 21 e 25
d) 21 e 50
e) 42 e 50



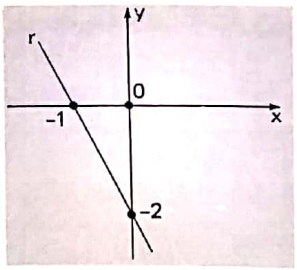
146. (FGV-SP) Os pontos (1; 3), (2; 7) e (4; k) do plano cartesiano estão alinhados se e somente se:
a) k = 11 b) k = 12 c) k = 13
d) k = 14 e) k = 15

147. (UC-MG) Se os três pontos $A\left(\frac{1}{2}; t\right)$, $B\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ e C(−1; 6) são colineares, então o valor de *t* é igual a:
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{5}{6}$

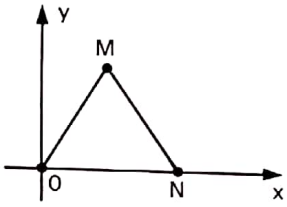
148. (MED. ABC) Os pontos (−2, 0) e (0, −3) estão ambos na reta de equação:
a) 2x + 3y + 6 = 0
b) 3x + 2y − 6 = 0
c) 3x + 2y + 6 = 0
d) 2x + 3y − 6 = 0
e) N.D.A

149. (PUC-SP) Os pontos A(3; 5), B(1; −1) e C(x; −16) pertencem a uma mesma reta, se *x* for igual a:
a) −5 b) −1 c) −3
d) −4 e) −2

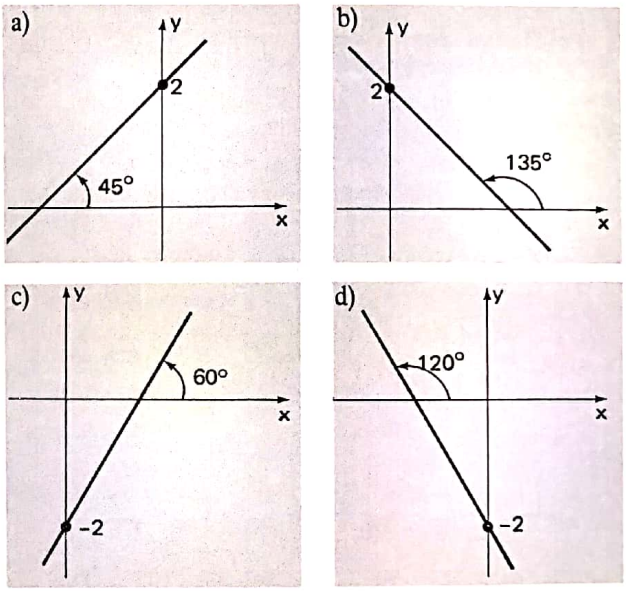
150. (MACK-SP) A equação da reta *r* é:
a) y + 2x − 2 = 0
b) y − x − 2 = 0
c) y + 2x + 2 = 0
d) y − 2x − 2 = 0
e) y − 2x + 2 = 0



151. (CESGRANRIO-RJ) Na figura, o triângulo MNO é eqüilátero e de lado igual a 2.
A reta que contém o lado $\overline{MN}$ é:
a) $2x + y\sqrt{3} = 1$
b) $x + y\sqrt{3} = 2$
c) $x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{3}$
d) $x\sqrt{2} + y = 1$
e) $x + y = 2\sqrt{3}$

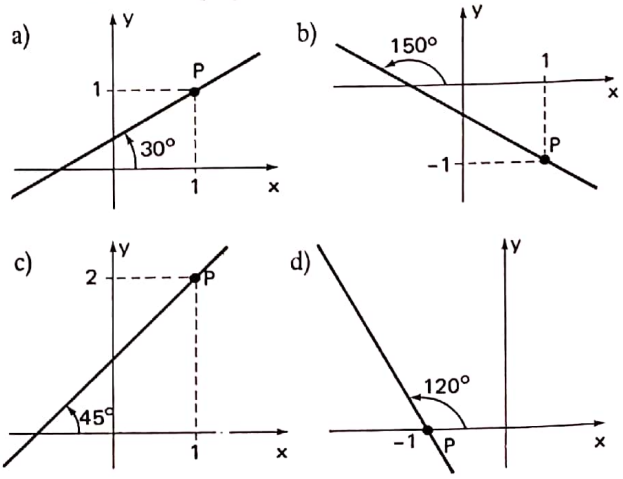


152. Escrever as equações reduzidas das retas seguintes:



153. Determine o coeficiente angular da reta que:
a) tem inclinação de 45°;
b) tem inclinação de 120°;
c) passa pelos pontos A(1; 2) e B(5; 3);
d) passa pelos pontos P(5; −2) e Q(7; −1);
e) tem equação geral: 2x + 3y − 1 = 0;
f) tem equação $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.

154. Obter as equações das seguintes retas:



Scanned by CamScanner

155. (FGV-SP) A equação da reta *s* é:

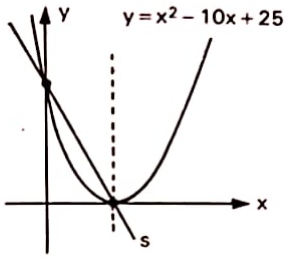
a) $\frac{y}{25} + \frac{x}{5} = -1$

b) $\frac{y}{5} + \frac{x}{25} = 1$

c) $\frac{y}{5} - \frac{x}{25} = 1$

d) $\frac{y}{25} - \frac{x}{5} = 1$

e) $\frac{y}{25} + \frac{x}{5} = 1$



156. A reta que forma com os eixos coordenados um triângulo de baricentro G(2; 3) é:

a) $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$

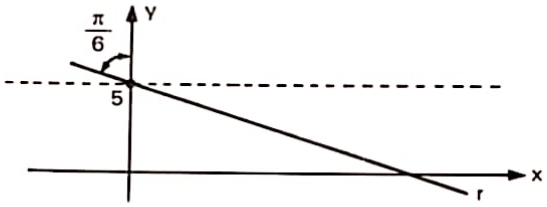
b) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

c) $\frac{x}{6} + \frac{y}{9} = 1$

d) $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1$

e) $x + y = 5$

157. (FGV-SP) A equação da reta *r* pode ser representada por:



a) $y = 5 + \sqrt{3}\,x$

b) $y = 5 + \frac{\sqrt{3}}{3}x$

c) $y = 5 - \sqrt{3}\,x$

d) $y = 5 - \frac{\sqrt{3}}{3}x$

e) $y = 5 - \frac{\sqrt{2}}{2}x$

158. (UF UBERLÂNDIA-MG) O ângulo agudo formado pelas retas $y = x$ e $y = \sqrt{3} \cdot (x - 5)$ é:

a) 30° b) 20° c) 50° d) 15° e) 80°

159. (MACK-SP) A equação da bissetriz de um dos ângulos formados pelas retas $r: x - y + 2 = 0$ e $s: x + y - 2 = 0$ é:

a) $x = y$ b) $x = -y$ c) $x = 2$ d) $y = 2$ e) $y = 0$

160. (FAAP-SP) Sejam Oxy um sistema cartesiano ortogonal e o triângulo ABC, para o qual os pontos $M_A = (3, 1)$, $M_B = (0, 5)$ e $M_C = (2, 3)$ são os pontos médios dos lados, opostos aos vértices A, B e C, respectivamente. Pede-se:

a) achar as coordenadas do vértice A

b) achar a equação da reta suporte do lado BC

161. (SANTA CASA-SP) As equações paramétricas de uma reta são $x = 2t - 1$ e $y = 3t + 2$, onde $t \in \mathbb{R}$. As intersecções dessa reta com os eixos coordenados são os pontos:

a) (−3; 0) e (0; 2)

b) $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ e $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$

c) $\left(\frac{7}{3}; 0\right)$ e $\left(0; -\frac{7}{2}\right)$

d) (−7; 0) e (0; 7)

e) $\left(-\frac{7}{3}; 0\right)$ e $\left(0; \frac{7}{2}\right)$

162. (MACK-SP) As retas de equação da forma $ax + y + 8 = 0$ têm um ponto comum A e as retas de equação da forma $bx - 4y + 4 = 0$ têm um ponto comum B. A equação da reta determinada pelos pontos A e B é:

a) $y = 0$ b) $x = 8$ c) $x = 4$

d) $x = 0$ e) $y = 2$

163. (CESGRANRIO-RJ) As retas do $\mathbb{R}^2$ de equações $x = 2$, $y = x$ e $x + 2y = 12$ determinam um triângulo T. O ponto de coordenadas inteiras que está no interior de T é:

a) (0; 0) b) (0; 4) c) (1; 4) d) (3; 4) e) (3; 5)

164. (UNESP-SP) A área da região triangular limitada pelas retas $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$; $-\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ e $y = 0$ é, em unidades de área, igual a:

a) 9 b) 7 c) 18 d) 10 e) 6

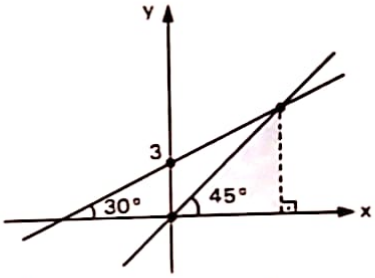
165. (FGV-SP) A área hachurada é igual a:

a) $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{3 - \sqrt{3}}\right)^2$

b) $\left(\frac{9}{2(3 - \sqrt{3})}\right)^2$

c) $\frac{27}{8}$

d) Um valor impossível de ser calculado por falta de dados.



166. (PUC-SP) Uma reta *r* possui equação $ax + by + c = 0$, com $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$. Quantas das seguintes afirmações são verdadeiras?

1. *r* tem infinitos pontos no quadrante de coordenadas positivas;
2. *r* passa pela origem do sistema de coordenadas;
3. *r* corta o eixo das abscissas num ponto de abscissa positiva;
4. a declividade de *r* é um número positivo.

a) nenhuma b) uma c) duas d) três e) quatro

167. (CESGRANRIO-RJ) Se as retas do $\mathbb{R}^2$ de equações $y = 3x$ e $y = mx + n$ são paralelas, então:

a) $m = -3n$

b $n = 3m$

c) $n = -1$

d) $m = -\frac{1}{3}$

e) $m = 3$

168. (UF-PA) As equações de dois lados de um losango são dadas por $2x - y + 5 = 0$ e $x + 3y - 1 = 0$; se os outros dois lados têm como vértice comum (−1; −2), então suas equações são:

a) $2x - y + 4 = 0$ e $x + 3y - 7 = 0$

b) $2x - y = 0$ e $x + 3y + 7 = 0$

c) $x + 2y + 5 = 0$ e $3x - y + 1 = 0$

d) $x - 2y - 3 = 0$ e $x - 3y - 5 = 0$

169. (FGV-SP) As retas (r) $x + 2y = 5$ e (s) $4x + ky = 5$ são paralelas se:

a) $k = 8$ b) $k = 7$ c) $k = 6$ d) $k = 5$ e) $k = 4$

170. (FGV-SP) Sabendo-se que a reta $s \parallel r$, onde *r* tem por equação $3x - 10y + 30 = 0$, e que *s* contém a origem, concluímos que a equação de *s* é:

a) $y = \frac{3}{10}x$

b) $y = -\frac{10}{3}x$

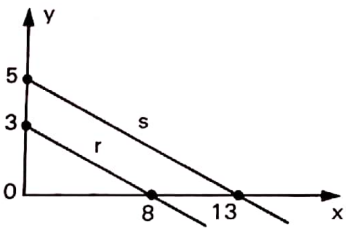
c) $y = \frac{3}{10}x + 30$

d) $y = -\frac{10}{3}x + 30$

e) $y = \frac{10}{3}x$

171. (MAUÁ-SP) Determinar as equações das retas que passam pela intersecção das retas: $x + 2y = 4$, $2x - y = 8$ e são paralelas às retas bissetrizes dos quadrantes formados pelos eixos coordenados (eixo x e eixo y).

Scanned by CamScanner

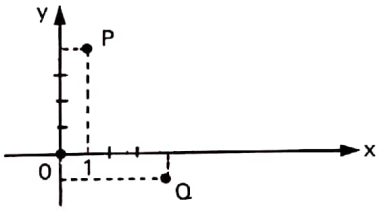


172. (ABC) Para as retas *r* e *s* podemos afirmar:
a) são paralelas
b) $r \cap s = P$, do 4º quadrante
c) (3; 0,4) está numa delas
d) $r \cap s = M$, do 2º quadrante
e) (8; 2) está numa delas

173. (FAAP-SP) Determinar as equações das retas que passam pelo ponto P(1; −3) e que são perpendiculares aos eixos.

174. (MACK-SP) A reta $y = -2$ é a mediatriz do segmento que une os pontos:
a) A(0; 0) e B(0; −4)
b) A(0;0) e B(0; −2)
c) A(0; −4) e B(−4; 0)
d) A(−4; 0) e B(0; 0)
e) A(−4; −4) e B(0; 0)

175. (UF-BA) Na figura, a equação reduzida da mediatriz de $\overline{PQ}$ é:



a) $y = \frac{3}{5}x$
b) $y = -\frac{3}{5}x + 3$
c) $y = x$
d) $5y = -3x + 3$
e) $5y + 3x = 0$

176. (PUC-RS) Os pontos (2; 3) e (6; 7) são extremos da diagonal de um quadrado. A reta suporte da outra diagonal tem equação:
a) $x - y + 9 = 0$
b) $x + y + 9 = 0$
c) $x - y - 9 = 0$
d) $x + y - 9 = 0$
e) $x - y + 1 = 0$

177. (FGV-SP) Os pontos do plano cartesiano, cujas coordenadas (x, y) satisfazem a equação $|x + 2y| = 1$ constituem:
a) um quadrado
b) um par de retas paralelas
c) um par de retas perpendiculares
d) um feixe de infinitas retas paralelas
e) um segmento de reta

178. Pelo ponto P(2; 4) conduzimos as retas r e s, respectivamente paralela e perpendicular à reta t de equação $x = 2y$. As retas r e s cortam o eixo das abscissas em dois pontos tais que a distância entre eles é igual a:
a) 10 b) 5 c) 13 d) 14 e) $\sqrt{17}$

179. (UF UBERLÂNDIA-MG) São dados os pontos A(2; y), B(1; −4) e C(3; −1). Qual deve ser o valor de *y*, para que o triângulo ABC seja retângulo em B?
a) $\frac{14}{3}$ b) $-\frac{14}{3}$ c) $\frac{3}{14}$ d) $-\frac{3}{14}$ e) $\frac{7}{3}$

180. (UF-PA) As retas $Ax + By + C = 0$ e $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ são perpendiculares. Uma relação entre A, B, p e q será:
a) $Ap = qB$
b) $Aq = pB$
c) $Aq = -pB$
d) $Ap = -pB$
e) $AB = -\frac{p}{q}$

181. (MACK-SP) A reta (r) passa pelo ponto P(1; 0) e é perpendicular à reta (s) dada por $y = 2x + 3$. Se o ponto Q (a; 4) pertence à reta (r), então *a* vale:
a) 0 b) −3 c) −7 d) 7 e) 3

182. (UF-RS) As retas de equações $y = ax - 4$ e $y = cx + d$ concorrem, perpendicularmente no ponto (3; 2). O valor de *d* é:
a) −4 b) −1 c) 1/2 d) 20/7 e) 7/2

183. (FGV-SP) O ponto da reta de equação $x + 2y - 1 = 0$, mais próximo do ponto P (6; 5), tem coordenadas cuja soma é:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

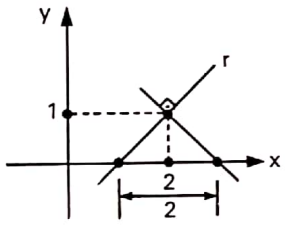
184. (MED. ABC) O ponto simétrico da origem em relação à reta $2x + 2y - 1 = 0$ é:
a) (2; 2)
b) (2; 0)
c) (0; −2)
d) (0,5; 0,5)
e) n.d.a.

185. (UF-RS) Os vértices de um triângulo são os pontos A (−1; 2), B (5; 1) e C (3; 6). O coeficiente linear da reta que passa por *C* e pelo ortocentro do triângulo é:
a) −24 b) −12 c) −10 d) −6 e) 6

186. (FAAP-SP) Num sistema cartesiano ortogonal Oxy, os pontos R = (4; 6) e S = (2; −10) são vértices de um triângulo RST. Sabendo-se que as alturas do triângulo relativas a estes vértices passam pelo ponto H = (7; 5), pede-se a equação da reta suporte do lado $\overline{RT}$.

187. (MAUÁ-SP) A reta r: $3x + 4y - 24 = 0$ intercepta os eixos Ox e Oy respectivamente nos pontos M e N. Determinar a equação da reta s perpendicular à reta r pelo ponto $P \in r$, tal que $\overline{NP} = 3\,\overline{PM}$.

188. (MACK-SP) Na figura, a equação da reta *r* é:
a) $2x - 3y - 1 = 0$
b) $x - y - 1 = 0$
c) $4x - 5y - 3 = 0$
d) $4x - 3y - 5 = 0$
e) $3x - 2y - 4 = 0$



189. (UB-DF) O número *m* de pontos do plano eqüidistantes de (2; 6) e (−2; 5) e a uma distância 2 da reta $x = 1$ é:
a) m = 1
b) m = 2
c) m = 0
d) nenhuma dessas.

190. (PUC-RS) Os pontos A (2; 1), B (0; 3) e C (−1; 1) determinam um triângulo cuja altura relativa ao lado $\overline{BC}$ mede:
a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ d) $\sqrt{5}$ e) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

191. (CESGRANRIO-RJ) O ponto (−1; −2) é um vértice de um triângulo eqüilátero que tem um lado sobre a reta $x + 2y - 5 = 0$. O comprimento do lado do triângulo é:
a) 4 b) 5 c) $2\sqrt{3}$ d) $\frac{9\sqrt{5}}{4}$ e) $\frac{4\sqrt{15}}{3}$

192. Determine a equação da circunferência de centro C e raio R nos seguintes casos:
a) C (0; 0) e R = 4
b) C (3; 0) e R = 3
c) C (1; −2) e $R = \sqrt{5}$
d) C (−2; 3) e R = 1

193. Determine o centro e o raio da circunferência de equação:
a) $x^2 + y^2 = 64$
b) $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$
c) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

194. (FGV-SP) Os pontos A (−1; 4) e B (3; 2) são extremidades de um diâmetro de uma circunferência. A equação dessa circunferência é:
a) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$
b) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = \sqrt{5}$
c) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$
d) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = \sqrt{5}$
e) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 20$

Scanned by CamScanner

195. (UC-MG) A equação da circunferência de raio 5, concêntrica à circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$, é:
a) $x^2 + y^2 + 4x - y - 20 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x + y + 20 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2x + y - 15 = 0$

196. (SANTA CASA-SP) São dados a circunferência (λ) de equação $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ e o ponto A (2; 0). A equação da circunferência concêntrica a (λ) e que passa pelo ponto A é:
a) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 12 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 16 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 20 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 26 = 0$

197. (PUC-SP) Determine as equações das circunferências de raio 2 que passam pelos pontos (0; 0) e (2; 2).

198. (UF VIÇOSA-MG) A área do círculo delimitado pela circunferência de equação $4x^2 + 4y^2 - 4x - 11 = 0$ é igual a:
a) 121π b) 3π c) $\frac{11\pi}{4}$ d) 9π e) $\frac{121\pi}{16}$

199. (UF UBERLÂNDIA-MG) A distância do centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ à bissetriz do 1º e 3º quadrantes vale:
a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

200. (UF-PA) A equação $ax^2 + 3y^2 - bxy + 3x + 15y + c = 0$, representa uma circunferência de raio 2. Então, $2a + b + c$ é igual a:
a) $\frac{37}{2}$ b) $\frac{31}{2}$ c) $\frac{29}{2}$ d) $\frac{27}{2}$ e) $\frac{25}{2}$

201. (UF-PA) O maior valor inteiro de *p* para que a equação $x^2 + y^2 - 6x + 4y + p = 0$ represente uma circunferência é:
a) 8 b) 10 c) 11 d) 12 e) 15

202. (MACK-SP) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + kxy = m$ é a equação de uma circunferência de raio 3. Então $k + 2m$ vale:
a) -15 b) -8 c) -4 d) 0 e) 2

203. (UE-CE) A distância do ponto $P(-3; 8)$ à circunferência cuja equação é $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0$, está compreendida entre:
a) 7 e 9 b) 5 e 7 c) 3 e 5 d) 1 e 3

204. (FESP) Dada a circunferência de equação $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 25 = 0$ e o ponto $A(p; -1)$, podemos afirmar que o valor de *p* para que o centro da circunferência, o ponto *A* e a origem dos eixos estejam alinhados é:
a) $-\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e) n.d.a.

205. (FGV-SP) A reta $3x + 4y - 6 = 0$ determina na circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ uma corda de comprimento igual a:
a) 3 b) $\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{3}$ d) 6 e) $2\sqrt{2}$

206. (UF-AM) A circunferência $x^2 + y^2 + 5x + 4y + a = 0$ determina no eixo OX uma corda de comprimento 3. Calcule *a* e marque o seu valor, que é:
a) 4 b) $\frac{1}{4}$ c) 2 d) $\frac{1}{2}$

207. (UFSCAR-SP) Consideremos, num sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, um triângulo eqüilátero T, inscrito na circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$. Sabendo-se que (0; 0) é um vértice de T, podemos afirmar que o valor numérico da área de T é:
a) $3\sqrt{3}$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

208. (UF-PA) As circunferências $C_1: x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ e $C_2: x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ são:
a) exteriores
b) tangentes exteriores
c) tangentes interiores
d) concêntricas
e) secantes

209. (PUCCAMP-SP) Considere as circunferências
(λ_1) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$ e
(λ_2) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 75 = 0$; concluímos que:
a) λ_1 e λ_2 possuem 2 pontos de intersecção (ou seja, são secantes)
b) λ_1 e λ_2 se tangenciam internamente
c) λ_1 e λ_2 se tangenciam externamente
d) λ_1 e λ_2 são disjuntas e externas
e) λ_1 e λ_2 são disjuntas e internas

210. (FAAP-SP) A circunferência τ de equação $(x - a)^2 + (y - 4)^2 = a^2$ está no 1º quadrante e tangencia tanto o eixo Oy como a reta s de equação $y = ax$. Achar o valor numérico do raio R e das coordenadas do centro C da circunferência τ.

211. (MAUÁ-SP) Quais são as equações das retas paralelas ao eixo Ox, tangentes à circunferência: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$?

212. (MACK-SP) A reta que passa pelo ponto P(2; 3) e é tangente à circunferência de centro C(0; 0) e raio 2 pode ser:
a) $y = 3$ b) $x = 2$ c) $y = 2x$ d) $y = -2x$ e) $x = 3$

213. (FAAP-SP) Num sistema cartesiano ortogonal Oxy são dados os pontos A = (a; 5) e B = (1; 2). Determinar *a* para que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ fique tangente em B a uma circunferência de centro na origem.

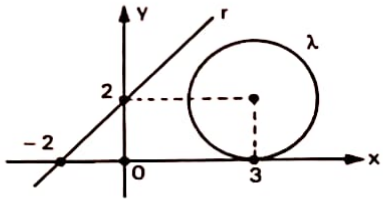
214. (MAUÁ-SP) Determinar a equação da circunferência que tem centro na reta: $x - y - 1 = 0$, raio R = 1 e é tangente ao eixo y.

215. (CESGRANRIO-RJ) A reta do plano xOy, que passa pela origem *O*, é tangente à circunferência $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$, é:
a) $y = x$ b) $y = -x$ c) $x = 0$ d) $y = 0$ e) $y = -2x$

216. (FAAP-SP) Determinar a > 0 de modo que o ponto P(a; 0) seja o centro de uma circunferência de raio 5 cm, que tangencia a reta $y = x$.

217. (CESESP-SP) Os valores de *m* para os quais a reta de equação $x + y + m = 0$ é tangente à circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 = 25$ são:
a) 4 ou 7 b) 3 ou 4 c) -5 ou 5
d) $-5\sqrt{2}$ ou $5\sqrt{2}$ e) -10 ou 10

218. (SANTA CASA-SP) Na figura ao lado, a circunferência λ é tangente ao eixo das abscissas.
Uma reta *t*, paralela à reta *r* pela origem, intercepta λ em dois pontos. A abscissa de um desses pontos é:



Scanned by CamScanner

a) $\frac{5}{2} + \sqrt{7}$ b) $\frac{5}{2} - \sqrt{7}$ c) $5 - \sqrt{7}$

d) $5 + \sqrt{7}$ e) $\frac{5 - \sqrt{7}}{2}$

219. (UnB-DF) Em um plano α foi escolhido um sistema de coordenadas cartesianas. O número de pontos de α que têm coordenadas (x; y) que verificam ao mesmo tempo as condições:

$$\begin{cases} x \text{ e } y \text{ são números inteiros} \\ x^2 - y^2 = 60 \\ xy = 40 \end{cases} \quad \text{é:}$$

a) dois b) zero c) um d) nenhuma dessas

220. (MACK-SP) O lugar geométrico dos pontos P(x, y) do plano cartesiano cujas coordenadas são soluções do sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \text{ é formado por:}$$

a) um quadrado
b) quatro pontos
c) um par de retas
d) dois pares de retas
e) uma circunferência

221. (ABC) O número de pontos de interseção dos gráficos das parábolas $y = x^2 - 1$ e $x = y^2 - 1$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

222. (CESGRANRIO-RJ) O conjunto dos pontos do plano xOy que satisfaz $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$ é:

a) um segmento de reta
b) constituído de dois pontos
c) vazio
d) um semicírculo
e) um círculo

223. (FGV-SP) Considere a região do plano cartesiano

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 6\}.$$

Assinale o ponto que não pertence a *A*.

a) (0; 0)
b) $(-\sqrt{6}; 0)$
c) $(0; \sqrt{6})$
d) $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$
e) $(\sqrt{6}; -\sqrt{6})$

224. (UFSCAR-SP) Se ∅ representa o conjunto vazio e $\mathbb{R}^2$ o conjunto de todos os pares de números reais, então, com relação aos conjuntos:

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 17 = 0\}$$
$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 25 = 0\}$$

podemos afirmar:

a) $A \cup B = \mathbb{R}^2$
b) $A \cap B = \{(5; 0), (-3; -4)\}$
c) $A \cap B = \varnothing$
d) $A \cup B = \varnothing$
e) $A \cup B = \{(0; 17), (17; 0)\}$

225. (UF-PR) Em coordenadas cartesianas ortogonais, a equação:

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y = 0$$

representa, no plano, uma circunferência de:

a) centro no ponto (−2; 1) e raio = $\sqrt{5}$
b) centro no ponto (−1; 1/2) e raio = $\sqrt{5}$
c) centro no ponto (2; 1) e raio = 5
d) centro no ponto (2; −1) e raio = $\sqrt{5}/2$
e) centro no ponto (1; −1/2) e raio = $\sqrt{5}/2$

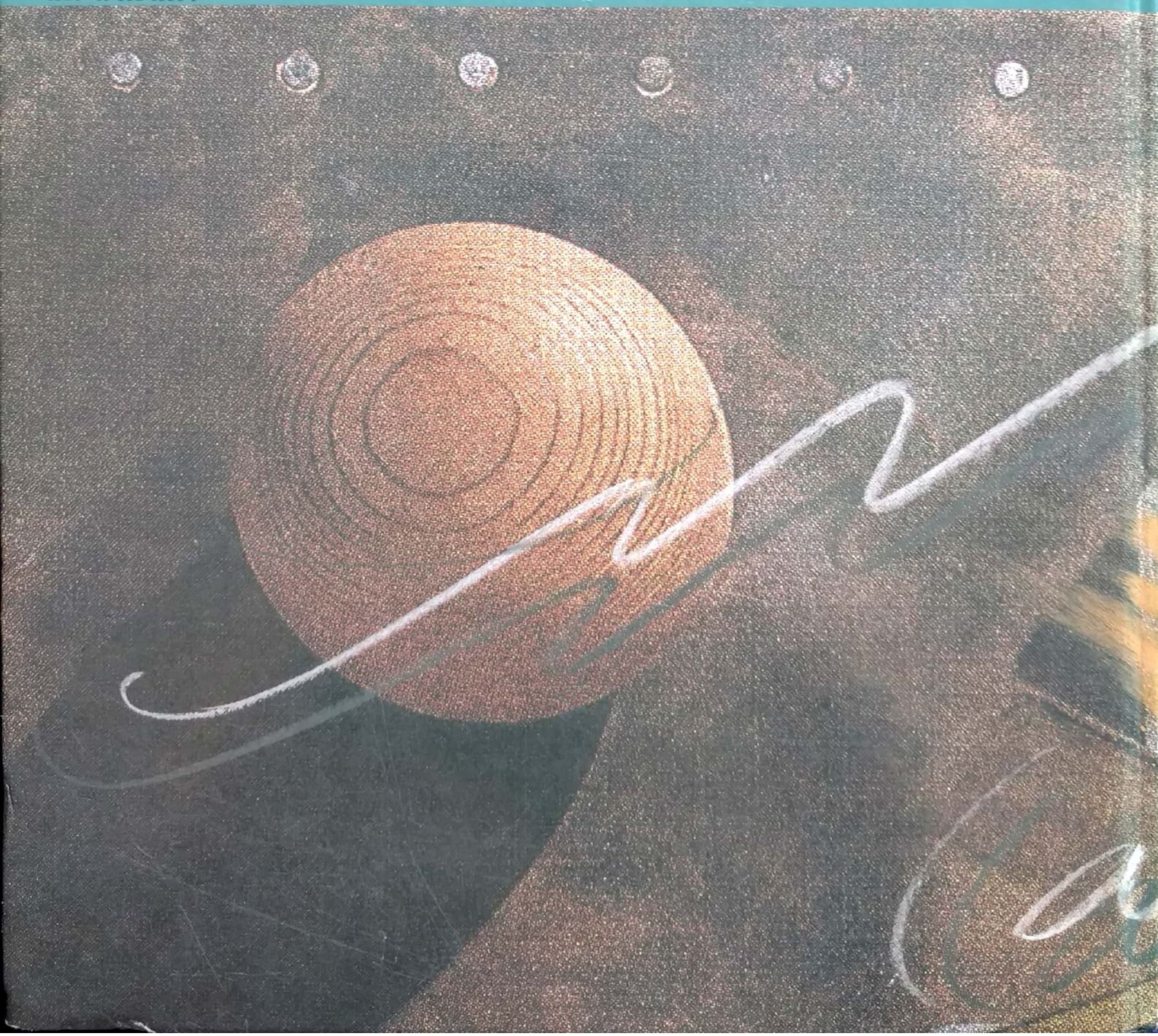
RESPOSTAS

1. c; **2.** a; **3.** b; **4.** a = −3, b = c = −4; **5.** b; **6.** e; **7.** c; **8.** a = 4 e b = −3; **9.** b; **10.** 40; **11.** b; **12.** 3; **13.** a; **14.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$; **15.** x = −1 e y = 2; **16.** b; **17.** $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$; **18.** $\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 5/6 & 1/6 \end{bmatrix}$; **19.** a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ b) 3; **20.** a; **21.** e; **22.** e; **23.** a; **24.** a; **25.** x = −4/5 e y = 3/5; **26.** b; **27.** x = 3 e y = 5; **28.** x = 3; **29.** a; **30.** c; **31.** a; **32.** 50; **33.** 2; **34.** b; **35.** b; **36.** d; **37.** a; **38.** $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); **39.** d; **40.** b; **41.** e; **42.** a = 0 e b = 1 (dois sistemas são equivalentes quando têm as mesmas soluções; substitua no segundo sistema a solução encontrada no primeiro); **43.** d; **44.** c; **45.** c; **46.** m = 1; **47.** a = −2 ou a = 1; **48.** m ≠ −2, sistema possível e determinado. Se m = −2, sistema possível e indeterminado; **49.** c (ache x e y usando somente as duas primeiras equações e imponha que os valores encontrados satisfaçam a terceira equação); **50.** a (a solução encontrada, usando-se duas das equações, não satisfaz a equação restante); **51.** d; **52.** b; **53.** d; **54.** e; **55.** b; **56.** a; **57.** e; **58.** a; **59.** b; **60.** c; **61.** d; **62.** e; **63.** a; **64.** d; **65.** d; **66.** c; **67.** a; **68.** c; **69.** b; **70.** d; **71.** 132; **72.** a; **73.** b; **74.** b; **75.** 360; **76.** a; **77.** b; **78.** a; **79.** 72; **80.** c; **81.** d; **82.** c; **83.** b; **84.** a; **85.** a; **86.** d; **87.** d; **88.** c; **89.** a; **90.** e; **91.** e; **92.** 486; **93.** b; **94.** d; **95.** e; **96.** d; **97.** c; **98.** a; **99.** d; **100.** 210; **101.** 350; **102.** 4512; **103.** c; **104.** a) 35; b) 66; c) 66; d) 8; e) 15; f) n; g) 1; h) 1; i) 1; **105.** a) $\binom{7}{4}$ b) $\binom{12}{2}$ c) $\binom{15}{9}$; **106.** a) {5; 3}; b) {5; 8}; c) {10}; d) {14}; **107.** a) $\binom{8}{3}$ b) $\binom{10}{5}$ c) $\binom{14}{7}$ d) $\binom{18}{13}$ e) $\binom{8}{6}$ f) $\binom{5}{4}$ **108.** b; **109.** b; **110.** d; **111.** n = 6; P = 720; **112.** c; **113.** a; **114.** e; **115.** a; **116.** e; **117.** c; **118.** b; **119.** b; **120.** e; **121.** a; **122.** b; **123.** d; **124.** c; **125.** $\frac{-63\sqrt{2}}{2}$; **126.** c; **127.** a; **128.** e; **129.** c; **130.** a) (4; 6); b) (−1/2; −1/2); c) (9/2; −7/2); d) (5/4; 11/6); **131.** a) (2; 5), (4; 10), (6; 15); b) (−2; 7), (0; 8), (2; 9); c) (23/4; −1/2), (26/4; 1), (29/4; 5/2); d) (12/5; 1), (14/5; 2/3), (16/5; 1/3); **132.** a) (2; 3), (4; 6); b) (5; 3), (8; 5); c) (0; 7/3), (3; 2/3); d) (1; 1/2), (5/3; 3/4); **133.** a) (2; 5), b) (−1; 7/3); **134.** B(3; −2); **135.** C(−5; −1); **136.** P(5; −4); **137.** B(29/7; 10/7); **138.** a) 10; b) 13; c) 17; d) 5; **139.** a) 36; 36 b) 20 + $\sqrt{106}$; 21/2; **140.** b; **141.** a; **142.** c; **143.** a; **144.** a; **145.** c (as coordenadas do vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$ são $x_V = \frac{-b}{2a}$ e $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$); **146.** e; **147.** d; **148.** c; **149.** d; **150.** c; **151.** c; **152.** a) $y = x + 2$; b) $y = -x + 2$; c) $y = \sqrt{3} \cdot x - 2$; d) $y = -\sqrt{3} \cdot x - 2$; **153.** a) 1; b) $-\sqrt{3}$; c) 1/4; d) 1/2; e) −2/3; f) −4/3; **154.** a) $\sqrt{3} \cdot x - 3y + 3 - \sqrt{3} = 0$; b) $\sqrt{3} \cdot x + 3y + 3 - \sqrt{3} = 0$; c) $x - y + 1 = 0$; d) $\sqrt{3} \cdot x + y + \sqrt{3} = 0$; **155.** e; **156.** c; **157.** c; **158.** d; **159.** d (a equação da reta vertical é x = 0); **160.** a) A(−1; 7); b) x + y − 4 = 0; **161.** e; **162.** d; **163.** d; **164.** a; **165.** a; **166.** a; **167.** e; **168.** b; **169.** a; **170.** a; **171.** x + y − 4 = 0; x − y − 4 = 0; **172.** b; **173.** x = 1; y = −3; **174.** a; **175.** a; **176.** d; **177.** b; **178.** a; **179.** b; **180.** c; **181.** c; **182.** e; **183.** c; **184.** d; **185.** b; **186.** x + 3y − 22 = 0; **187.** 8x − 6y − 39 = 0; **188.** b; **189.** b; **190.** e; **191.** e; **192.** a) $x^2 + y^2 = 16$; b) $x^2 + y^2 - 6x = 0$; c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$; d) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$; **193.** a) C(0; 0), R = 8; b) C(2; −4), R = $2\sqrt{5}$; c) C(−1; 3), R = 4; d) C(−1; 2), R = 3; **194.** a; **195.** d; **196.** c; **197.** $x^2 + y^2 - 4y = 0$ ou $x^2 + y^2 - 4x = 0$; **198.** b; **199.** e; **200.** d; **201.** d; **202.** b; **203.** b; **204.** d; **205.** c; **206.** a; **207.** b; **208.** e; **209.** b; **210.** R = 4/3; C(4/3; 4); **211.** y = 5 ou y = −1; **212.** b; **213.** a = −5; **214.** $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$ ou $x^2 + y^2 - 2x = 0$; **215.** b; **216.** $5\sqrt{2}$; **217.** d; **218.** e; **219.** b; **220.** b; **221.** e; **222.** a; **223.** e; **224.** c; **225.** e.

Scanned by CamScanner

Scanned by CamScanner

ISBN 85-332-0336-5



Scanned by CamScanner